现代物理基础丛书 

陕西省普通高校重点学科专项资金建设项目经费资助

量子场论与重整化导论

石康杰　杨文力　杨战营　编著



陕西省普通高校重点学科专项资金建设项目经费资助

现代物理基础丛书　62

量子场论与重整化导论

石康杰　杨文力　杨战营　编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

量子场论是理论物理的必备专业基础课. 本教材系统地介绍量子场论, 特别是重整化理论最基本的知识和方法. 第 1 章和第 2 章从拉格朗日方程和哈密顿方程出发, 引入经典场方程并导出 Noether 定理, 介绍正则量子化和费曼路径积分量子化, 导出量子 Noether 定理和 Ward 恒等式. 第 3 章用正则量子化给出自旋为 0、1 和 1/2 的几种自由场的量子化, 在自旋为 1 的电磁场中介绍 Gupta-Bleuler 方法. 第 4 章和第 5 章介绍几种场的费曼传播子、相互作用场的微扰展开、维克定理、费曼图规则以及散射截面. 第 6 章是量子电动力学单圈图的重整化的详细计算. 第 7 章介绍重整化的 BPHZ 方案. 第 8 章给出了 Zimmermann 定理和 Weinberg 定理有关部分的详细证明, 从而证明了 BPHZ 方案的收敛, 并由此证明了量子电动力学传统重整化方案的收敛性.

本教材可作为理论物理、凝聚态物理等专业量子场论初学者的教材和参考书, 也可供相关专业科技研究人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

量子场论与重整化导论/石康杰, 杨文力, 杨战营编著. —北京: 科学出版社, 2014.6

(现代物理基础丛书; 62)

ISBN 978-7-03-040995-9

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①石… ②杨… ③杨… Ⅲ. ①量子场论②重整化 ①Ⅳ. ①O413.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 123857 号

责任编辑: 刘凤娟 尹彦芳 / 责任校对: 张小霞
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 6 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2014 年 6 月第一次印刷 印张: 22 1/2
字数: 437 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序　言

物理学科是一个综合性大学的重要学科, 它的水平是反映综合性大学实力的一项重要标志. 量子场论研究场的量子理论, 对电磁现象的预言精度达 10^{-7} 数量级, 是物理学科迄今为止最成功的理论之一. 近十几年来, 量子场论不但自身得到了迅猛的发展, 而且已经在量子物理、凝聚态物理、光学、玻色–爱因斯坦凝聚等各个领域得到了非常广泛的应用. 由于量子场论的重要性, 它不仅作为理论物理专业研究生的学位专业基础课程, 而且许多学校已经将它作为物理系其他学生的学位课程. 量子场论的教学是比较难的, 因为它同时具有概念上和计算上的困难, 且它的内容也比较多. 量子场论的书, 包括中外文有很多种, 近年来国外也陆续出版了一些教材和专著, 但是它们往往内容太多, 叙述太简略, 起点太高. 初学者要花很多时间去理解和推导它的结论. 在教学上很难操作. 因此, 我们深深感到应该写一本有关量子场论的理论物理基础教材, 以供理论物理研究生及相关专业科研工作者参考. 如何精选一些既包含最基本的内容, 自成一个逻辑体系, 又能兼顾到今后实际运用的题材, 就是一个很具挑战性的任务. 在本教材的编写中, 我们精选题材, 详细推导, 对最重要而又困难的内容给出完整的、详细的结果. 让学生在有限的时间内掌握量子场论最困难的部分. 为学生从事科学研究打下坚实的理论基础, 以满足本科生和研究生教学的需求.

(1) 本教材是为初学者学习量子场论和重整化理论编写的, 对于初学者而言, 往往最困难的是复原书本上的公式推导. 所以教材起点力求尽量低, 推导力求详细, 内容力求自给自足. 许多地方不避重复, 为的是读者可以一步步地参加计算, 只要有耐心, 没有过不去的推导和弄不懂的概念. 为了使整个篇幅不大, 内容上只引入了最终学会 BPHZ 重整化最需要的资料, 其余一概不予介绍. 这样做, 对于初学者有一个坚实的起点和平台是非常有帮助的.

(2) 重整化理论是量子场论重要而又最困难的部分, 这一部分如果学不懂就不可能对量子场论的理解达到现代的高度, 初学者往往在这方面困难很大. 一般教材或专著通常介绍得比较简略, 初学者阅读时困难很大. 本教材详细推导了 QED (量子电动力学) 单圈图的重整化并着重介绍了 BPHZ 重整化方案及其与传统的 QED 重整化方案的关系, 对初等重整化理论进行了比较完整的介绍.

(3) 本教材附有少而精的习题, 可以帮助理解课文.

本教材包括两个主要内容.

第一部分是量子场论和费恩曼图, 包括第 1 ∼ 5 章. 在第 1、2 章先从拉格朗日方程和哈密顿方程出发, 引入经典场方程并导出 Noether 定理, 然后介绍量子化的两种等价方法, 即正则量子化和费恩曼路径积分量子化, 再导出量子 Noether 定理和 Ward 恒等式. 这对后面重整化的相关内容有用. 第 3 章用正则量子化给出自旋为 0、1 和 1/2 的几种自由场的量子化, 在自旋为 1 的电磁场中介绍 Gupta-Bleuler 方法. 第 4 章和第 5 章是微扰论和费恩曼图. 首先介绍前述几种场的费恩曼传播子, 然后介绍相互作用场的微扰展开、维克定理, 并对 ϕ^4 理论和电磁场给出费恩曼图规则, 最后简单介绍散射截面.

第二部分是重整化, 分为 6、7、8 三章. 第 6 章的主要内容是量子电动力学单圈图的重整化的详细计算, 还由一般场的 Ward 恒等式推导量子电动力学 Ward 恒等式, 给出重整化后场的任意圈图拉格朗日量的最终形式. 第 7 章介绍重整化的 BPHZ 方案. 首先说明对于微扰展开中出现的各种费恩曼图, 哪些是需要关注的. 然后通过量子电动力学中的交叉发散图和萨拉姆方案引入重整化的 BPHZ 方案, 引入可重整化场的概念. 第 7 章最后说明为什么可以用在拉格朗日量添加抵消项而能自洽地得到 BPHZ 方案所需要的各张费恩曼图的抵消项, 从而说明为什么要用这么复杂的方案来给出一个收敛积分, 这在物理上有什么根据. 为了说清楚这一点, 第 5 章对费恩曼图规则产生过程的详细介绍是必要的. 在第 7 章的最后一节, 给出 QED 传统重整化方案与 BPHZ 方案的关系, 这样, 就可以由 BPHZ 方案的收敛性导出 QED 传统重整化方案的收敛性.

最后一章 —— 第 8 章是 BPHZ 方案收敛性的证明. 教材给出了 Zimmermann 定理和 Winberg 定理有关部分的详细证明, 从而证明了 BPHZ 方案的收敛性. 这使读者完全了解重整化的核心问题：场论中的紫外发散困难是如何解决的.

编者感谢侯伯宇先生和张绍进先生, 由于他们坚持的场论方向和卓越的贡献, 本书的编写才成为可能. 感谢王佩先生和侯伯元先生在场论方面的指导, 感谢岳瑞宏教授、赵柳教授和孙成一博士在内容与结构方面的重要启发和宝贵意见. 丁祥茂研究员曾不辞辛劳为编者查找、复印关于 BPHZ 重整化的大量文献. 冯俊博士不但为编者打印前半部分书稿, 而且提供了重要的专著作为参考文献. 张凯博士为编者提供了关于 QED 参数测量的现代方法. 郝昆、吴晟、张利霞、杨洁坤和周建华等同学打印了本书后半部分书稿, 郝昆同学承担了本书大部分费恩曼图的绘图工作, 编者对此深表感谢. 感谢姜振益教授和西北大学现代物理研究所各位老师同学在编写本书过程中长期的关心、支持、鼓励和多方面的帮助! 感谢白晋涛教授和物理系、光子所的老师和许多同学在出版和编写本书的过程中给予的关心和帮助! 感谢科学出版社刘凤娟编辑的关心、帮助和支持! 在书稿完成之际, 编者想起求学过程中的许多师长, 他们对学生充满真诚关心和希望, 为学生辛勤付出而不求回报. 在

这本场论前言中, 编者未能一一致谢, 但是他们每一位都是编者深为感激的.

本书得到陕西省普通高校重点学科专项资金建设项目经费的资助.

编　者

目　　录

第 1 章　经　典　场

场是力学量 (场量) 随空间坐标的变化而变化的系统. 描写一个场的构形需要给出空间每一点的场量. 比如电场, 必须对空间每一点给出电场的 3 个分量, 才能知道整个电场的情况. 场论研究场的构形随时间的演化规律. 量子场论研究场在量子化以后的演化规律. 在这一章我们介绍经典场作为拉格朗日体系和哈密顿体系的方程, 以及经典的 Noether 定理. 由这条定理, 可以从场的一些对称性给出它们对应的守恒量.

1.1　经典拉格朗日体系与哈密顿体系

1.1.1　拉格朗日方程

一个力学体系有一些量是可以自由变动的, 这些量一旦确定下来, 体系的构形 (位置) 便完全确定了, 它们称为广义坐标, 用 $\{q_i\}$ 表示, $i=1,2,3,\cdots,n$. 这个体系的自由度是 n . 随便给出一个 q_i 随时间的变化关系 $\{q_i(t)\}$, 就给出了这个体系的一个 "运动学上可能的运动". 然而, 运动学上可能的运动并不一定是动力学上可以实现的运动. 找出运动学上可能的, 同时也在动力学上可能的运动, 就是动力学的目的, 决定它们的方程叫动力学方程.

对动力学的保守体系, 可以找到一个量叫拉格朗日量 L, 它是 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数,

$$L=L(q_i,\dot{q}_i).$$

什么是动力学上可能的, 也即是真实的运动呢? 它就是要求 $\{q_i(t)\}$ 满足拉格朗日方程的运动:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.1.1}$$

在最简单的情形, $L(q_i,\dot{q}_i)=T-V$, 其中 T 是动能, V 是位能. 在其他情形, 可以适当找出 L, 使它的拉格朗日方程正好给出体系的动力学方程.

请注意 (1.1.1) 式偏微商中的自变量 $\{q_i\}$ 、$\{\dot{q}_i\}$ 以及全微商 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 的意思. 如果给出一个运动, $q_i=q_i(t)$, 怎么判定它是否是真实的运动?

由 $q_i(t)\to\dot{q}_i(t)$, $\{q_i(t)\}$ 和 $\{\dot{q}_i(t)\}$ 给出 L 以及 $\dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ 、$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, 它们都是时间的函数, 因而可以得到 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$, 再检查它是否满足方程 (1.1.1). 若满足, 就是一个

动力学上允许的运动.

1.1.2 作用量原理

拉格朗日方程可以用极值原理表示出来. 我们首先定义作用量 S:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) \mathrm{d}t. \tag{1.1.2}$$

从这个定义可以看出, 每给定一个运动学上可能的运动, 就可标出体系在 $t_1 \sim t_2$ 间的作用量. 作用量原理是说, 在初始和末了的位置确定 (即 $q_i(t_1)$ 和 $q_i(t_2)$ 都确定) 的所有运动学上可能的运动中, 真实的运动是使作用量取极值的运动.

推导如下: 作用量的变更为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \mathrm{d}t.$$

由

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_i &= \delta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_i = \delta \left\{ [q_i(t + \Delta t) - q_i(t)] / \Delta t \right\} \\ &= [\delta q_i(t + \Delta t) - \delta q_i(t)] / \Delta t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i, \end{aligned}$$

给出

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_i \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

当拉格朗日方程成立并且在 t_1 和 t_2 , $\delta q_i = 0$ 时, 对其余任意 δq_i 有 $\delta S = 0$. 反之, 要求在任意 δq_i 下 $\delta S = 0$, 可推出拉格朗日方程及边界条件.

1.1.3 哈密顿方程

由拉格朗日方程可以导出哈密顿方程, 从而将拉格朗日体系改变为哈密顿体系. 这样可以得到动力学体系的哈密顿形式, 也称为正则形式. 为此, 首先定义广义动量 p_i:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{1.1.4}$$

它给出广义动量作为 q 和 $\dot{q}$ 的函数 $p_i = p_i(q, \dot{q})$, 然后反解出 $\dot{q}_i = f_i(q, p)$. 定义哈密顿量

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{q}_i - L \\ &= \sum_i p_i \dot{q}_i(p, q) - L(q, \dot{q}(p, q)) \\ &= H(p, q). \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

考虑哈密顿量的一个微小变更,

$$\begin{aligned}\delta H &= \sum_i \delta p_i \dot{q}_i + \sum_i p_i \delta \dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \\ &= \sum_i \dot{q}_i \delta p_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i.\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

因此, H 作为 q 和 p 的函数有

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{1.1.7}$$

又由拉格朗日方程 (1.1.1) 得

$$\dot{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1.1.8}$$

方程 (1.1.7) 的第一个式子和 (1.1.8) 式就是哈密顿方程. 一个运动对应的 $p_i(t), q_i(t)$ 如果满足哈密顿方程, 就是一个动力学上可能的运动.

问题: 任意给定 $p_i(t), q_i(t)$ 是否是一个在拉格朗日意义下可能的运动?

1.1.4 泊松括号

我们研究在哈密顿体系中, 任意的力学量 $A(q,p,t)$ 如何随时间变化. A 对时间的变化率为

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &\equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}.\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

在这里我们定义

$$\{A, B\} \equiv \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \tag{1.1.10}$$

为泊松括号. 泊松括号满足

$$\begin{aligned}&\{A, B\} = -\{B, A\}, \\ &\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B, \\ &\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}, \\ &\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

其中, α, β 为常数, 最后一个等式叫 Jacobi 恒等式.

习题 证明这些式子.

由定义易得基本泊松括号:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0. \tag{1.1.12}$$

附录 1.1A　不同基底下的泊松括号

如果已知 $\{A_l\}$ 和 $\{B_l\}$, 以及它们之间的泊松括号, 试计算新的基底下的泊松括号.

$$\{R,S\}_{AB}=\sum_i\left\{\frac{\partial R}{\partial A_i}\frac{\partial S}{\partial B_i}-\frac{\partial R}{\partial B_i}\frac{\partial S}{\partial A_i}\right\},$$

$$\begin{aligned}\{R,S\}_{qp}&=\sum_i\left\{\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial p_i}-\frac{\partial R}{\partial p_i}\frac{\partial S}{\partial q_i}\right\}\\&=\sum_i\left\{\sum_{ll'}\left(\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial A_l}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial B_l}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}\frac{\partial A_{l'}}{\partial p_i}+\frac{\partial S}{\partial B_{l'}}\frac{\partial B_{l'}}{\partial p_i}\right)-\{q_i\leftrightarrow p_i\}\right\}\\&=\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}\sum_i\frac{\partial A_l}{\partial q_i}\frac{\partial A_{l'}}{\partial p_i}+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial S}{\partial B_{l'}}\sum_i\frac{\partial A_l}{\partial q_i}\frac{\partial B_{l'}}{\partial p_i}\\&\quad+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}\sum_i\frac{\partial B_l}{\partial q_i}\frac{\partial A_{l'}}{\partial p_i}+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial S}{\partial B_{l'}}\sum_i\frac{\partial B_l}{\partial q_i}\frac{\partial B_{l'}}{\partial p_i}-\{q_i\leftrightarrow p_i\}\\&=\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}\{A_l,A_{l'}\}_{qp}+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial S}{\partial B_{l'}}\{A_l,B_{l'}\}_{qp}\\&\quad+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}\{B_l,A_{l'}\}_{qp}+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial S}{\partial B_{l'}}\{B_l,B_{l'}\}_{qp}.\end{aligned}$$

如果

$$\{A_l,B_{l'}\}_{qp}=\delta_{ll'},\quad \{A_l,A_l'\}_{qp}=\{B_l,B_l'\}_{qp}=0,$$

$$\begin{aligned}\text{上式}&=0+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial S}{\partial B_{l'}}\delta_{ll'}+\sum_{ll'}\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}(-\delta_{ll'})+0\\&=\sum_l\left(\frac{\partial R}{\partial A_l}\frac{\partial S}{\partial B_l}-\frac{\partial R}{\partial B_l}\frac{\partial S}{\partial A_{l'}}\right)=\{R,S\}_{AB}.\end{aligned}$$

所以在这特殊基底变换下, 泊松括号不变.

我们计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{q_i,p_j\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{q_i,p_j\}&=\{\dot{q}_i,p_j\}+\{q_i,\dot{p}_j\}=\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i},p_j\right\}+\left\{q_i,-\frac{\partial H}{\partial q_j}\right\}\\&=\sum_l\left\{\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_l}\frac{\partial p_j}{\partial p_l}-0\right\}+\sum_l\left\{\frac{\partial q_i}{\partial q_l}(-)\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial p_l}-0\right\}\\&=\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_j}-\frac{\partial^2 H}{\partial q_j\partial p_i}=0.\end{aligned}$$

类似地, 我们可以证明 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{q_i, q_j\} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{p_i, p_j\} = 0$. 因此, 基本泊松括号不随时间改变, 从而定义泊松括号可以用任何时刻的 q, p 作为基底, 尽管 (1.1.9) 式的推导要求当时的 q, p 为基底.

1.2 经 典 场

在本节, 我们用前面的结果推导场作为拉格朗日体系和哈密顿体系的经典运动方程.

1.2.1 经典场方程

场是有无穷多自由度的体系，为了研究场, 我们首先把它简化成一个有限自由度的体系, 将空间划分为格点, 如图 1.2.1. 考虑到对应关系

$$q_i \to \phi(\vec{x}_l) \to \phi(\vec{x}).$$

其中, $\vec{x}_l$ 是分立的坐标点 $\vec{x}_l = \{x_i, y_j, z_k\}$.

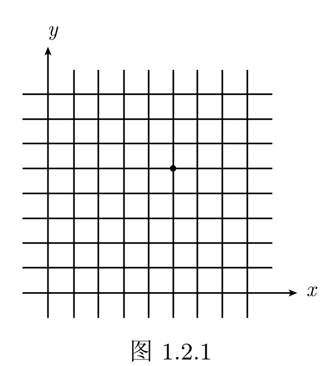


图 1.2.1

我们把场量 $\phi(\vec{x}_l)$ 作为拉格朗日系统的广义坐标, 把分立的 $\vec{x}_l$ 作为广义坐标的 “指标”. 这样, 场就变成一个有限自由度的拉格朗日体系了. 因此, 拉格朗日量是 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 的函数：

$$L(q_i, \dot{q}_i) \longrightarrow L(\phi(\vec{x}_i), \dot{\phi}(\vec{x}_i)).$$

由于通常场论是局域的, 否则会有因果律的破坏, 所以 L 是一些局域拉格朗日量 l 的和

$$L = \sum_{ijk} l_{ijk} = \sum (\Delta V)\mathscr{L}_{ijk}.$$

ΔV 是一个格点元胞的体积. l_{ijk} 只依赖于 $\{x_i, y_j, z_k\}$ 点及其附近的 ϕ 和 $\dot{\phi}$. 在以下推导中, 我们考虑最简单的情形, 比如说

$$l_{ijk} = f(\phi(x_i, y_j, z_k), \phi(x_{i+1}, y_j, z_k), \phi(x_i, y_{j+1}, z_k), \phi(x_i, y_j, z_{k+1}), \dot{\phi}(x_i, y_j, z_k)).$$

这个式子又可写成

$$l_{ijk} = f_1(\phi(x_i,y_j,z_k), \nabla_x\phi(x_i,y_j,z_k), \nabla_y\phi(x_i,y_j,z_k), \nabla_z\phi(x_i,y_j,z_k), \dot{\phi}(x_i,y_j,z_k)),$$

其中, 定义

$$\begin{aligned}
\nabla_x\phi(x_i,y_j,z_k) &= \frac{1}{x_{i+1}-x_i}(\phi(x_{i+1},y_j,z_k)-\phi(x_i,y_j,z_k)),\\
\nabla_y\phi(x_i,y_j,z_k) &= \frac{1}{y_{i+1}-y_i}(\phi(x_i,y_{j+1},z_k)-\phi(x_i,y_j,z_k)),\\
\nabla_z\phi(x_i,y_j,z_k) &= \frac{1}{z_{i+1}-z_i}(\phi(x_i,y_j,z_{k+1})-\phi(x_i,y_j,z_k)).
\end{aligned}$$

于是, 我们有

$$L = \sum_{ijk}^{V} l_{ijk}(\phi(x_i,y_j,z_k), \nabla_x\phi(x_i,y_j,z_k), \nabla_y\phi(x_i,y_j,z_k), \nabla_z\phi(x_i,y_j,z_k), \dot{\phi}(x_i,y_j,z_k)).$$

当格点变得越来越密, 我们可以将求和变为积分:

$$\sum_{ijk}^{V} = \int_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\Delta V}.$$

由此给出

$$\begin{aligned}
L &= \int_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\Delta V} l_{ijk}(\phi, \nabla_x\phi, \nabla_y\phi, \nabla_z\phi, \dot{\phi}) = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \frac{l}{\Delta V}\\
&\to \int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \mathscr{L}_{xyz}\left(\phi(x,y,z), \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z), \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,y,z)\right),
\end{aligned}$$

其中, $\mathscr{L}_{xyz} = \lim\limits_{\Delta V\to 0} \dfrac{l_{ijk}}{\Delta V}$.

我们看到, 在场论中, 坐标 (x,y,z) 相当于理论力学中广义坐标的**指标**, 而场量 ϕ 相当于广义坐标.

$$\dot{q}_i \to \frac{\partial}{\partial t}\phi(x,y,z), \quad \text{因为\textbf{指标}没有变}.$$

$\mathscr{L}_{xyz}$ 称为拉格朗日密度, 它可能只依赖于场量及其对时空坐标的偏微商, 也可能明显地依赖于时空点的坐标, 即 (x,y,z,t) . 我们以后遇到的情形通常只考虑最简单的情形, 不考虑显含时空坐标.

例 考虑一根弦, 用 x 表示它的原始坐标, $\varphi = x' - x$ 是位移.

0 L

设单位长度的弹性系数为 κ, 也就是, 当单位长度的弦的伸长为 l 时, 弹性张力为 κl, 则当长度为 a, 伸长为 b 时, 弹性张力为 $\dfrac{\kappa}{a}b$, 拉到伸长 b 要克服弹力做功

$$w = \int_0^b \mathrm{d}x \frac{\kappa}{a} x = \frac{\kappa}{a} b^2,$$

这也就是伸长为 b 的弹力势能.

我们把弦分为 N 小段, 每段长度为 a, 如单位长度质量为 μ, 则长度为 a 的弦质量为 μa. 因此, 当各点位移为 φ 时, 一小段弦的伸长为 $\Delta\varphi$, 相应的弹性势能为 $\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{a}\right)(\Delta\varphi)^2$, 动能为 $\frac{1}{2}(\mu a)\dot{\varphi}^2$, 这一小段的拉格朗日量为 $l = \frac{1}{2}(\mu a)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{a}\right)(\Delta\varphi)^2$. 而 $\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} a$, 由此得

$$l = \frac{1}{2}(\mu a)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{a}\right)\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = a\left(\frac{\mu}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\kappa\varphi'^2\right),$$

其中, $\varphi' \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dot{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$,

$$\text{总的拉格朗日量} = \sum_{\text{各段}} l = \int_0^{L=Na} \mathrm{d}x \underbrace{\left(\frac{\mu}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\kappa\varphi'^2\right)}_{\mathscr{L}(\varphi,\dot{\varphi},\varphi')}.$$

这是由于整个系统的拉格朗日量等于动能减势能, 正好等于子系统拉格朗日量之和.

在这个例子中, 场量是弦相对于固有长度的位移. 一般的一维系统, 场量也可以是其他参量, 比如弦理论, 场量是靶空间坐标 $X^a, \theta^{I\alpha\alpha'}$.

有了拉格朗日量, 就可以写出作用量:

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \mathscr{L}(\phi, \partial_x\phi, \partial_y, \phi, \partial_z\phi, \partial_t\phi) \\ &= \int_{V\otimes T} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi). \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

我们看到, 作用量 S 取决于在 $t_1 \sim t_2$ 这段时间内, 各个时刻 V 空间的各点的场量 (图 1.2.2):

$$\phi(x) \equiv \underbrace{\phi(\vec{x},t) \to \partial_x\phi(\vec{x},t), \partial_y\phi(\vec{x},t), \partial_z\phi(\vec{x},t), \partial_t\phi(\vec{x},t)}$$

$$\downarrow$$

$$\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi)(\vec{x},t)$$

$$\downarrow$$

$$L(t)$$

$$\downarrow$$

$$S$$

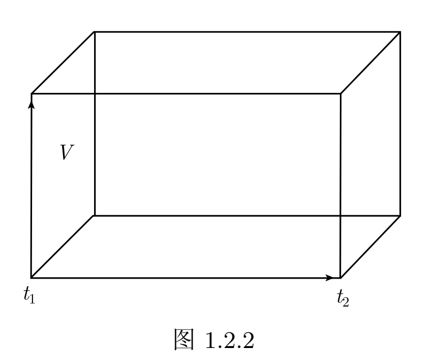


图 1.2.2

任意给定一个场量随时间的变化, 都可以给出这段时间的作用量. 真实的运动要求给出的作用量是在场量作任意微小变更下使 S 不变的运动 (场的运动就是场量随时间的变化). 从前面叙述我们知道, 作用量是取决于 $\phi(x,y,z,t)$ 这个函数的一个数, 也就是说, 它是函数的函数, 我们称它为泛函. 为了研究它的变更, 我们首先研究泛函的微商及它的变分. 记住 $\phi(\overrightarrow{x},t)$ 的坐标 $\overrightarrow{x}$ 相当于过去广义坐标的指标, 或者叫标号, 所以对应于改变 q_i , 即 $q_i \to q_i + \delta q_i$, 现在应该是改变 ϕ,

$$\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x).$$

令 $\phi_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\phi,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ \dot{\phi} = \dfrac{\partial}{\partial t}\phi$, 作用量 S 的变更为

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi}\right] \\ &= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \partial_i\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i}\delta\phi\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi\right) - \left(\partial_i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i}\right)\delta\phi - \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}\right)\delta\phi\right] \\ &= \oint \left[\mathrm{d}\sigma_i\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i}\delta\phi\right) + \mathrm{d}\sigma_t\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\phi\right)\right] + \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i} - \partial_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}}\right]\delta\phi.\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

在这里和以后同一项中, 重复指标意味着对该指标求和.

由作用量原理, 真实运动应该使 S 取极值, 也就是在任意变更 $\delta\phi$ 时, δS 都等于 0. 由此给出

$$\partial_i\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_i} + \partial_t\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (i = 1,2,3),$$

即

$$\partial_\mu\frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))} = \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial\phi(x)}. \tag{1.2.3}$$

这就是场量满足的运动方程, 是一个偏微分方程, 称为欧拉–拉格朗日方程. 在 (1.2.3) 式中, 我们约定对同一项的重复指标 i 和 μ 求和. 今后除非特别声明, 我们总是作这样的约定. 我们通常取拉丁字母 i,j,k 作为空间指标, 而希腊字母 $\mu,\nu,\cdots$ 作为

四维时空指标. 当有多个独立场时：令 $\phi_A(A=1,2,\cdots,n)$ 为场量, 就有

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_A)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_A} = 0 \quad (A=1,2,\cdots,n), \tag{1.2.4}$$

这些就是场方程的拉格朗日形式.

以下考虑场方程的正则形式, 即哈密顿形式. 由

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

利用前面将时空划分为格点的方法, 得到

$$\begin{aligned} &H = \sum_{ijk} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - l \right), \\ &\Rightarrow H = \int \frac{\mathrm{d}^3 x}{\Delta V} \left(\frac{\partial l}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - l \right) = \int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathscr{L} \right). \end{aligned}$$

令重力量密度为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} \equiv \pi \tag{1.2.5}$$

有

$$H(t) = \int (\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathscr{L}(x)) \mathrm{d}^3 x \equiv \int \mathscr{H}(x,t) \mathrm{d}^3 x, \tag{1.2.6}$$

其中, $\mathscr{H}$ 是哈密顿密度. 在哈密顿形式中, 我们应该把哈密顿密度 $\mathscr{H}$ 写成 π、ϕ 和 ϕ 对于空间的偏微商的函数 $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\pi, \phi, \partial_j \phi), j=1,2,3$. 为了推广到场论, 我们还需要一些关系. 考虑到在一维格点中有

$$\sum_i \frac{\partial \phi_i}{\partial \phi_j} F_i = \sum_i \delta_{ij} F_i = F_j.$$

在此式中 i,j 是格点的分立指标, 请注意与 $\delta_j \phi$ 中的 j 意义的区别. 我们定义 $\dfrac{\partial}{\Delta V \partial \phi_j}$ 在 $\Delta V \to 0$ 的极限为变分 $\dfrac{\delta}{\delta \phi(x)}$, 可以得到

$$\sum_i \Delta V \frac{\partial \phi_i}{\Delta V \partial \phi_j} F_i \xrightarrow{\Delta V \to 0} \int \mathrm{d}x \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} F(x) = F(y).$$

由 δ 函数的定义可知

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x-y).$$

由 $\dfrac{\partial \left(\dfrac{\partial}{\partial x} \phi_i \right)}{\Delta V \partial \phi_j} = \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\partial \phi_i}{\Delta V \partial \phi_j}$ 可导出

$$\frac{\delta \phi'(x)}{\delta \phi(y)} = \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-y).$$

对于三维格点, 也可以得到类似关系.

以下考虑泊松括号在场论中的形式. 我们有

$$\{F,G\}=\sum_i\left[\frac{\partial F}{\partial\phi_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial\phi_i}\right]=\sum_i\Delta V\left[\frac{1}{\Delta V}\frac{\partial F}{\partial\phi_i}\cdot\frac{1}{\Delta V}\frac{\partial G}{\partial\pi_i}-\frac{1}{\Delta V}\frac{\partial F}{\partial\pi_i}\cdot\frac{1}{\Delta V}\frac{\partial G}{\partial\phi_i}\right].$$

请注意动量密度是格点元胞的动量与元胞体积之比, $\pi_i=\dfrac{p_i}{\Delta V}$, 由此可以导出

$$\pi_i=\frac{\partial L}{\Delta V\partial\dot{\phi}_i}=\frac{\partial l_i}{\Delta V\partial\dot{\phi}_i}=\frac{\partial\left(\dfrac{l_i}{\Delta V}\right)}{\partial\dot{\phi}_i}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_i}.$$

对于一个多元函数对宗量的偏微分, 当宗量的分立指标过渡到连续变量x, $(\phi_i)\xrightarrow{\Delta V\to 0}\phi(x)$ 时, 记住我们标记 $\dfrac{\partial F}{\Delta V\partial\phi_i}$ 的极限为 $\dfrac{\partial F}{\Delta V\partial\phi_i}\xrightarrow{\Delta V\to 0}\dfrac{\delta F}{\delta\phi(x)}$, 得到

$$\{F,G\}=\int\mathrm{d}^3x\left(\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta F}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G}{\delta\phi(x)}\right).\tag{1.2.7}$$

由 (1.2.7) 式可以算出场论中的基本泊松括号$(t=t')$

$$\{\phi(x),\pi(x')\}=\int\mathrm{d}^3x''\Bigg[\underbrace{\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x'')}}_{\delta^3(\vec{x}-\vec{x''})}\underbrace{\frac{\delta\pi(x')}{\delta\pi(x'')}}_{\delta^3(\vec{x'}-\vec{x''})}-0\Bigg]=\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}),\tag{1.2.8}$$

$$\{\phi(x),\phi(x')\}=\{\pi(x),\pi(x')\}=0.\tag{1.2.9}$$

这里我们用到

$$\frac{\partial\phi_{ijk}}{\Delta V\partial\phi_{i'j'k'}}=\frac{1}{\Delta V}\delta_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'}\xrightarrow{\Delta V\to 0}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'}).$$

我们还可以算出

$$\begin{aligned}\{\phi(x'),H\}&=\int\mathrm{d}^3x\left(\frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)}\frac{\delta H}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta\phi(x')}{\delta\pi(x)}\frac{\delta H}{\delta\phi(x)}\right)\\&=\int\mathrm{d}^3x\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\frac{\delta H}{\delta\pi(x)}\\&=\frac{\delta H}{\delta\pi(x')},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\pi(x'),H\}&=\int\mathrm{d}^3x\left(\frac{\delta\pi(x')}{\delta\phi(x)}\frac{\delta H}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta\pi(x')}{\delta\pi(x)}\frac{\delta H}{\delta\phi(x)}\right)\\&=\int\mathrm{d}^3x\left(0-\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\frac{\delta H}{\delta\phi(x)}\right)\\&=-\frac{\delta H}{\delta\phi(x')}.\end{aligned}$$

由有限个自由度体系的方程

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \dot{A} = \{A, H\}$$

(A 不显含时间), 可以过渡到场论的方程

$$\dot{q}(x') = \{q(x'), H\}, \quad \dot{\pi}(x') = \{\pi(x'), H\}, \quad \dot{A} = \{A, H\}.$$

我们可以直接验算这些式子.

验算：由哈密顿密度的表达式有

$$H = \int \mathrm{d}^3x \mathscr{H} = \int \mathrm{d}^3x (\pi\dot{\phi} - \mathscr{L}).$$

由此可以计算 H 对 π 的变分 (在以下直到 (1.2.11) 式的推导中, π 和 ϕ 的时间都相同, 因此它们都只是空间坐标的函数),

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(x')} = \int \mathrm{d}^3x \left[\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\dot{\phi}(x) + \pi(x)\frac{\delta\dot{\phi}(x)}{\delta\pi(x')} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\underbrace{\frac{\delta\phi}{\delta\pi(x')}}_{0} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\frac{\delta\dot{\phi}(x)}{\delta\pi(x')} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_i\phi}\frac{\delta\partial_i\phi}{\delta\pi}\right].$$

然而, 我们由

$$\pi(x)\frac{\delta\dot{\phi}(x)}{\delta\pi(x')} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}\frac{\delta\dot{\phi}(x)}{\delta\pi(x')}, \quad (\text{注意 } \dot{\phi}(x) \text{ 是 } \phi(x) \text{ 和 } \pi(x) \text{ 以及 } \partial_i\phi \text{ 的函数})$$

和

$$\frac{\delta\partial_i\phi(x)}{\delta\pi(x')} = \frac{\delta\partial_i\phi(x)}{\delta\pi(x')} = \partial_i\frac{\delta\phi(x)}{\delta\pi(x')} = 0,$$

给出

$$\frac{\delta H}{\delta\pi(x')} = \int \mathrm{d}^3x \dot{\phi}(x)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') = \dot{\phi}(x')$$

类似地 H 对 ϕ 的变分给出

$$\frac{\delta H}{\delta\phi(x')} = \int \mathrm{d}^3x \left[\pi(x)\frac{\delta\dot{\phi}(x)}{\delta\phi(x')} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\underbrace{\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x')}}_{\delta^3(x-x')} - \underbrace{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}}_{\pi(x)}\frac{\delta\dot{\phi}(x)}{\delta\phi(x')} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_i\phi}\frac{\delta\partial_i\phi(x)}{\delta\phi(x')}\right].$$

由

$$\frac{\delta\partial_i\phi(x)}{\delta\phi(x')} = \partial_i\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(x')} = \partial_i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta H}{\delta\phi(x')} &= \int \mathrm{d}^3x \left(-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_i\phi}\partial_i\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\right) \\
&= \int \mathrm{d}^3x \left[-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') - \partial_i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_i\phi}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\right) + \left(\partial_i\frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial\partial_i\phi(x')}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\right] \\
&= -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}(x') + \left(\partial_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_i\phi}\right)(x') = -\partial_t\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}(x') = -\dot{\pi}(x').
\end{aligned}
$$

倒数第二步是由于欧拉–拉格朗日方程.

所以我们有场的哈密顿方程

$$
\{\phi(x'), H\} = \dot{\phi}(x'), \quad \{\pi(x'), H\} = \dot{\pi}(x'), \tag{1.2.10}
$$

对于其他不显含时间的力学量有

$$
\begin{aligned}
\{A, H\} &= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\delta A}{\delta\phi(x)}\frac{\delta H}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta A}{\delta\pi(x)}\frac{\delta H}{\delta\phi(x)}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{\delta A}{\delta\phi(x)}\dot{\phi}(x) + \frac{\delta A}{\delta\pi(x)}\dot{\pi}(x)\right] \\
&= \sum_i \Delta V\left[\frac{\Delta A}{\Delta V\Delta\phi_i}\underbrace{\dot{\phi}_i}_{\frac{\Delta\phi_i}{\Delta t}} + \frac{\Delta A}{\Delta V\Delta\pi_i}\underbrace{\dot{\pi}_i}_{\frac{\Delta\pi_i}{\Delta t}}\right] \\
&= \frac{\Delta A}{\Delta t} = \dot{A}.
\end{aligned} \tag{1.2.11}
$$

1.2.2 Noether 定理

由场的拉格朗日形式可以导出 Noether 定理, 由这条著名的定理可以从拉格朗日密度的某些对称性直接导出体系的守恒量. 设有一种场的变换: $\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \delta_o\phi$, 其中 $\delta_o\phi(\phi, \phi_\mu)$, 是局域地依赖于场量的, 使拉格朗日密度的变更是某组局域流的散度, 也就是存在局域的 j^μ, 满足

$$
\delta_o\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_o\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi_\mu = \partial_\mu j^\mu, \tag{1.2.12}
$$

(式中 $\phi_\mu \equiv \partial_\mu\phi \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\phi, \mu = 0, 1, 2, 3; x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$). 则该体系存在守恒流 $\{J^\mu\}$ 满足守恒流条件 $\partial_\mu J^\mu = 0$ 和相应的守恒量 $\displaystyle\int \mathrm{d}^3x J^0$, 这就是 Noether

定理. 以下我们首先证明守恒流的存在. 由 (1.2.12) 式我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_o\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi_\mu&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_o\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\partial_\mu\delta_o\phi\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_o\phi+\partial_\mu\big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\big)-\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right)\delta_o\phi\\&=\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right)\delta_o\phi+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\right)=\partial_\mu j^\mu.\end{aligned}$$

在满足场方程时给出

$$\partial_\mu\left(j^\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\right)=0. \tag{1.2.13}$$

令

$$J^\mu\equiv j^\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi, \tag{1.2.14}$$

它是局域地依赖于场量的守恒流, 即满足方程:

$$\partial_\mu J^\mu=0 \tag{1.2.15}$$

的流. 在什么情况下可能存在这种守恒流呢? 以下作进一步的分析. 问题的关键是对某种变换找出 j^μ 来.

考虑一个联合变换. 场量本身有一个变换 $\delta_2\phi$, 坐标还有一个变换:

$$x'^\mu=x^\mu+\delta x^\mu(x). \tag{1.2.16}$$

我们研究在同一个坐标值时场量的总变化. 标记新的场为 ϕ', 有

$$\phi'(x')=\widetilde{\phi}(x')+\delta_2\phi(x')\quad(\Longleftarrow\text{场量本身的变化}),$$

其中, $\widetilde{\phi}$ 是由坐标变换得到的场,

$$\widetilde{\phi}(x')=\phi(x)\quad(\Longleftarrow\text{场随坐标变化而漂移}).$$

也就是

$$\widetilde{\phi}\big(x'(x)\big)=\phi(x). \tag{1.2.17}$$

我们要求算出 $\phi'(x)-\phi(x)$, 也就是同一个坐标值时场的总变化, 计算得到

$$\phi'(x)-\phi(x)=\phi'(x)-\widetilde{\phi}(x)+\widetilde{\phi}(x)-\phi(x)=\delta_2\phi(x)+\widetilde{\phi}(x)-\phi(x). \tag{1.2.18}$$

由 (1.2.16) 式得到

$$\begin{aligned}&\widetilde{\phi}\big(x'(x)\big)=\widetilde{\phi}(x+\delta x)=\widetilde{\phi}(x)+\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu=\phi(x),\\&\Longrightarrow\widetilde{\phi}(x)-\phi(x)=-\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu.\end{aligned}$$

代入 (1.2.18) 式, 得到联合变换给出的场的变更

$$\delta\phi=\phi'(x)-\phi(x)=\delta_2\phi(x)-\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\doteq\delta_2\phi(x)-\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\delta x^\nu.$$

我们有

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_V \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(\phi,\phi_\mu)=\int \mathrm{d}^4x\delta\mathscr{L}\\&=\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi_\mu\right)\\&=\int_V \mathrm{d}^4x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right]\delta\phi+\int_V \mathrm{d}^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right].\end{aligned}$$

因此, 当 ϕ 满足场方程时, 第一项为 0, 有

$$\begin{aligned}\delta S&=\int_V \mathrm{d}^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right]\\&=\oint_{\partial V}\mathrm{d}\sigma_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right],\end{aligned}\tag{1.2.19}$$

其中, ∂V 表示 V 的边界, 即 δS 只取决于 V 的边界上的情况.

另一方面, 如果在一种坐标变换与 ϕ 自身的变换联合在一起的变换中 $\mathscr{L}\mathrm{d}^4x$ 不变 (从跟着坐标架漂移的角度来看),

$$\mathscr{L}\mathrm{d}^4x=\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x',$$

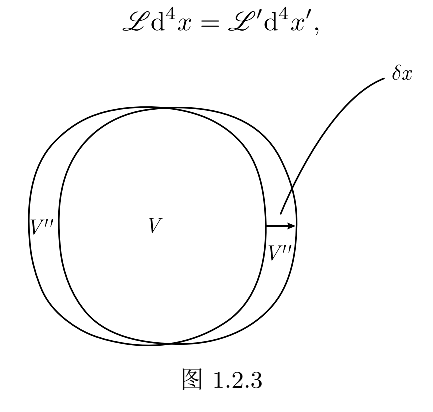


图 1.2.3

则由图 1.2.3 可看出, 在 V 内的 δS 等于在边界区 V'' 和 V' 上的 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{L}''$ 的体积分的差:

$$S_V=\int_{V+V''}\mathscr{L}\mathrm{d}^4x=\int_{V+V'}\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x'=\int_V\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x+\int_{V'}\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x=\int_V\mathscr{L}\mathrm{d}^4x+\int_{V''}\mathscr{L}\mathrm{d}^4x$$

$$\delta S=\int_V\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x-\int_V\mathscr{L}\mathrm{d}^4x=-\int_{V'}\mathscr{L}'\mathrm{d}^4x+\int_{V''}\mathscr{L}\mathrm{d}^4x\tag{1.2.20}$$

$\delta\vec{x}$ 表示四维矢量变更假设在边界上坐标的变化为 $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, 其中 δx^μ 可能是 x 的函数, 则在边界上构成的体积元就是 $\delta\vec{x}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \delta x^\mu \mathrm{d}\sigma_\mu$. 所以我们有, 对任何四维体积元

$$\begin{aligned} \delta S &\cong -\oint_{\partial V} \mathrm{d}\sigma_\mu \delta x^\mu \mathscr{L} = -\int_V \mathrm{d}^4 x \partial_\mu(\mathscr{L}\delta x^\mu) \\ &\Rightarrow \delta\mathscr{L} = -\partial_\mu(\mathscr{L}\delta x^\mu) \equiv \partial_\mu j^\mu. \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

注意, 边界上的积分 $\mathrm{d}\sigma$ 的方向以朝外为正向, 因此 $\mathrm{d}\vec{x}\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \mathrm{d}\sigma_\mu \delta x^\mu$ 在 V' 内为正值, V'' 内为负值.

因此, 我们可以把这段分析归纳到前面关于定理的叙述中去, 我们也可以直接由 (1.2.19) 式和 (1.2.21) 式得

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}\sigma_\mu \left(-\mathscr{L}\delta x^\mu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right) = \int_V \mathrm{d}^4 x \partial_\mu \left(-\mathscr{L}\delta x^\mu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right) = 0,$$

由于 V 是任意的, 有

$$\partial_\mu \left(-\mathscr{L}\delta x^\mu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right) \equiv \partial_\mu J^\mu = 0.$$

在坐标变换与场的变更的联合作用下, 使 (从跟着坐标漂移的观点看) 拉格朗日密度乘以四维体积元保持不变：$\mathscr{L}\mathrm{d}^4x = \mathscr{L}'\mathrm{d}^4x'$, 则存在守恒流和守恒量. 当存在几个场量时, 这些结果可以推广. 这只要在公式中令 $\phi \to \phi^A$, $\phi_\mu \to \phi^A_\mu$, $\phi_\nu \to \phi^A_\nu$ 并且约定对一项中重复的 A 求和即可. 从 (1.2.20) 式和 (1.2.21) 式有

$$\int_V \delta\mathscr{L}\mathrm{d}^4 x = -\int_V \mathrm{d}^4 x \partial_\mu(\mathscr{L}\delta x^\mu) \Rightarrow \delta\mathscr{L} = -\partial_\mu(\mathscr{L}\delta x^\mu).$$

因此, 存在 $j^\mu = -\mathscr{L}\delta x^\mu$ 满足 (1.2.12) 式, 这时有 $\delta_o\phi = \delta_2\phi - \dfrac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\delta x^\nu$, 给出守恒流

$$J^\mu = \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\phi_\nu - \mathscr{L}\delta^\mu_\nu\right)\delta x^\nu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_2\phi. \tag{1.2.22}$$

这就是通常表述的 Noether 定理.

例 1 当 $\mathscr{L}$ 在某种变换 $\delta_0\phi$ 下不变时, 我们可以令 $j^\mu \equiv 0$, 从而有

$$\delta_o\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_o\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi_\mu = 0 = \frac{\partial}{\partial x^\mu}j^\mu, \quad j^\mu \equiv 0.$$

当场满足运动方程时

$$\partial_\mu\left(j^\mu - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\right) = -\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\right) = 0,$$

也就是, 存在守恒流

$$J^\mu = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu}\delta_o\phi,$$

使得 $\partial_\mu J^\mu = 0$.

比如一个复数场 $\phi(x) \neq \phi^*(x)$, 可以认为是两个场 $\phi(x)$ 和 $\phi^*(x)$(存在两个以上场时, 前面结果很容易作相应推广), 如果拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \phi^*(x)\phi(x),$$

我们令 $\phi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi$, 实数 α 与坐标无关, 这就使拉格朗日密度保持不变:

$$\mathscr{L}' = \partial_\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi)^*\partial^\mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi) - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi)^*(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\phi) = \mathscr{L}.$$

这时有

$$\delta_o\phi \cong \phi' - \phi = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1)\phi \cong \mathrm{i}\alpha\phi, \quad \delta_o\phi^* = -\mathrm{i}\alpha\phi^*.$$

所以有守恒流

$$\begin{aligned} J^\mu &= -\left(\partial^\mu\phi^*(\mathrm{i}\alpha\phi) + \partial^\mu\phi(-\mathrm{i}\alpha\phi^*)\right) \\ &= -\mathrm{i}\alpha(\partial^\mu\phi^*\cdot\phi - \partial^\mu\phi\cdot\phi^*). \end{aligned}$$

例 2 当拉格朗日量密度不显含时空坐标时, 就有当时空坐标平移时 $x^\mu \longrightarrow x^\mu + a^\mu = x'^\mu$. 因为 ϕ 随着坐标平移, $\partial_\mu\phi$ 也随着坐标平移, 这些量都不变. 因而有

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}(x') = \mathscr{L}(\phi', \phi'_\mu) = \mathscr{L}(\phi(x+a), \phi_\mu(x+a)) = \mathscr{L}(\phi(x), \phi_\mu(x)) \\ &\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x', \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{L}\mathrm{d}^4x \text{不变} \end{aligned}$$

所以存在守恒流. 这时由于 $\delta x^\mu = a^\mu$, 我们得到守恒流

$$\begin{aligned} J^\mu &= \left(-\mathscr{L}\delta x^\mu - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu}\left(\delta_2\phi - \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\right)\right) \\ &= \left(-\mathscr{L}a^\mu - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu}(0 - \phi_\nu a^\nu)\right) \\ &= -\mathscr{L}a^\mu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu}\phi_\nu a^\nu, \quad \text{满足守恒流条件 } \partial_\mu J^\mu = 0. \end{aligned}$$

取四组不同的 a^μ , 可以得到四个守恒流, 它们分别代表能量和动量守恒.

以下我们证明当 J^μ 满足守恒流的条件 $\partial_\mu J^\mu = 0$, 并且当场是局限在空间的有限范围时就存在守恒量 $\displaystyle\int \mathrm{d}^3xJ^0$. 图 1.2.4 表示在时空中一个区域. 由流守恒条

件, 得到在这区域中有

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^4x\partial_\mu J^\mu = 0 = \oint \mathrm{d}\sigma_\mu J^\mu \\
&= \int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^0(\partial_0 J^0+\partial_1 J^1+\partial_2 J^2+\partial_3 J^3) \\
&= \int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\int \mathrm{d}x^0\partial_0 J^0+\int \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^0\int \mathrm{d}x^1\partial_1 J^1+\cdots \\
&= I_0+I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

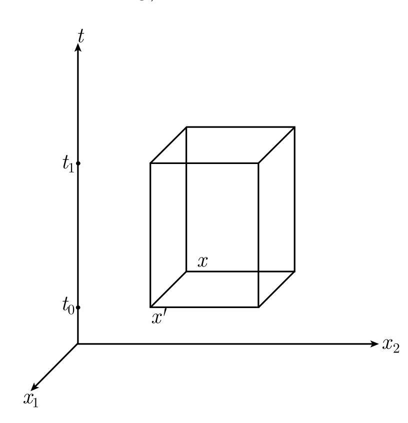


图 1.2.4

其中

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 J^0\Big|_{x_2^0=t_2}^{x_1^0=t_1} \\
&= \int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\left[J^0(x_1^0,x^1,x^2,x^3)-J^0(x_2^0,x^1,x^2,x^3)\right] \\
&= \int |\mathrm{d}\sigma_0|J^0(x_1^0,x^1,x^2,x^3)-\int |\mathrm{d}\sigma_0|J^0(x_2^0,x^1,x^2,x^3) \\
&= \oint \mathrm{d}\sigma_0 J^0.
\end{aligned}
$$

这也就是

$$
I_0=\int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 J^0\Big|_{t=t_1}-\int \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 J^0\Big|_{t=t_2}.
$$

其他项类似. 比如 I_1 可以写成

$$
I_1=\int \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^0 J^1\Big|_{x_1=x'}-\int \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^0 J^1\Big|_{x_1=x}=\oint \mathrm{d}\sigma_1 J^1.
$$

我们考虑场量在 $x^j \longrightarrow \infty (j=1,2,3)$ 时为 0 . 所以这些地方 $J^j=0$. 因而有 $\lim\limits_{x,x'\to\infty} I_1=0$, 同理 $I_2=I_3=0$. 由此可以推出

$$I_0 = 0 \quad \Longrightarrow \int_{V=\infty} \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 J^0(t_2) = \int_{V=\infty} \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 J^0(t_1).$$

因此, $\int \mathrm{d}^3x J^0$ 这个量与时间无关, 它是体系的守恒量.

附录 1.2A　变分与泛函微商

变分较严格的定义如下.

△ 考虑一个函数 $\delta_\epsilon(x-x') \geqslant 0$.

(1) 它是偶函数, 只与 $(x-x')$ 的绝对值有关, 是 $(x-x')$ 的单值函数;

(2) 它的峰值在 $x = x'$ 处;

(3) 它在 $|x-x'| > \dfrac{\epsilon}{2}$ 时为 0;

(4) 它是光滑函数;

(5) $\int \delta_\epsilon(x-x')\mathrm{d}x = 1$. 因此, $\lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x-x') = \delta(x-x')$.

△ 然后考虑一个运算：令 $\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \mu\delta_\epsilon(x-x')$.

△ 在上述变更下, 任何 $\varphi(x)$ 的泛函的变更与 μ 的比值 $\dfrac{\delta\Phi[\varphi]}{\mu}$, 定义为

$$\frac{\delta\Phi}{\delta_\epsilon\varphi(x')} = \lim_{\mu\to 0} \frac{\delta\Phi[\varphi]}{\mu}.$$

△ 求 $\dfrac{\delta\varphi(x)}{\delta_\epsilon\varphi(x')}$,

在上述定义下, $\delta\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) = \mu\delta_\epsilon(x-x')$, 所以

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta_\epsilon\varphi(x')} = \frac{\mu\delta_\epsilon(x-x')}{\mu} = \delta_\epsilon(x-x').$$

△ 泛函的变分就是上述过程当 $\epsilon \to 0$ 的极限 (积分后取极限), 因此

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')} = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(x-x') = \delta(x-x').$$

例　当 $H = \int \mathscr{H}(\varphi, \varphi')\mathrm{d}x$ 时, 求 $\dfrac{\delta H}{\delta\varphi(x')}$, $\varphi' = \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi$.

解：

$$\begin{aligned}\frac{\delta H}{\delta_\epsilon\varphi(x')} &= \int \left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi}(x)\frac{\delta\varphi(x)}{\delta_\epsilon\varphi(x')} + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi'}(x)\frac{\delta\varphi'(x)}{\delta_\epsilon\varphi(x')}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \left[\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi}(x)\delta_\epsilon(x-x') + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\varphi'}(x)\frac{\partial}{\partial x}\delta_\epsilon(x-x')\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \left\{ \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi}(x)\delta_\epsilon(x-x') + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi'}(x)\delta_\epsilon(x-x')\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi'}(x)\right)\delta_\epsilon(x-x')\right\} \mathrm{d}x \\
&\overset{\epsilon\to 0}{=} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi}(x') - \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi'}(x') + \underbrace{\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi'}(x)\delta(x-x')\bigg|_{x=b}^{x=a}}_{=0,\text{当}x'\neq a,b},
\end{aligned}
$$

其中, a,b 为一维空间的边界.

第 2 章　场的量子化

在本章, 我们讨论场的量子化. 场是一种有无穷个自由度的力学体系, 它们量子化是有限个自由度的力学体系的量子化的推广. 我们首先考虑场的正则量子化, 然后研究它的路径积分量子化.

2.1　力学体系的正则量子化

我们首先回顾量子力学中的正则量子化方法, 它是力学体系的哈密顿形式 (正则形式) 的量子对应. 量子力学认为, 力学量是由线性厄米算子表示. 测量这力学量的值是这个算子的本征值 (实数), 而测量结果由当时的态矢量 (Hilbert 空间的矢量) 决定. 用记号表示就是

待测力学量：$\hat{A}=\hat{A}^{\dagger}$,
状态矢量：$|\psi\rangle$　($\lambda|\psi\rangle$ 也对应同一状态).

测量 $\hat{A}$ 只能得到它的本征值, 对一般的态矢量, 取哪个本征值是不能预先确定的, 确定了态矢量只能给出测得的平均值：

$$\langle\hat{A}\rangle=\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle. \tag{2.1.1}$$

当态矢量处在 $\hat{A}$ 的本征态时有：$\hat{A}|a_i\rangle=a_i|a_i\rangle$, 测到的平均值就是本征值,

$$\langle a_i|\hat{A}|a_i\rangle/\langle a_i|a_i\rangle=a_i.$$

线性厄米算子的本征态是完备的, 而且可以正交化. 如果一个态可以写成 $|\psi\rangle=\sum\limits_i f_i|a_i\rangle$, 其中 $\{|a_i\rangle\}$ 是正交归一的, $|\psi\rangle$ 是归一的, 测得的值为 a_i 的概率为

$$\rho_i=|f_i|^2=|\langle a_i|\psi\rangle|^2,$$

满足

$$\begin{aligned}\sum_i\rho_i&=\sum_i\langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle\\&=\langle\psi|\psi\rangle=1.\end{aligned}$$

这是由于线性厄米算子的本征态是完备的, 而且已经正交化了.

以下我们认为 $|\psi\rangle$ 总是归一化了的：$\langle\psi|\psi\rangle=1$.

我们现在把 p, q 当作算符 (因此它们的函数也是算符), 定义对易子

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \tag{2.1.2}$$

然后把力学量之间的泊松括号与对易子作对应

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{A}, \hat{B}]. \tag{2.1.3}$$

例如, 我们可以把广义坐标和广义动量对应于算子 (它作用于 q 的函数上) $q_j \to \hat{q}_j$, $p_j \to \hat{p_j} = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\dfrac{\partial}{\partial q_j}$, 就可以保证基本泊松括号. 这就是正则量子化的量子化对应. 我们之所以能这样做, 是因为泊松括号与对易子满足同样的代数关系 (1.1.11) 式:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \longrightarrow \quad \left[q_k, \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial q_j}\right] = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{kj} = \mathrm{i}\hbar\delta_{kj} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{q}_k, \hat{p}_j] = \delta_{kj}. \tag{2.1.4}$$

把哈密顿量对应为 $H(q,p) \to \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ (注意, 这时 $\hat{p}, \hat{q}$ 是 $t=0$ 时的动力学量). 这样, 动力学方程就对应为 (A 不显含时间时)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t) = \{A, H\} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{A}(t), \hat{H}]. \tag{2.1.5}$$

因而就有

$$\hat{A}(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}. \tag{2.1.6}$$

由于有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{H} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{H}, \hat{H}] = 0$, $\hat{H}$ 不随时间改变.

$$\hat{H}(q,p) = \hat{H}(t=0) = \hat{H}(t) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{H}(q(0), p(0))\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t} = \hat{H}(q(t), p(t)). \tag{2.1.7}$$

在场论的情况下, 我们把场量和动量密度变为算子 $\phi(x) \to \hat{\phi}(x)$, $\pi(x) \to \hat{\pi}(x)$, 把基本泊松括号变为基本对易关系 (这些算子的时间都相同)

$$\{\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,'), \quad \{\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x}\,')\} = \{\pi(\vec{x}), \pi(\vec{x}\,')\} = 0,$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}\,')] = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,'), \quad \cdots$$

就完成了正则量子化 (由于 ϕ 和 π 的时间都相同, 我们也可以用三维矢量 $\vec{x}, \vec{x}'$ 标记它们).

这只要取

$$\hat{\pi}(\vec{x}\,') = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x}\,')} \tag{2.1.8}$$

就可以了.

这样, 场方程就可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}(\vec{x},t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{\phi}(\vec{x},t),\hat{H}],\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\pi}(\vec{x},t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{\pi}(\vec{x},t),\hat{H}]. \tag{2.1.9}$$

这些就是场的正则量子化方法.

以上我们量子化是在海森伯绘景中：力学量在动力学过程中是随时间改变的. 对于一个具体的物理系统, 它的态矢量 $|\psi_0\rangle$ 是不随时间改变的： $|\psi(t)_H\rangle=|\psi_0\rangle$, 而测量力学量的结果

$$\langle\psi_H(t)|\hat{A}_H(t)|\psi_H(t)\rangle=\langle\psi_0|\hat{A}_H(t)|\psi_0\rangle \tag{2.1.10}$$

是通过 $\hat{A}$ 随时间的改变而变的. 在 $\hat{A}$ 不显含时间时有

$$\hat{A}_H(t)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}, \tag{2.1.11}$$

$$\langle\psi_0|\hat{A}_H(t)|\psi_0\rangle=\langle\psi_0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle. \tag{2.1.12}$$

我们可以令 $|\psi_S(t)\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle$, 并从另外一个角度考虑问题, 认为态矢量是随时间改变的,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_S(t)\rangle\ &=\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle=-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}|\psi_S(t)\rangle,\\ &\Longrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_S(t)\rangle=\hat{H}|\psi_S(t)\rangle.\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

而力学量 $\hat{A}_S(t)=\hat{A}(0)$ 不随时间改变, 这就是薛定谔绘景. 这样, 力学量在一个物理过程中平均值随时间的变化与海森伯绘景相同,

$$A(t)=\langle\psi_S(t)|\hat{A}_S(t)|\psi_S(t)\rangle=(\langle\psi_0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t})\hat{A}(0)(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle), \tag{2.1.14}$$

与 (2.1.12) 式相同.

为了计算方便, 有时我们还引入 “相互作用表象”. 令 $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_1$, 令波矢量和力学量分别为 $|\psi_I(t)\rangle$ 和 $\hat{A}_I(t)$, 满足

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}_I(t)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\hat{A}_I(t),\hat{H}_0],\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_I(t)\rangle=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\hat{H}_1(t)_I|\psi_I(t)\rangle.\end{aligned}\right. \tag{2.1.15}$$

第一个方程的解为

$$\hat{A}_I(t)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0t}, \tag{2.1.16}$$

从而

$$\hat{H}_0(t)_I = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{H}_0(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t} = \hat{H}_0(0) \quad \text{不变}.$$

而由

$$\hat{H}_1(t)_I = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{H}_1(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t} \tag{2.1.17}$$

得到

$$|\psi_I(t)\rangle = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_0+\hat{H}_1)t}|\psi_0\rangle = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H} t}|\psi_0\rangle. \tag{2.1.18}$$

因此, 力学量平均值

$$\begin{aligned}\langle\psi_I(t)|\hat{A}_I(t)|\psi_I(t)\rangle &= (\langle\psi_0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_0+\hat{H}_1)t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\hat{H}_0+\hat{H}_1)t}|\psi_0\rangle) \\ &= \langle\psi_0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle\end{aligned}$$

与原来一样. 在 (2.1.18) 式中 $\hat{H}_1$ 和 $\hat{H}$ 都是指 $t=0$ 时的量.

可以由 (2.1.16) 式、(2.1.18) 式验证 (2.1.15) 式, 比如由 (2.1.18) 式得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi_I(t)\rangle &= \left[(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_0\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}) - (\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(H_0+H_1)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t})\right]|\psi_0\rangle \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(-H_1)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}H_1\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_0\rangle \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H_1(t)_I|\psi_I(t)\rangle.\end{aligned}$$

从前面的讨论可以看到, 这一切的关键是知道演化算符$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$ 的性质, 也就是它在两个态之间的矩阵元

$$\langle a|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|b\rangle = S_{ab}(t), \tag{2.1.19}$$

其中, $\langle a|$ 和 $|b\rangle$ 是某种给定的态 (在场论中, 它们往往是 $\hat{H}_0$ 的本征态). 有了 (2.1.19) 式的完全知识, 就可以计算在一个过程中任意力学量的平均值随时间的变化. 比如初始状态是 $|\psi_s(t_0)\rangle$, 终末状态是 $|\psi_s(t)\rangle$, 则可以用完备基矢 $\sum\limits_i |a_i\rangle\langle a_i| = 1$ 来展开, 得到

$$\langle a_j|\psi_s(t)\rangle = \langle a_j|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|b_k\rangle\langle b_k|\psi_s(t_0)\rangle = \overbrace{S_{a_j b_k}(t)}^{\text{关键}}\underbrace{\langle b_k|\psi_s(t_0)\rangle}_{\text{已知}}.$$

还可以从另一角度说这个问题. 比如已知在 t_0 时的信息 $\langle\psi_0|a_i\rangle\langle a_i|\psi_0\rangle = |\langle a_i|\psi_0\rangle|^2$ 是测量力学量 A 的本征值为 a_i 的概率 (假如还知道它们的相因子). 如果想知道在 t 时刻测量 B 的情况, 考虑到

$$\langle\psi_0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|b_j\rangle\langle b_j|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi_0\rangle \quad (\text{对 } j \text{ 不求和})$$

是在 t 时刻测 B 得本征值为 b_j 的概率, 只要知道 $\langle b_j|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|a_i\rangle$ 就够了, 这是因为有

$$\langle b_j|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}|\psi_0\rangle = \langle b_j|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}\sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\psi_0\rangle = S_{b_j a_i}(t-t_0)\langle a_i|\psi_0\rangle.$$

2.2　费恩曼路径积分量子化

费恩曼由正则量子化方法导出路径积分量子化, 这是另一种量子化方法. 这种新方法的优点是它有很好的经典图像：路径积分被积函数中的量都是经典量, 因此便于由经典对易量的计算方法导出量子体系的相应结果.

(1) 由前面的分析我们知道, 量子体系中计算的关键是要算演化矩阵元 $S_{ba} = \langle b|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}|a\rangle$, 而这只要算出在 q 表象的矩阵元 $\langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}|q\rangle$ 就可以了, 这里态矢量 $|q\rangle, \langle q'|$ 是 $\hat{q}(0)$ 的本征态. 这是因为

$$\begin{aligned}
&\langle b|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}|a\rangle \\
=&\langle b|\int \mathrm{d}q'|q'\rangle\langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}\int \mathrm{d}q|q\rangle\langle q|a\rangle \\
=&\int \mathrm{d}q'\mathrm{d}q\langle b|q'\rangle\langle q|a\rangle\langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}|q\rangle.
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

以下证明

$$\langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}|q\rangle = \langle q', t_2|q, t_1\rangle, \tag{2.2.2}$$

其中, $|q,t\rangle \equiv \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle$ 是 $\hat{q}(t)$ 的本征值为 q 的本征矢.

证明　由 $\hat{q}(0)|q\rangle = q|q\rangle$, 有

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\hat{q}(0)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}q|q\rangle = q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle, \\
\Longrightarrow\quad &\hat{q}(t)(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle) = q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle.
\end{aligned}$$

所以 $|q,t\rangle \equiv \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t}|q\rangle$ 是 $\hat{q}(t)$ 的以 q 为本征值的本征矢. 由定义有

$$\langle q', t_2|q, t_1\rangle = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_2}|q'\rangle\right)^\dagger\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_1}|q\rangle\right) = \langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_2-t_1)}|q\rangle.$$

为导出费恩曼路径积分, 我们首先计算在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 很小时

$$\langle q', t_2|q, t_1\rangle = \langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\Delta t}|q\rangle = \langle q'|\int \mathrm{d}p|p\rangle\langle p|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\Delta t}|q\rangle$$

的值. 我们有

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}pq}, \quad \hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q}).$$

当 Δt 很小时得到

$$\langle p|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}\Delta t}|q\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(p,q)\Delta t}\langle p|q\rangle.$$

由此得到

$$\begin{aligned}\langle q', t_2|q, t_1\rangle &= \int \mathrm{d}p\langle q'|p\rangle\langle p|q\rangle\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(p,q)\Delta t}\\ &= \int \mathrm{d}p\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(q'-q)p}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(p,q)\Delta t}\\ &= \int \mathrm{d}p\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[H(p,q)-\frac{q'-q}{\Delta t}p\right]\Delta t}.\end{aligned}$$

令 $\dfrac{q'-q}{\Delta t} = \dot{q}$, 此式可以写成

$$\langle q', t_2|q, t_1\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[H(p,q)-\dot{q}p]\Delta t}. \tag{2.2.3}$$

得到

$$\begin{aligned}\langle q', T_2|q, T_1\rangle =& \langle q', T_2|\int \mathrm{d}q_n|q_n, T_2-\Delta t\rangle\langle|q_n, T_2-\Delta t|\cdots\int \mathrm{d}q_2|q_2, T_1+2\Delta t\rangle\\ &\langle q_2, T_1+2\Delta t|\int \mathrm{d}q_1|q_1, T_1-\Delta t\rangle\langle q_1, T_1+\Delta t|q, T_1\rangle\\ =& \int \mathrm{d}q_n\cdots\mathrm{d}q_1\int\frac{\mathrm{d}p_{n+1}}{2\pi\hbar}\cdots\frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi\hbar}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sum_{j=1}^{n+1}[H(p_j,q_{j-1})-\frac{q_j-q_{j-1}}{\Delta t}p_j]\Delta t}\\ \equiv& N_0\int \mathscr{D}q\mathscr{D}p\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}t\tilde{L}(p,q,\dot{q})}.\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

其中, $\tilde{L}(p,q,\dot{q}) = p\dot{q} - H(p,q)$ 是 $q, \dot{q}$ 和 p 的函数, 这就是费恩曼路径积分公式最普遍的情形.

注意：作为算子, 在以上表达式中, 我们要求 $[\hat{q},\hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$. 我们讨论的是在此前提之下态矢量在演化算子 $\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H(\hat{p},\hat{q})t}$ 的作用下演化问题.

(2) 当哈密顿量为 $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(q)$ 时, 对 p 的积分可以积出

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha p^2+\beta p)} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\left[p^2+2\frac{\beta}{2\alpha}p+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right]}\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\left(p+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{i}\alpha}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta^2}{4\alpha}}.\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

在 (2.2.3) 式中, $\alpha = +\dfrac{1}{2m\hbar}\Delta t,\ \beta = -\dfrac{1}{\hbar}\Delta t\dot{q}$.

我们得到

$$\begin{aligned}\langle q', t+\Delta t|q, t\rangle &= \int\frac{\mathrm{d}p}{2\pi\hbar}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2m}+V(q)-\dot{q}p\right]\Delta t} = \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{\Delta t\mathrm{i}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\dot{q}^2\Delta t/\hbar^2}{4\frac{1}{2m\hbar}}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}V(q)\Delta t}\\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t\mathrm{i}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)\right]\Delta t} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t\mathrm{i}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}L(q,\dot{q})\Delta t},\end{aligned}$$

其中, 拉格朗日量为

$$L(q,\dot{q})=\frac{m}{2}\dot{q}^2-V(q)=\frac{m}{2}((q'-q)/\Delta t)^2-V(q). \tag{2.2.6}$$

由此给出

$$\begin{aligned}
&\langle q',T_2|q,T_1\rangle\\
=&\langle q',T_2|\int \mathrm{d}q_n|q_n,T_2-\Delta t\rangle\langle q_n,T_2-\Delta t|\cdots\int \mathrm{d}q_2|q_2,T_1+2\Delta t\rangle\langle q_2,T_1+2\Delta t|\\
&\times\int \mathrm{d}q_1|q_1,T_1+\Delta t\rangle\langle q_1,T_1+\Delta t|q,T_1\rangle\\
=&\int \mathrm{d}q_n\cdots \mathrm{d}q_1\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t\mathrm{i}}}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(L(q_n,\dot{q}_n)\Delta t+\cdots+L(q_1,\dot{q}_1)\Delta t+L(q,\dot{q})\Delta t)}\\
=&\int \mathrm{d}q_n\cdots \mathrm{d}q_1\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t\mathrm{i}}}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{T_1}^{T_2}L(q,\dot{q})\mathrm{d}t\Big|_{q(t=T_1)=q}^{q(t=T_2)=q'}}\\
=&\int\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\Delta t\mathrm{i}}}\right)^{n+1}\prod_{j=1}^{n}\mathrm{d}q_j\cdot\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}\\
\equiv& N\int\mathscr{D}q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}.
\end{aligned}$$

这就是用拉格朗日函数表达的费恩曼路径积分. 我们可以把它的适用条件放宽到 H 是正则动量的二次多项式. 这些结论在多个变量 $\{q_i\}$ 的体系也正确.

由 (2.2.2) 式我们得到

$$\langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(T_2-T_1)}|q\rangle=N\int\mathscr{D}q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S} \tag{2.2.7}$$

请注意 (2.2.7) 式与 (2.2.4) 式的区别. 在 (2.2.4) 式中 $\widetilde{L}$ 是 p,q 和 $\dot{q}$ 的函数, 而且使用范围不受 H 是 p 的二次式的限制.

(3) 考虑

$$A=\langle q',T_2|\hat{A}_1(t_a)\hat{A}_2(t_b)\hat{A}_3(t_c)|q,T_1\rangle,\quad t_a>t_b>t_c. \tag{2.2.8}$$

由 (2.1.11) 式和 (2.2.2) 式得

$$\begin{aligned}
A=&\langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}T_2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_a}\hat{A}_1\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_a}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_b}\hat{A}_2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_b}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_c}\hat{A}_3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_c}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}T_1}|q\rangle\\
=&\langle q'|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(T_2-t_a)}\hat{A}_1\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_a-t_b)}\hat{A}_2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_b-t_c)}\hat{A}_3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_c-T_1)}|q\rangle.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

与前面推导类似, 我们可以将时间分割为许多小区间, 中间插上 $\int\mathrm{d}q|q\rangle\langle q|$, 当 A_1, A_2,

A_3 只是 q 的函数时, 由 $\hat{A}_j|q\rangle = A_j(q)|q\rangle$, 导出

$$\begin{aligned}A=&\int\prod_{l=1}^{n}\mathrm{d}q_l\left(\sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{\Delta t\mathrm{i}}}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{ta}^{T_2}L\mathrm{d}t}A_1(q_{t_a})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_b}^{ta}L\mathrm{d}t}A_2(q_{t_b})\\&\times\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{tc}^{t_b}L\mathrm{d}t}A_3(q_{t_c})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{T_1}^{tc}L\mathrm{d}t}\\=&\left(\sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{\Delta t\mathrm{i}}}\right)^{n+1}\int\prod\mathrm{d}q_l\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}A_1(q_{t_a})A_2(q_{t_b})A_3(q_{t_c})\\=&N\int\mathscr{D}q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}A_1(q_{t_a})A_2(q_{t_b})A_3(q_{t_c}).\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

注意, 这里被积函数中全部是经典量, 但 (2.2.8) 式右边, 即 (2.2.10) 式左边 A 的定义式中的 A_1, A_2, A_3 必须是按时间排列的. 在以上的推导中, 初态和末态是 $\hat{q}(T_1)$ 和 $\hat{q}(T_2)$ 的本征态. 由于它们是完备的, 我们可以用线性叠加计算任何初态和末态之间的路径积分:

$$\begin{aligned}&\langle\psi_1|T\{A_1\cdots A_n\}|\psi_2\rangle\\=&\langle\psi_1|\int\mathrm{d}q'|q',T_2\rangle\langle q',T_2|T\{A_1\cdots A_n\}\int\mathrm{d}q|q,T_1\rangle\langle q,T_1|\psi_2\rangle\\\equiv&N\int\mathscr{D}q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S}A_1\cdots A_n\langle\psi_1|q',T_2\rangle\langle q,T_1|\psi_2\rangle.\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

在这个式子中 $\mathscr{D}q$ 包含对 q' 和 q 的积分.

(4) 对于 $\langle\psi_1|$ 和 $|\psi_2\rangle$ 是哈密顿量 $\hat{H}$ 的基态的情形, 我们有另外一种方法. 我们把 (2.2.9) 式中的 $\langle q'|$ 和 $|q\rangle$ 写成 $\hat{H}$ 本征态的叠加,

$$\begin{aligned}\hat{H}|\varOmega_n\rangle&=E_n|\varOmega_n\rangle,\\|q\rangle&=\sum_n C_n|\varOmega_n\rangle,\\\langle q'|&=\sum_m C'_m\langle\varOmega_n|.\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}A=&\sum_{mn}C'_mC_n\langle\varOmega_m|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(T_2-t_a)}\hat{A}_1\cdots\hat{A}_3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t_c-T_1)}|\varOmega_n\rangle\\=&\sum_{mn}C'_mC_n\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_mT_2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_nT_1}\langle\varOmega_m|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_a}\hat{A}_1\cdots\hat{A}_3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_c}|\varOmega_n\rangle.\end{aligned}$$

当 $T_2\to T(1-\mathrm{i}\epsilon)$, $T_1\to -T(1-\mathrm{i}\epsilon)$, $T\to\infty$ 时, $\hat{H}$ 的基态对应项成为主要贡献,

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}A=&C'_0C_0\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_02T(1-\mathrm{i}\epsilon)}\langle\varOmega_0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_a}\hat{A}_1\cdots\hat{A}_3\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t_c}|\varOmega_0\rangle\\=&C'_0C_0\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_02T(1-\mathrm{i}\epsilon)}\langle\varOmega_0|\hat{A}_1(t_a)\cdots\hat{A}_3(t_c)|\varOmega_0\rangle\\\equiv&C'_0C_0\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_02T(1-\mathrm{i}\epsilon)}\langle\hat{A}_1(t_a)\cdots\hat{A}_3(t_c)\rangle\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

给出算子的按时间顺序排列的乘积 (称为编时乘积) 的真空 (基态) 平均值 (也称为算子编时乘积的关联函数). 在这个推导中, 把 $|q\rangle$ 和 $\langle q'|$ 换成一般的其他态矢量, 结果也类似.

以上结果可以推广到 n 个算子的情形. 由此得到

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} N\int \mathscr{D}q\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-T(1-\mathrm{i}\epsilon)}^{T(1-\mathrm{i}\epsilon)}\mathrm{d}tL}\ \Pi_{l=1}^{n}A_l(q(t_l))\\ =&C_0'C_0\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_0 2T(1-\mathrm{i}\epsilon)}\langle T\{\Pi_{l=1}^{n}A_l(q(t_l))\}\rangle\end{aligned}\tag{2.2.13}$$

附录 2.2A　Gauss　积　分

我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=4\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\\ =&\int\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\\ =&\int_0^{\infty}r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\mathrm{e}^{-r^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\cdot 2\pi=\pi(-\mathrm{e}^{-r^2})\Big|_0^{\infty}\\ =&\pi.\end{aligned}$$

令 $w=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$, 则 $w=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

考虑回路 (图 2.2A.1), 其中 $\sqrt{\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

令 $w'=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x$, 有

$$\oint\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=0=\int_1+\int_2+\int_3,$$

$\int_1\to\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=w=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, 因为当 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$时, $|\mathrm{e}^{-z^2}|=\mathrm{e}^{-r^2\cos 2\theta}$, 当 $r\to\infty$ 时 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{e}^{-r^2\cos 2\theta}\to 0, \int_2\to 0.$

$$\int_3 \to -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x\cdot\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)=\int_0^\infty \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\cdot\left(-\sqrt{\mathrm{i}}\right)=-\sqrt{\mathrm{i}}w'$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\mathrm{i}}w'+w=0$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\mathrm{i}},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha\mathrm{i}}},\quad \alpha>0.$$

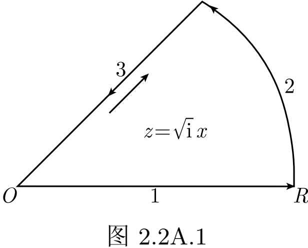


图 2.2A.1

附录 2.2B　费米型力学量的路径积分量子化

令 $\hbar=1$, 考虑由经典到量子的对应

$$\{A,B\}_{\text{poisson}}\to\frac{1}{\mathrm{i}}[A,B]_+\equiv\frac{1}{\mathrm{i}}(AB+BA),$$

因此, 基本力学量的反对易关系为

$$[Q_a,P_b]_+=\mathrm{i}\delta_{ab},\quad [Q_a,Q_b]_+=[P_a,P_b]_+=0,$$
$$Q_a^2=P_a^2=0,\qquad a=1,\cdots,N$$

我们需要构成 $|f\rangle$ 和 $\langle g|$, 然后才能构成 $\langle g|A|f\rangle$. 首先定义真空态 $|0\rangle$ 和 $\langle 0|$, 使它满足

$$Q_a|0\rangle=0,\quad \langle 0|P_a=0$$

对一切 a 成立, 并且 $\langle 0|0\rangle=1$. 然后定义态

$$|a,b,\cdots\rangle\equiv P_aP_b\cdots|0\rangle,$$
$$\langle a,b,\cdots|\equiv\langle 0|\cdots(-\mathrm{i}Q_b)(-\mathrm{i}Q_a),$$

不难证明

$$\langle c,d,\cdots|a,b,\cdots\rangle=\begin{cases}0, & \text{如果集合}\{c,d,\cdots\}\neq\{a,b,\cdots\},\\ \pm1, & \text{如果两个集合相同},(=1,\text{如果}c=a,d=b,\cdots).\end{cases}$$

考虑以上态组成的空间. 显然, P 和 Q 的多项式作用在其上还在此空间中. 我们求 $\{Q_a\}$ 的共同本征态 $|q\rangle$, 要求

$$Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle, \qquad \langle q|Q_a = \langle q|q_a.$$

由于 $Q_aQ_b + Q_bQ_a = 0$, 就要求 $q_aq_b + q_bq_a = 0$, 因此 q_a 不可能是普通的数. 这 q_a, q_b 就是所谓的 Grassmann 数 (G 数), 它们有性质 $xy = -yx$, 即乘法反交换. 这里要引进 $N(a = 1, \cdots, N)$ 种 Grassmann 数. 注意：当 c 是普通复数时, cq_a 和 q_a 是同一种.

进一步要求这种数与算子 Q_a 和 P_a 也反对易, 也就是

$$[q_a, q'_b]_+ = [q_a, Q_b]_+ = [q_a, P_b]_+ = 0.$$

我们来找 Q_a 和 P_a 的左右本征态矢量. 令 $|q\rangle = \exp(-\mathrm{i}\sum_a P_aq_a)|0\rangle$, 则有

$$\begin{aligned}(Q_a - q_a)|q\rangle &= (Q_a - q_a)\exp(-\mathrm{i}P_aq_a)\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a}P_bq_a\right)|0\rangle \\ &= (Q_a - q_a)(1 - \mathrm{i}P_aq_a)\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a}P_bq_a\right)|0\rangle\end{aligned}$$

和

$$Q_a(1 - \mathrm{i}P_aq_a) = (1 - \mathrm{i}P_aq_a)Q_a + q_a, \tag{2.2B.1}$$

以及

$$q_a(1 - \mathrm{i}P_aq_a) = q_a,$$

于是有

$$\begin{aligned}&(Q_a - q_a)(1 - \mathrm{i}P_aq_a)\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a}P_bq_a\right)|0\rangle \\ &= (1 - \mathrm{i}P_aq_a)Q_a\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{b\neq a}P_bq_a\right)|0\rangle = 0,\end{aligned}$$

$|q\rangle$ 的确是本征态.

还可以令

$$\langle q| \equiv \langle 0|(\Pi_aQ_a)\exp\left(-\mathrm{i}\sum_a q_aP_a\right).$$

在这里, $\Pi_aQ_a = Q_1Q_2\cdots Q_N$, 下面约定 $\Pi_aX_a = X_1X_2\cdots X_N$.

我们可以类似地证明 $\langle q|Q_a=\langle q|q_a$, 则

$$\begin{aligned}\langle q'|q\rangle &= \langle 0|(\Pi_a Q_a)\exp\left(\mathrm{i}\sum_b P_b(q'_b-q_b)\right)|0\rangle\\ &= \langle 0|(\Pi_a Q_a)\Pi_b(1+\mathrm{i}P_b(q'_b-q_b))|0\rangle.\end{aligned}$$

利用 (2.2B.1) 式得

$$\langle q'|q\rangle=\Pi_b(q_b-q'_b).$$

我们还可以定义 $|p\rangle$ 和 $\langle p|$:

$$\begin{aligned}|p\rangle &= \exp\left(-\mathrm{i}\sum_a Q_a p_a\right)\Pi_b P_b|0\rangle,\\ \langle p| &= \langle 0|\exp\left(-\mathrm{i}\sum_a p_a Q_a\right).\end{aligned}$$

则由 QP 和 qp 关系的对称性有

$$\langle p'|p\rangle=\Pi_a(p'_a-p_a),\quad P_a|p\rangle=p_a|p\rangle,\quad \langle p|P_a=\langle p|p_a.$$

注意：这些本征态都是 $\langle a,b,\cdots|$ 和 $|a,b,\cdots\rangle$ 这些基本矢量的线性组合, 只是组合系数是 G 数.

另外, $\{p_a\}$ 是另一组 G 数, 又有 N 种.

还可以证明

$$\begin{aligned}\langle q|p\rangle &= \langle q|\exp\left(-\mathrm{i}\sum_a Q_a p_a\right)\Pi_b P_b|0\rangle\\ &= (\Pi_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_a p_a})\langle q|\Pi_b P_b|0\rangle\\ &= (\Pi_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_a p_a})\langle 0|(\Pi_a Q_a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a}\Pi_b P_b|0\rangle\\ &= (\Pi_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_a p_a})\langle 0|(\Pi_a Q_a)\Pi_b P_b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\\ &= (\Pi_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_a p_a})\langle 0|\mathrm{const}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\\ &= (\Pi_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_a p_a})\mathrm{const},\end{aligned}$$

其中

$$\mathrm{const}=(\mathrm{i})^N(-1)^{N(N-1)/2}\equiv\chi_N=\langle 0|(\Pi_a Q_a)(\Pi_a P_a)|0\rangle.$$

所以得

$$\langle q|p\rangle=\chi_N \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_a p_a q_a}. \tag{2.2B.2}$$

类似地有

$$\langle p|q\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a p_a q_a}. \tag{2.2B.3}$$

下面定义 G 数的积分.

定义

$$\int \mathrm{d}\xi_a = 0, \quad \int \mathrm{d}\xi_a \xi_a = 1,$$

对一切 a 都成立. 要求

$$\mathrm{d}\xi_a \mathrm{d}\xi_b + \mathrm{d}\xi_b \mathrm{d}\xi_a = 0, \quad \mathrm{d}\xi_a \xi_b + \xi_b \mathrm{d}\xi_a = 0,$$

$$\int \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_1 f(\xi_1, \xi_2) = \int \mathrm{d}\xi_2 \left[\int \mathrm{d}\xi_1 f(\xi_1, \xi_2)\right].$$

注意 $\xi_a^2 = 0$. 任何 $f(\xi)$ 都是 ξ 的有限次多项式. 在积分时, 如果有一项中含 $\xi_a A_a$(当然 ξ_a 只能有一次), 则 $\int \mathrm{d}\xi_a f(\xi)$ 就取这一项的系数 A_a(其中 $A_a = c\xi_b\xi_c\cdots$),

$$\int \mathrm{d}\xi_a f(\xi) = A_a.$$

当所有的 $\{\xi'_a\}$ 与所有的 $\{\xi_a\}$ 无关时, 有

$$\int \Pi_a \mathrm{d}\xi_a f(\xi + \xi') = \int \Pi_a \mathrm{d}\xi_a f(\xi).$$

当重新组合这些 ξ 的基底, 令 $\zeta_a = \sum_b \alpha_{ab}\xi_b$,($\alpha_{ab}$ 是普通复数) 则有

$$\Pi_a \zeta_a = \det[\alpha_{ab}]\Pi_b \xi_b.$$

其中, $[\alpha_{ab}]$ 是以 α_{ab} 为矩阵元的矩阵.

令 $\int \Pi_a \mathrm{d}\xi_a = \chi \int \Pi_a \mathrm{d}\zeta_a$. 由于

$$\int \Pi_a \mathrm{d}\xi_a (\Pi_b \xi_b) = \det[\alpha_{ab}]^{-1} \int \chi \Pi_a \mathrm{d}\zeta_a (\Pi_b \zeta_b) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}.$$

由 $\chi \det[\alpha_{ab}]^{-1} = 1$ 可以推出 $\chi = \det[\alpha_{ab}]$

$$\Rightarrow \int \Pi_a \mathrm{d}\xi_a = \det[\alpha_{ab}] \int \Pi_a \mathrm{d}\zeta_a,$$

这与普通数不同.

可以证明 (见 34 页 “附注”), 对于任何态

$$|f\rangle = C_0|0\rangle + \sum_a C_a|a\rangle + \sum_{a\neq b} C_{ab}|a,b\rangle + \cdots$$

当 $C_0, C_a, C_{ab}, \cdots$ 都是普通复数时, 我们有

$$\int \Pi_a \mathrm{d}q_a |q\rangle\langle q|f\rangle = (-1)^N |f\rangle, \tag{2.2B.4}$$

$$\int \Pi_a \mathrm{d}p_a |p\rangle\langle p|f\rangle = (-1)^N |f\rangle. \tag{2.2B.5}$$

由于场论中的入射态矢量 $|\psi_0\rangle$ 都是由产生算符 (相当于 P_a) 作用于真空态上得到的. 而中间的态矢量 $|f\rangle = \exp[-\mathrm{i}Ht]|\psi_0\rangle$, H 中不含 G 数. 所以这两个公式的前提都满足.

令

$$\begin{aligned}
Q_a(t) &\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} Q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},\\
P_a(t) &\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} P_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},\\
|q,t\rangle &\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|q\rangle, \quad |p,t\rangle \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|p\rangle,\\
\langle q,t| &\equiv \langle q|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}, \quad \langle p,t| \equiv \langle p|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},
\end{aligned}$$

我们同样有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_a(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[Q_a, H], \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(t) = 0.$$

注意这里 $[Q_a, H] = Q_a H - H Q_a$, 即 H 应该是偶的算子, 也就是由偶数个费米型算子 Q 或 P 乘起来组成. 由于

$$\int |q,t\rangle\langle q,t|\Pi \mathrm{d}q(-1)^N = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\int |q\rangle\langle q|\Pi \mathrm{d}q(-1)^N \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} = 1,$$

所以 $|q,t\rangle$ 也是完备的, 正交归一的, $|p,t\rangle$ 也类似.

以下可以完全按照玻色子的情形, 得到

$$\begin{aligned}
\langle q', \tau + \mathrm{d}\tau | q, \tau\rangle &= \langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\mathrm{d}\tau}|q\rangle,\\
\langle q|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(Q,P)\mathrm{d}\tau}|p\rangle &= \langle q|p\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(q,p)\mathrm{d}\tau}.
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
\langle q', \tau + \mathrm{d}\tau | q, \tau\rangle &= \langle q'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\mathrm{d}\tau}\int |p\rangle\langle p|\Pi_a \mathrm{d}p_a|q\rangle(\pm 1)\\
&= \int \langle q'|p\rangle\langle p|q\rangle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H\mathrm{d}\tau}\Pi_a \mathrm{d}p_a(\pm 1).
\end{aligned}$$

由 (2.2B.2) 式和 (2.2B.3) 式, 得

$$\langle q', \tau + \mathrm{d}\tau | q, \tau \rangle = \chi_N \int \Pi_a \mathrm{d}p_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_a p_a(q'_a - q_a) - \mathrm{i}H(p,q)\mathrm{d}\tau}.$$

给出

$$\begin{aligned}
&\langle q', t' | T\{O_A(P(t_A)Q(t_A)), O_B(P(t_B)Q(t_B)), \cdots\} | q, t\rangle \\
=&\text{const} \int_{q_a(t)=q_a, q_a(t')=q'_a} \Pi_{a,\tau} \mathrm{d}q_a(\tau)\mathrm{d}p_a(\tau) O_A(P(t_A)Q(t_A)), O_B(P(t_B)Q(t_B)), \cdots \\
&\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\int_t^{t'} \mathrm{d}\tau \{\sum_a p_a \dot{q}_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))\}}.
\end{aligned}$$

注意：在电子场的研究中, $\sum\limits_a p_a \dot{q}_a - H(pq)$ 就等于拉格朗日量.

附注　要用费米型力学量作费恩曼路径积分, 我们要 3 个条件.

(1) 找到 P_a, Q_a 的本征态 $|p\rangle, |q\rangle, \langle p|, \langle q|$, 使

$$\begin{aligned}
P_a|p\rangle = p_a|p\rangle, &\quad \langle p|P_a = \langle p|p_a, \\
Q_a|q\rangle = q_a|q\rangle, &\quad \langle q|Q_a = \langle q|q_a,
\end{aligned}$$

这样

$$\langle p|O(\hat{P}_a, \hat{Q}_a)|q\rangle = \langle p|q\rangle O(p_a, q_a)$$

就可以将力学量, 比如哈密顿量变为经典量.

(2) 证明这样的本征态集合是完备的：$\int \mathrm{d}q|q\rangle\langle q| = \int \mathrm{d}p|p\rangle\langle p| = 1$.

(3) 求得 $\langle p|q\rangle$ 和 $\langle q|p\rangle$.

它们具有形式

$$\begin{aligned}
\langle q|p\rangle &= \text{const } \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot q} \\
\langle p|q\rangle &= \text{const } \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot q}
\end{aligned}$$

就可以保证求出的路径积分形式与玻色型算子的一致.

我们已经具体证明了 (1), (3) 两个条件是可以实现的, 现在证明第 (2) 个条件即完备性, 考虑一个态 $|b, c, d, \cdots\rangle$

$$\begin{aligned}
&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a |q\rangle\langle q|b, c, d, \cdots\rangle \\
=&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\langle 0|(\Pi_a Q_a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a} \cdots \overbrace{P_b P_c P_d \cdots}^{l\text{个}} |0\rangle,
\end{aligned}$$

将 $P_b P_c P_d \cdots$ 左移, 越过 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a}$(它们可以交换), 则

$$
\begin{aligned}
&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a|q\rangle\langle q|b,c,d,\cdots\rangle \\
=&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\langle 0|(\Pi_a Q_a)P_b P_c P_d\cdots \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a}|0\rangle,
\end{aligned}
$$

再将 $P_b P_c P_d \cdots$ 左移, 越过 $\Pi_a Q_a$, 则

$$
\begin{aligned}
\Pi_a Q_a P_b P_c P_d \cdots =& (-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l \Pi_{a\neq b,c,d\cdots} Q_a + (-1)^{N_1} P_b (\mathrm{i})^{l-1}\Pi_{a\neq c,d\cdots} Q_a + \cdots \\
&+(-1)^{N_2} P_b P_c (\mathrm{i})^{l-2}\Pi_{a\neq d\cdots} Q_a + \cdots \\
N_0 =& N-b+N-c+\cdots = lN-(b+c+\cdots),
\end{aligned}
$$

除第一项外, 其余到达真空 $\langle 0|$ 都变为 0, 我们得到

$$
\begin{aligned}
A \equiv &\int \Pi_a \mathrm{d}q_a|q\rangle\langle q|b,c,d,\cdots\rangle \\
=&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\langle 0|\Pi_{a\neq b,c,d\cdots} Q_a \overbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a}|0\rangle}^{|-q\rangle}(-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l \\
=&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\langle 0|\Pi_{a\neq b,c,d\cdots}(-q_a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a}|0\rangle(-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l \\
=&\cdots\langle 0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a q_a P_a}\Pi_{a\neq b,c,d}(-q_a)|0\rangle\cdots \\
=&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle\langle 0|\Pi_{a\neq b,c,d\cdots} q_a|0\rangle(-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l(-1)^{N-l} \\
=&\int \Pi_a \mathrm{d}q_a \Pi_{a\neq b,c,d\cdots} q_a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sum_a P_a q_a}|0\rangle(-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l(-1)^{N-l}.
\end{aligned}
$$

由于 $\mathrm{d}q_a$ 和 q_a 必须成对, 积分才非零, 我们得到

$$
\begin{aligned}
A =& \int \Pi_a \mathrm{d}q_a \Pi_{a\neq b,c,d\cdots} q_a \Pi_{a=b,c,d\cdots}(-\mathrm{i}P_a q_a)|0\rangle(-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l(-1)^{N-l} \\
=&(-1)^{-lN+(b+c+\cdots)}\int \Pi_{a=b,c\cdots}\mathrm{d}q_a \Pi_{a=b,c,\cdots}(-\mathrm{i}P_a q_a)|0\rangle(-1)^{N_0}(\mathrm{i})^l(-1)^{N-l} \\
=&(-1)^{-N_0}\int \Pi_{a=b,c\cdots}\mathrm{d}q_a \Pi_{a=b,c}(-\mathrm{i}P_a q_a)|0\rangle(\mathrm{i})^l(-1)^{N_0}(-1)^{N-l} \\
=&(-1)\int \cdots \mathrm{d}q_c \mathrm{d}q_b (-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} q_b q_c \cdots P_b P_c \cdots (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}}|0\rangle(-1)^{N-l} \\
=&(-1)^{+\frac{l(l-1)}{2}+\frac{l(l+1)}{2}+N-l}|b,c,\cdots\rangle \\
=&(-1)^N|b,c,\cdots\rangle.
\end{aligned}
$$

最后我们证明了

$$
\int \Pi_a \mathrm{d}q_a|q\rangle\langle q| = (-1)^N,
$$

其余的证明类此.

若 $\zeta_a=\sum_b C_{ab}\xi_b$, 则 $\Pi_a\zeta_a=\Pi_a(\sum_b C_{ab}\xi_b)$, 右边只有 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_N$ 的项存在, 其余一定有 ξ_i^2, 因而为 0. 这些项是

$$\begin{aligned}&\{C_{11}C_{22}\cdots C_{NN}+(-1)C_{12}C_{21}\cdots C_{NN}+\cdots+C_{1i_1}C_{2i_2}C_{3i_3}\cdots C_{Ni_N}(-1)^P\}\Pi_a\xi_a\\=&\det|C_{ab}|\Pi_a\xi_a.\end{aligned}$$

这里置换群元 P 是

$$P=P\begin{pmatrix}1&2&\cdots&N\\i_1&i_2&\cdots&i_N\end{pmatrix},$$

积分要求

$$\begin{aligned}&\int\Pi_a\mathrm{d}\zeta_a\Pi_a\zeta_a=(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}=\int\Pi_a\mathrm{d}\zeta_a\det(C)\Pi_a\xi_a\\=&\int\chi\Pi_a\mathrm{d}\xi_a\det(C)\Pi_a\xi_a=\chi\det(C)(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\Longrightarrow\chi\det(C)=1,\end{aligned}$$

于是 $\chi=\det(C)^{-1}$, 即

$$\Pi_a\mathrm{d}\zeta_a=\det(C)^{-1}\Pi_a\mathrm{d}\xi_a.$$

这与玻色型不同, 玻色型是

$$\Pi_a\mathrm{d}\zeta_a=\det\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right)\Pi_a\mathrm{d}\xi_a=\det(C)\Pi_a\mathrm{d}\xi_a.$$

考虑

$$\int\mathrm{d}\xi_a f(\xi_1+\xi_1',\xi_2+\xi_2',\cdots,\xi_a+\xi_a',\cdots),$$

其中, $\xi_1'\cdots$ 与 ξ_a 不相关, 即 $\int\mathrm{d}\xi_a\xi_i'=0$, 由于 $f=(\xi_a+\xi_a')g(\xi_i+\xi_i')|_{i\neq a}+h(\xi_i+\xi_i')$, 所以

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}\xi_a f(\xi_1+\xi_1',\xi_2+\xi_2',\cdots,\xi_a+\xi_a',\cdots)\\=&\int\mathrm{d}\xi_a(\xi_a+\xi_a')g+\int\mathrm{d}\xi_a h\\=&g+0+0=\int\mathrm{d}\xi_a f(\xi_1+\xi_1',\xi_2+\xi_2',\cdots,\xi_a,\cdots)\end{aligned}$$

与 ξ_a' 无关.

当取全部积分时, 有

$$\int\Pi_a\mathrm{d}\xi_a f(\xi+\xi')=\int\Pi_a\mathrm{d}\xi_a f(\xi).$$

(如果 ξ' 与 ξ_i 都无关) 也就是说, 费米型积分相当于玻色型上下限是 $\pm\infty$ 的积分.

2.3　量子场方程

在本节我们用路径积分推导量子场方程. 考虑场的一个任意变更, $\phi \to \phi + \delta\phi$, 其中 $\delta\phi$ 与 ϕ 无关. 这时由含力学量的费恩曼路径积分公式得

$$\begin{aligned}\langle T\{\hat{A}_1 \cdots \hat{A}_n\}\rangle &= N\int \mathscr{D}\phi A_1(\phi)\cdots A_n(\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]} \\ &= N\int \mathscr{D}(\phi+\delta\phi)A_1(\phi+\delta\phi)\cdots A_n(\phi+\delta\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi+\delta\phi]}.\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

这里第二个等式是因为只是换了积分变元 $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi$ 而已, 积分应该不变. 我们得到

$$\begin{aligned}\text{(2.3.1) 式右边} &= N\int \mathscr{D}\phi(A_1+\delta A_1)\cdots(A_n+\delta A_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(S+\delta S)} \\ &= N\int \mathscr{D}\phi(A_1\cdots A_n + \delta A_1 A_2\cdots + A_1\delta A_2\cdots + \cdots)(1+\mathrm{i}\delta S)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} \\ &= N\int \mathscr{D}\phi A_1\cdots A_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}S} \\ &\quad + N\int \mathscr{D}\phi(\delta A_1 A_2\cdots A_n + \cdots + A_1\cdots\delta A_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} \\ &\quad + N\int \mathscr{D}\phi A_1\cdots A_n(\mathrm{i}\delta S)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}.\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

(2.3.2) 式第一项与 (2.3.1) 式左边相同, 因此 (2.3.2) 式后两项之和为

$$N\int \mathscr{D}\phi(\delta A_1 A_2\cdots A_n + \cdots + A_1\cdots\delta A_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} + N\int \mathscr{D}\phi A_1\cdots A_n(\mathrm{i}\delta S)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} = 0.$$

当在所有的 A_j 所在地 $\delta\phi = 0$ 时, 我们得到

$$N\int \mathscr{D}\phi A_1\cdots A_n(\mathrm{i}\delta S)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} = \langle T\{\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n \mathrm{i}\delta S\}\rangle = 0. \tag{2.3.3}$$

而 S 的变更为

$$\delta S = N\int \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right)\delta\phi\mathrm{d}^4x + \oint_{\partial V}\mathrm{d}\sigma_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi.$$

由于 $\delta\phi$ 是任意的, 使等式

$$\left\langle T\left\{\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right)\right\}\right\rangle = 0 \tag{2.3.4}$$

当 $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu}$ 的时空点与 $A_1 \cdots A_n$ 的时空点不重合时, 恒成立. 因此, 算子的等式

$$\widehat{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu}} = 0$$

在这样的点成立. 这就是量子的欧拉–拉格朗日方程.

2.4　量子 Noether 定理与 Ward 恒等式

在这一小节, 我们用路径积分方法推导量子形式的 Noether 定理与 Ward 恒等式. Ward 恒等式给出在对称变换下力学量的变更与能动量张量之间的关系. 由经典 Noether 定理的推导, 我们知道当存在一种变换 $\delta_0 \phi$ 及 j^μ, 使

$$\delta S = \int_V \mathrm{d}\tau \mathscr{L}(\phi + \delta_0 \phi) - \int_V \mathrm{d}\tau \mathscr{L}(\phi) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}\sigma_\mu j^\mu \tag{2.4.1}$$

对任意 V 总是成立时, 我们称这是一种对称变换. 考虑时空的任意区域 $V_2 \supset V_1$, $V_2 - V_1$ 是一个狭窄的窄带 (薄壳), 见图 2.4.1. 我们令 $\delta\phi = \alpha \delta_o \phi$, 其中 α 是在 V_2 外为 0, V_1 内为 1, 在 V_1 和 V_2 之间的窄带中光滑地变化.

这时在全空间有 $(\mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}^4 x)$

$$\delta S = \int_{V_2外} \mathrm{d}\tau \delta \mathscr{L} + \int_{V_2 - V_1} \mathrm{d}\tau \delta \mathscr{L} + \int_{V_1内} \mathrm{d}\tau \delta \mathscr{L} \tag{2.4.2}$$

其中, 第一项为 0, 第三项 $= \oint_{\partial V_1} \mathrm{d}\sigma_\mu j^\mu$, 第二项为

$$\int_{V_2 - V_1} \mathrm{d}\tau \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu} \right) \delta\phi + \oint_{\partial(V_2 - V_1)} \mathrm{d}\sigma_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_\mu} \delta\phi = (A) + (B). \tag{2.4.3}$$

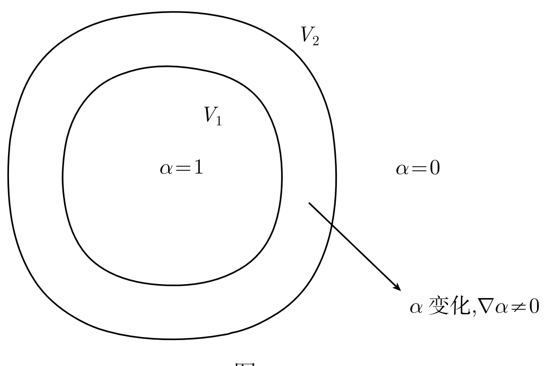


图 2.4.1

现在我们分析第二项中的第一部分

$$(A)=\int_{V_2-V_1}\mathrm{d}\tau\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right)\delta\phi.$$

考虑当 V_2-V_1 的厚度 $\lambda\to 0$, 由于 $\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\right)$ 是有限量, 与 $\delta\phi$ 无关, 而当 $\lambda\to 0$ 时, $\delta\phi$ 的数量级不变, 因此可以忽略这一项的贡献. 我们得到

$$\int_{V_2-V_1}\mathrm{d}\tau\delta\mathscr{L}\longrightarrow\oint_{\partial(V_2-V_1)}\mathrm{d}\sigma_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta\phi\right)=-\oint_{\partial V_1}\mathrm{d}\sigma_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_0\phi. \tag{2.4.4}$$

由 (2.4.2) 式和 (2.4.4) 式给出

$$\delta S=\oint_{\partial V_1}\mathrm{d}\sigma_\mu\left(j^\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_0\phi\right).$$

含有力学量的费恩曼路径积分公式给出

$$\begin{aligned}\langle T\{\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n\}\rangle&=N\int\mathscr{D}\phi A_1(\phi)\cdots A_n(\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}\\&=N\int\mathscr{D}(\phi+\delta\phi)A_1(\phi+\delta\phi)\cdots A_n(\phi+\delta\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi+\delta\phi]},\end{aligned}$$

在 $\mathscr{D}(\phi+\delta\phi)=\mathscr{D}\phi$ 时 (由于 $\delta_0\phi$ 可能与 ϕ 有关, 所以这个条件需另加), 得到

$$\begin{aligned}\langle T\{\hat{A}_1\cdots\hat{A}_n\}\rangle=&N\int\mathscr{D}\phi A_1(\phi)\cdots A_n(\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}\\&+\sum_i N\int\mathscr{D}\phi A_1(\phi)\cdots\delta A_i\cdots A_n(\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}\\&+N\int\mathscr{D}\phi A_1(\phi)\cdots A_n(\phi)\mathrm{i}\delta S\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}.\end{aligned}$$

其中, 第一项等于 $\langle T\{A_1\cdots A_n\}\rangle$, 因此有

$$N\int\mathscr{D}\phi(\delta A_1A_2\cdots+\cdots)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}+N\int\mathscr{D}\phi A_1\cdots A_n(\mathrm{i}\delta S)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}=0,$$

给出

$$\left\langle\mathrm{i}T\left\{\oint_{\partial V_1}\mathrm{d}\sigma_\mu\left(j^\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\right)A_1\cdots A_n\right\}\right\rangle+\langle T\{\delta A_1A_2\cdots+\cdots+\cdots A_{n-1}\delta A_n\}\rangle=0. \tag{2.4.5}$$

当 V_1 不包含 A_j 时, $\delta A_j=0$; 反之, 当 V_1 包含 A_j 时, δA_j 不为 0. 特别是, 当 V_1 只包含一个 A_j 时, 得到

$$\left\langle\mathrm{i}T\oint_{\partial V_1}\mathrm{d}\sigma_\mu\left(j^\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi\right)A_1\cdots A_n\right\rangle+\langle T\{A_1\cdots\delta A_j\cdots A_n\}\rangle=0.$$

因此, 作为算子有

$$V_1 \underset{\Longrightarrow}{\text{为小局域}} \mathrm{i}T\left\{\oint_{\partial V_1}\mathrm{d}\sigma_\mu\left(\hat{j}^\mu-\widehat{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_o\phi}\right)\hat{A}_j\right\}+\delta\hat{A}_j=0, \tag{2.4.6}$$

这就是 Ward 恒等式.

当 V_1 内不含算子时, 就得到量子 Noether 定理

$$T\left\{\oint_{\partial V_1}\mathrm{d}\sigma_\mu\left(\widehat{j}^\mu-\widehat{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_0\phi}\right)\right\}=0. \tag{2.4.7}$$

因此, Ward 恒等式是 Noether 定理的量子推广.

第 3 章　几种自由量子场

在这一章, 我们研究几种重要的自由场的量子化, 自由场的场方程是线性方程, 满足叠加原理, 因此在量子化后, 可以看成是许多独立粒子的系统.

3.1　狄拉克场 $\left(\text{自旋为 } \dfrac{1}{2} \text{的场}\right)$

我们在本小节介绍狄拉克场. 它是描述电子和其他自旋为 $\dfrac{1}{2}$ 的费米子的场. 首先, 我们复习狄拉克 γ 矩阵和洛伦兹变换。

3.1.1　γ 矩阵和洛伦兹变换

1. 度规张量和 γ 矩阵

令时空的度规张量 g 是对角矩阵, 它的对角元为 $(1,-1,-1,-1)$, 也就是

$$g \equiv [g_{\mu\nu}] = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.1.1}$$

其中, 符号 $[M_{ij}]$ 表示一个以 $\{M_{ij}\}$ 为矩阵元的矩阵.

狄拉克引入四个 γ 矩阵, 它们是 $(i=1,2,3)$

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = -\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.1.3}$$

满足

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ \equiv \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad \gamma^0 {\gamma^\mu}^\dagger \gamma_0 = \gamma^\mu. \tag{3.1.4}$$

由于狄拉克矩阵的反对易关系, 可以证明, 由它们的线性叠加得到的矩阵的平方一定正比于单位矩阵. 这是狄拉克矩阵的最基本性质. 由 $\{\gamma_\mu\}$ 可生成 16 个线性独立的矩阵：

$$
\begin{array}{cc}
\mathbb{I} & 1 \\
\gamma_\mu & 4 \\
\sigma_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -\sigma_{\nu\mu} & 6 \\
\gamma_\mu\gamma_5 & 4 \\
\gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 & 1 \\
\hline
 & 16
\end{array}
\tag{3.1.5}
$$

由 (3.1.4) 式, 我们有

$$
[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_\lambda] = 2\mathrm{i}(g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - g_{\mu\lambda}\gamma_\nu). \tag{3.1.6}
$$

习题　求 $\sigma_{\mu\nu}$ 和 γ_5 的表达式.

2. 洛伦兹变换

令 x^μ 为

$$
x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,
$$

并且令

$$
\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}.
$$

洛伦兹变换是保持闵科夫斯基空间 4-矢量长度不变的坐标变换, 即变换 a: $x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$, 使 $x^t g x$ 是不变量. 因此, 由 $a^\mu{}_\nu = \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ 并且由 g 是对称矩阵, 可以导出

$$
\begin{aligned}
x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu &= x'^\mu g_{\mu\nu} y'^\nu = (a^\mu{}_\lambda x^\lambda) g_{\mu\nu} (a^\nu{}_\rho y^\rho) \\
&= x^\lambda \underbrace{a^\mu{}_\lambda g_{\mu\nu} a^\nu{}_\rho}_{g'_{\lambda\rho}} y^\rho \quad \text{(注意重复指标求和规则的具体用法)} \\
&\Rightarrow g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} = a^\lambda{}_\mu g_{\lambda\rho} a^\rho{}_\nu.
\end{aligned}
\tag{3.1.7}
$$

令 $a^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$, $|\omega^\mu{}_\nu| \ll 1$, 代入 (3.1.7) 式给出

$$
\omega^\lambda{}_\mu g_{\lambda\nu} + g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = 0 \Rightarrow g_{\nu\lambda}\omega^\lambda{}_\mu + g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = 0, \tag{3.1.8}
$$

令 $\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu$, 我们得到

$$
\omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} = 0, \tag{3.1.9}
$$

$\omega_{\mu\nu}$ 对指标 μ, ν 反称.

定义 $[g^{\mu\nu}]$ 为 $[g_{\mu\nu}]$ 的逆矩阵 ($[M^{ij}]$ 表示矩阵元为 M^{ij} 的矩阵), 可以证明, 令 $\omega^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\rho}\omega^\nu{}_\rho$(其中 $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$) 时, 有

$$
\omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0, \tag{3.1.10}
$$

即 $\omega^{\mu\nu}$ 也反称.

习题　证明 (3.1.10) 式.

3.1.2 狄拉克方程

狄拉克方程是仿照薛定谔方程得到的, 但是要求时、空相对论协变.

薛定谔方程 (自由粒子) 是

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi=0,\quad 即\quad \left(E-\frac{1}{2m}P^2\right)\psi=0. \tag{3.1.11}$$

(3.1.11) 式对应于经典自由粒子的方程

$$E-\frac{1}{2m}p^2=0.$$

为了使时空相对论协变, 狄拉克给出对时空的偏微商是线性的方程

$$\left(\mathrm{i}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\gamma^2\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{i}\gamma^3\frac{\partial}{\partial z}-m\right)\psi=0, \tag{3.1.12}$$

即

$$(\gamma^0E+\gamma^1P_1+\gamma^2P_2+\gamma^3P_3-m)\psi=0. \tag{3.1.13}$$

这应该与相对论质能关系相一致, 即由此等式能导出经典方程

$$E^2-P_x^2-P_y^2-P_z^2-m^2=0. \tag{3.1.14}$$

其中, $P_x=P^1=-P_1, P_y=P^2=-P_2, P_z=P^3=-P_3, E=P^0=P_0, P_\mu=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$.

考虑到要由 (3.1.13) 式导出 (3.1.14) 式来, 将

$$\gamma^0E+\gamma^1P_1+\gamma^2P_2+\gamma^3P_3+m$$

左乘 (3.1.13) 式得

$$[(\gamma^0E+\gamma^1P_1+\gamma^2P_2+\gamma^3P_3)^2-m^2]\psi=0.$$

因此, 要求

$$\begin{aligned}(\gamma^0E+\gamma^1P_1+\gamma^2P_2+\gamma^3P_3)^2&=E^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2\\&=E^2-P_x^2-P_y^2-P_z^2,\end{aligned}$$

这就要求

$$[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+=2g^{\mu\nu},\quad g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix},$$

其中, $[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+=\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu$. 这些 γ 矩阵可以用下述矩阵来实现:

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^1=\sigma_x,\sigma^2=\sigma_y,\sigma^3=\sigma_z$$

$$\gamma^0=\gamma_0,\quad \gamma^i=-\gamma_i. \tag{3.1.15}$$

我们可以将狄拉克方程写成

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0 \tag{3.1.16}$$

$$\partial_\mu\equiv\frac{\partial}{\partial x^\mu},\quad x^\mu=(t,x,y,z),\quad \psi=\begin{pmatrix}\psi_1\{x^\mu\}\\ \psi_2\{x^\mu\}\\ \psi_3\{x^\mu\}\\ \psi_4\{x^\mu\}\end{pmatrix}$$

注意 $x^0=x_0=t,\ x^1=-x_1=x,\ x^2=-x_2=y,\ x^3=-x_3=z.$

在下文, 通常以 x 代表 $(x^0,x^1,x^2,x^3)=\{x^\mu\}=(t,x,y,z)$.

对 4–矢量 B_μ, 可将 $\gamma^\mu B_\mu$ 写成 $\not{B}$, 因此又可将狄拉克方程写为

$$(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi=0. \tag{3.1.17}$$

在坐标的无穷小变换下

$$x'^\mu=x^\mu+\omega^\mu_\nu x^\nu,\quad \omega^\mu_\nu=-\omega^{\nu\mu}$$

考虑对坐标的偏微商的变换性质

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\equiv\partial'_\mu=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\equiv b^\nu{}_\mu\partial_\nu. \tag{3.1.18}$$

由 $\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho}=\delta^\mu\rho$ 得

$$a^\mu_\nu b^\nu_\rho=\delta^\mu_\rho. \tag{3.1.19}$$

因此, 当 $a^\mu_\nu=\delta^\mu_\nu+\omega^\mu_\nu$, 而且 ω^μ_ν 是无穷小量时, $b^\nu_\rho=\delta^\nu_\rho-\omega^\nu_\rho$, 由此可以导出

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\omega^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

$$\partial'_\mu=\partial_\mu-\omega^\nu_\mu\partial_\nu. \tag{3.1.20}$$

从这些关系, 我们可以看出如果不改变 ψ 的各个分量, 方程 (3.1.17) 本来在洛伦兹变换下不是协变的. 为了使之协变, 我们将 ψ 的各分量重新做线性组合,

$$\psi\to S(a)\psi=\psi', \tag{3.1.21}$$

使 ψ' 满足

$$(\mathrm{i}\partial\!\!\!/' - m)\psi' = 0, \tag{3.1.22}$$

也就是要求 $(\mathrm{i}\partial'_\mu\gamma^\mu - m)S\psi = 0$. 方程 (3.1.22) 等价于

$$[\mathrm{i}\partial'_\mu S^{-1}\gamma^\mu S - m]\psi = 0, \tag{3.1.23}$$

由于 $\partial'_\mu = \partial_\nu b^\nu{}_\mu$, 这只要

$$S^{-1}\gamma^\mu S = a^\mu{}_\lambda\gamma^\lambda \tag{3.1.24}$$

就可以了. 这时有 $\partial'_\mu S^{-1}\gamma^\mu S = \partial_\nu b^\nu{}_\mu a^\mu{}_\lambda\gamma^\lambda = \partial_\nu\delta^\nu{}_\lambda\gamma^\lambda = \partial_\nu\gamma^\nu$. 因此, 可以把 (3.1.23) 式写成 $(\mathrm{i}\partial_\nu\gamma^\nu - m)\psi = 0$, 这自然是满足的. 为了构造与洛伦兹变换 a 相关的 S, 使其满足 (3.1.24) 式, 我们考虑无穷小洛伦兹变换. 在 $a^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ 时, (3.1.24) 式给出

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\lambda\gamma^\lambda. \tag{3.1.25}$$

令 $S(a) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right) \cong 1 - \frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$, 则有

$$S(a)^{-1}\gamma^\lambda S(a) \cong \frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] + \gamma^\lambda. \tag{3.1.26}$$

用 $[AB, C] = A[B, C]_+ - [A, C]_+B$, 得到

$$\begin{aligned}
[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda] &= \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\lambda] - \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\nu\gamma^\mu, \gamma^\lambda] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^\mu[\gamma^\nu, \gamma^\lambda]_+ - \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\lambda]_+\gamma^\nu - \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma^\nu[\gamma^\mu, \gamma^\lambda]_+ + \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\nu, \gamma^\lambda]_+\gamma^\mu \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu 2g^{\nu\lambda} - 2g^{\mu\lambda}\gamma^\nu - \gamma^\nu 2g^{\mu\lambda} + 2g^{\nu\lambda}\gamma^\mu) \\
&= 2\mathrm{i}(\gamma^\mu g^{\nu\lambda} - \gamma^\nu g^{\mu\lambda}), \\
S(a)^{-1}\gamma^\lambda S(a) &\cong -\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(g^{\nu\lambda}\gamma^\mu - g^{\mu\lambda}\gamma^\nu) + \gamma^\lambda \\
&= \frac{1}{2}(g^{\lambda\nu}\omega_{\nu\mu}\gamma^\mu + g^{\lambda\mu}\omega_{\mu\nu}\gamma^\nu) + \gamma^\lambda \\
&= \frac{1}{2}(\omega^\lambda{}_\mu\gamma^\mu + \omega^\lambda{}_\nu\gamma^\nu) + \gamma^\lambda \\
&= \omega^\lambda{}_\mu\gamma^\mu + \gamma^\lambda.
\end{aligned}$$

这正好给出 (3.1.25) 式, 其中 $\omega^\lambda{}_\mu$ 由变换关系 $x'^\lambda = \omega^\lambda{}_\nu x^\nu + x^\lambda = (\delta^\lambda{}_\nu + \omega^\lambda{}_\nu)x^\nu$ 确定, 我们可以验算一下. 由 $x^\lambda = x'^\lambda - \omega^\lambda{}_\nu x'^\nu$, $x^\nu = x'^\nu - \omega^\nu{}_\lambda x'^\lambda$, $\partial'_\lambda = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\delta^\nu_\lambda - \omega^\nu{}_\lambda)\frac{\partial}{\partial x^\nu}$, 有

$$
\begin{aligned}
S(a)^{-1}\gamma^\lambda\partial'_\lambda S(a) &= (\omega^\lambda{}_\mu\gamma^\mu+\gamma^\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}-\omega^\nu{}_\lambda\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\\
&=\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}-\gamma^\lambda\omega^\nu{}_\lambda\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\gamma^\mu\omega^\lambda{}_\mu\frac{\partial}{\partial x^\lambda}+O(\omega^2)\\
&\cong\gamma^\lambda\frac{\partial}{\partial x^\lambda}.
\end{aligned}
$$

也就是, 当 $x'^\lambda=x^\lambda+\omega^\lambda{}_\nu x^\nu$ 时, 有

$$S(a)^{-1}\gamma^\lambda\partial'_\lambda S(a)=\gamma^\lambda\partial_\lambda.$$

狄拉克方程在坐标的洛伦兹变换下 (无穷小变换)

$$x'^\mu=x^\mu+\omega^\mu{}_\nu x^\nu,\quad \omega^{\mu\nu}=-\omega^{\nu\mu},\quad \omega\text{为实数}$$

本来是不协变的, 就是说, 原来在 $\{x^\mu\}$ 坐标下的解, 在 $\{x'^\mu\}$ 下不再是解. 但是如果场量 $\psi(x)$ 也作相应变化：

$$
\begin{aligned}
\psi'=S(a)\psi&=\left(\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\right)\psi\\
&\cong\left(1-\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)\psi,
\end{aligned}
$$

则由于 $S(a)^{-1}\gamma^\mu\partial'_\mu S(a)=\gamma^\mu\partial_\mu$, 就得到

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial'_\mu-m)\psi'&=S(a)S(a)^{-1}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial'_\mu-m)S(a)\psi\\
&=S(a)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=S(a)\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

也就是说, 在坐标做洛伦兹变换的同时, 如果将场量用 $S(a)$ 做线性变换, 将四个分量适当重做线性组合, 就可以得到在新坐标下的新解. 在转动 (也属于洛伦兹变换) 时, $S(a)$ 形成转动群的角动量为 $\dfrac{1}{2}$ 的表示, 因此我们称狄拉克场为自旋 $\dfrac{1}{2}$ 的粒子的场.

将狄拉克方程取厄米共轭,

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}\to(\psi_1^*\ \psi_2^*\ \psi_3^*\ \psi_4^*)\,,$$

由狄拉克方程得到

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0\longrightarrow-\mathrm{i}\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu^\dagger}-\psi^\dagger m^\dagger=0$$

考虑到

$$\gamma^{0^\dagger}=\gamma^0,\quad \gamma^{i^\dagger}=-\gamma^i,\quad m^\dagger=m\qquad \text{可统一写成}\gamma^{\mu^\dagger}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0,\tag{3.1.27}$$

我们得到

$$-\mathrm{i}(\partial_0\psi^\dagger\gamma^0 - \partial_i\psi^\dagger\gamma^i) - \psi^\dagger m = 0.$$

将 γ^0 从右边乘方程的两边, 由于 $\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0\gamma^0, \gamma^i\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^i$, 得到

$$-\mathrm{i}(\partial_0\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 + \partial_i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i) - \psi^\dagger\gamma^0 m = 0$$

即

$$(\mathrm{i}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + \bar{\psi}m) = 0, \quad (\text{其中},\ \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_1^*,\ \psi_2^*,\ -\psi_3^*,\ -\psi_4^*))$$

也可写为

$$\bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\not\partial} + m) = 0 \quad \text{或} \quad \bar{\psi}(\mathrm{i}\overleftarrow{\partial_\mu}\gamma^\mu + m) = 0. \tag{3.1.28}$$

狄拉克场其实是 8 个场量, 因为它是复场. 一个狄拉克场方程就包括 8 个场量的方程了.

要用变分原理导出这个方程, 只要令

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\overrightarrow{\partial_\mu} - m)\psi \tag{3.1.29}$$

即可. 形式上, 把 $\bar{\psi}$ 的四个分量和 ψ 的四个分量作为广义坐标, 就可以用欧拉–拉格朗日方程导出狄拉克场方程 (习题).

考虑

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S(a)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^\dagger_{\mu\nu}}\gamma^0.$$

由 $\sigma^\dagger_{\mu\nu} = \left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\right)^\dagger = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\dagger_\nu,\gamma^\dagger_\mu] = \dfrac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\dagger_\mu,\gamma^\dagger_\nu] = \dfrac{\mathrm{i}}{2}\gamma^0[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma^0 = \gamma^0\sigma_{\mu\nu}\gamma^0$, 可导出

$$\bar{\psi}' = \psi^\dagger\gamma^0\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}\gamma^0\gamma^0 = \bar{\psi}S(a)^{-1}.$$

因此, $\bar{\psi}\gamma^\lambda\partial_\lambda\psi = \bar{\psi}'\gamma^\lambda\partial'_\lambda\psi'$, $\mathscr{L}$ 在洛伦兹变换下不变.

洛伦兹变换还可以包括空间反射, 令 $S = \gamma_0$, 我们有

$$\gamma_0^{-1}\gamma^0\gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_0^{-1}\gamma^j\gamma_0 = -\gamma^j, \quad j = 1, 2, 3.$$

因此, 当取空间反射时, 可以得

$$\begin{aligned}
\psi' &= \gamma_0\psi(x^{j'} = -x^j,\ x^{0'} = x^0) \\
\bar{\psi}' &= \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma_0^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0 = \bar{\psi}\gamma_0^{-1},
\end{aligned}$$

这是因为 $\gamma^0 = \gamma_0 = \gamma_0^{-1} = \gamma_0^\dagger$.

由于

$$\gamma_0^{-1}\partial'_\mu\gamma^\mu\gamma_0 = \gamma_0^{-1}(\partial'_0\gamma_0 + \sum_{j=1}^{3}\partial'_j\gamma^j)\gamma_0 = \partial'_0\gamma_0 - \sum_{j=1}^{3}\partial'_j\gamma^j$$
$$= \partial_0\gamma_0 + \sum_{j=1}^{3}\partial_j\gamma^j = \partial_\mu\gamma^\mu,$$

我们可以推出

$$\gamma_0^{-1}(\mathrm{i}\partial'_\mu\gamma^\mu - m)\gamma_0\psi(x^{j'} = -x^j,\ x^{0'} = x^0)$$
$$= (\mathrm{i}\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0.$$

因此, $\psi' = \gamma_0\psi$ 也满足狄拉克方程

$$(\mathrm{i}\partial'_\mu\gamma^\mu - m)\psi' = 0,$$

又由 $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\gamma_0^{-1}$, 也可以推出

$$\bar{\psi}'(\mathrm{i}\overleftarrow{\not\partial} + m) = 0.$$

3.1.3　平面波解

由于狄拉克方程是线性方程, 我们可以用平面波解叠加得到所有的解. 令 $\psi_+ = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u(p)$, $px = \omega_p t - \vec{p}\cdot\vec{x} = p_\mu x^\mu$, $\omega_p \geqslant 0$, 注意三维矢量 $\vec{p} = (p^1, p^2, p^3) = (p_x, p_y, p_z) = (-p_1, -p_2, -p_3)$.

我们得到

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_+ = (\mathrm{i}\gamma^\mu(-\mathrm{i})p_\mu - m)\psi_+ = (\gamma^\mu p_\mu - m)\psi_+ = (\not p - m)\psi_+$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}(\not p - m)u(p) \Rightarrow (\not p - m)u(p) = 0. \tag{3.1.30}$$

同样, 令 $\psi_- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}v(p)$, 得

$$0 = (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_- = (\mathrm{i}\gamma^\mu\mathrm{i}p_\mu - m)\psi_- = (-\gamma^\mu p_\mu - m)\psi_- = (-\not p - m)\psi_-$$
$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}(-\not p - m)v(p) \Rightarrow (\not p + m)v(p) = 0. \tag{3.1.31}$$

由于 $(\not p - m)(\not p + m) = \not p^2 - m^2 = \omega_p^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2$, 因此 (3.1.30) 式、(3.1.30) 式的非零解要求 $\omega_p^2 - \vec{p}^{\,2} - m^2 = 0$, 这就限制了 ω_p 的值：

$$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = \sqrt{-p_i p^i + m^2}. \tag{3.1.32}$$

在满足此条件时, u 和 v 都各有两个解, 我们叫它们 $u(\vec{p}, s)$ 和 $v(\vec{p}, s)$, $s = \pm 1$.

有了平面波解

$$\psi_+ = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}u(\vec{p},s), \quad \psi_- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}v(\vec{p},s) \tag{3.1.33}$$

就可以得到

$$\bar{\psi}_+ = \bar{u}(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}, \quad \bar{\psi}_- = \bar{v}(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px},$$

其中

$$\bar{u}(\vec{p},s) = u^\dagger(\vec{p},s)\gamma^0, \qquad \bar{v}(\vec{p},s) = v^\dagger(\vec{p},s)\gamma^0.$$

以下我们对 $u, v, \bar{u}, \bar{v}$ 作一些分析, 凡是不会引起混淆的地方, 用 $u(p,s)$ 和 $v(p,s)$ 代表 $u(\vec{p},s)$ 和 $v(\vec{p},s)$. 我们要求

$$(m - \not{p})u(\vec{p},s) = 0, \quad (m + \not{p})v(\vec{p},s) = 0. \tag{3.1.34}$$

并对这些旋量再附加以下条件,

$$u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') = \frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'}, \quad v^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s') = \frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'} \tag{3.1.35}$$

就可以推出它们的许多性质来 (附录 3.1A).

3.1.4 狄拉克场的拉格朗日形式与哈密顿形式

令狄拉克场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\vec{\partial}_\mu - m)\psi \tag{3.1.36}$$

我们来检验运动方程. 考虑作用量的变更

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \delta\bar{\psi}_\alpha(\mathrm{i}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\vec{\partial}_\mu - m\delta_{\alpha\beta})\psi_\beta\mathrm{d}\tau + \int \bar{\psi}_\alpha(\mathrm{i}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\vec{\partial}_\mu - m\delta_{\alpha\beta})\delta\psi_\beta\mathrm{d}\tau \\
&= \int \delta\bar{\psi}_\alpha(\mathrm{i}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\vec{\partial}_\mu - m\delta_{\alpha\beta})\psi_\beta\mathrm{d}\tau + \int \partial_\mu(\bar{\psi}_\alpha\mathrm{i}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\delta\psi_\beta)\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \int \bar{\psi}_\alpha(-\mathrm{i}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\overleftarrow{\partial}_\mu - m\delta_{\alpha\beta})\delta\psi_\beta\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

第二项为边界项. 假定 $\delta\bar{\psi}$ 和 $\delta\psi$ 的各分量都是任意的, 由变分原理 $\delta S = 0$ 得到运动方程

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\vec{\partial}_\mu - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0.$$

现在我们推导哈密顿形式, 由

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\vec{\partial}_\mu - m)\psi$$

动量密度为

$$\begin{aligned}
\Pi_{\psi_\alpha} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_\alpha}(\bar{\psi}_\beta\mathrm{i}\gamma^\mu_{\beta\rho}\partial_\mu\psi_\rho) = \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_\alpha}(\bar{\psi}_\beta\mathrm{i}\gamma^0_{\beta\rho}\dot{\psi}_\beta) \\
&= \bar{\psi}_\beta\mathrm{i}\gamma^0_{\beta\alpha} = (\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^0)_\alpha = \mathrm{i}\psi^\dagger_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.1.37}$$

这就是广义坐标! 所以这个系统是有约束的. 我们令 $\psi_\alpha^\dagger=-\mathrm{i}\Pi_{\psi_\alpha}$, 就可以构成完整的正则变量集合 (q,p), 而如果硬求 $\Pi_{\bar\psi_\alpha}=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\bar\psi}_\alpha=0$, 将导致不合理的结果.

这些问题的出现是因为 L 中只包含 $\dot q$ 的一次项, 是奇异的拉格朗日量. 因此由 $p(q,\dot q)$ 并不能反解出 $\dot q$ 来, 所以广义动量不能独立于广义坐标. 我们可以试用原来的方式构造哈密顿形式. 假设广义坐标有两类, 一类是 $\{q_j\}$, 另一类是 $\{q_\alpha\}$. 令 $L=L(\dot q_j,q_j,q_\alpha)$, 不含 $\dot q_\alpha$ 而且是 $\dot q_j$ 的一次式. 因为 L 是 $\dot q_j$ 的一次式, 所以可以令 $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial\dot q_j}$, 再设可以反解出 q_α：$q_\alpha=q_\alpha(p_j,q_j)$. 令 $H=\displaystyle\sum_j p_j\dot q_j-L$, 也就是只对 L 中有时间微商的 q 取 $\displaystyle\sum_j p_j\dot q_j$, 而对 L 中不出现 $\dot q_\alpha$ 的 q_α 不加入 $\sum p\dot q$, 由于 L 是 $\dot q_j$ 的一次式, H 中 $\displaystyle\sum_j p_j\dot q_j$ 中的 $\dot q_j$ 与 $-L$ 中的 $\dot q_j$ 相消, H 就可以只由广义坐标表达：$H=H(q_j,q_\alpha)$. 又由于 q_α 可以写成 $q_\alpha=q_\alpha(p_j,q_j)$, 则 H 可以写成：$H=\displaystyle\sum_j p_j\dot q_j-L=H(q_j,p_j)$. 回到场论来说, $\mathscr{L}$ 中的 ψ 的各分量, 就相当于 q_j, $\psi^\dagger$ 的各分量, 就相当于 q_α, $\mathscr{H}$ 中就不出现 $\dot\psi_\alpha$, 只出现 $\psi_\alpha^\dagger$ 和 ψ_α(这里 ψ_α 的 $\alpha=1,2,3,4$, 与前面的 q_α 的 α 意义不同), 由于在我们的问题中 $\psi_\alpha^\dagger$ 可以用 $-\mathrm{i}\Pi_\alpha$ 代替, $\mathscr{H}$ 就完全由正则变量表示了. 计算表明, 这时正则方程依然成立. 证明如下.

在这种情况下, 我们将 q 分为 q_j 和 q_α, L 中含有 $\dot q_j$ 而不含 $\dot q_\alpha$.

假设 $L=L(q_j,q_\alpha,\dot q_j)$, $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial\dot q_j}=f_j(q_j,q_\alpha)$, 正好能由它们反解出 q_α. 使 $q_\alpha=q_\alpha(q_j,p_j)$, 又要求 p_j 和 q_j 可以独立变化, 这需要 q_j 的数目与 q_α 的数目相同.

由于

$$H=\sum_j p_j\dot q_j-L=H(p_j,q_j),$$

$$\begin{aligned}\delta H&=\sum_j p_j\delta\dot q_j+\sum_j\delta p_j\dot q_j-\sum_j\delta q_j\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_j\delta\dot q_j\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}-\sum_\alpha\delta q_\alpha(q_j,p_j)\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\\&=\sum_j\delta p_j\dot q_j-\sum_j\delta q_j\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_{\alpha j}\left(\delta p_j\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_j}+\delta q_j\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_j}\right)\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}.\end{aligned}$$

因此, 有

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}=\dot q_j-\sum_\alpha\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha},\quad\frac{\partial H}{\partial q_j}=-\frac{\partial L}{\partial q_j}-\sum_\alpha\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}.$$

由拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0\Rightarrow\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0\quad\text{使上两式后一项为 0.}$$

我们得到

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{q_j, H\}$$

又由拉格朗日方程得到

$$\dot{p}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} - \sum_\alpha \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_j}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{p_j, H\}.$$

所以哈密顿方程也成立. 过渡到场论, 狄拉克场的哈密顿密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \Pi_\psi \dot{\psi} - \mathscr{L} = \mathrm{i}\psi^\dagger\dot{\psi} - \mathrm{i}\psi^\dagger\dot{\psi} - \mathrm{i}\psi^\dagger \underbrace{\gamma^0\gamma^i}_{\alpha^i}\partial_i\psi + m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= -\mathrm{i}\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi + m\psi^\dagger\beta\psi = \psi^\dagger(-\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi,\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

哈密顿量为

$$H = \int \mathrm{d}^3x\psi^\dagger(\vec{x},t)(-\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi(\vec{x},t). \tag{3.1.39}$$

在这两个式子中 $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i, \beta = \gamma^0$ 都是 4×4 矩阵, 请勿与前面 $\gamma_{\alpha\beta}$ 中作为指标的 α, β 相混, $(\nabla)_i = \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$.

3.1.5 狄拉克场的量子化

我们前面得到 $\Pi_\psi = \mathrm{i}\psi^\dagger$, 写出分量式是

$$\Pi_{\psi_\alpha} = \mathrm{i}\psi_\alpha^\dagger.$$

下面进行量子化. 对费米子, 用反对易子作为基本泊松括号的对应. 让我们回忆正则量子化的过程. 由

$$\begin{aligned}&\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \\ \Rightarrow &[q_i, p_j]_+ = \mathrm{i}\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j]_+ = [p_i, p_j]_+ = 0\end{aligned}$$

在场论情形, 得到

$$\begin{aligned}&[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}',t)]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \Rightarrow [\hat{\psi}(\vec{x},t), \hat{\bar{\psi}}(\vec{x}',t)]_+ = \gamma^0\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'), \\ &[\hat{\psi}_\alpha(\vec{x},t), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}',t)]_+ = [\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\vec{x},t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}',t)]_+ = 0,\end{aligned}$$

其中, $[\hat{A}, \hat{B}]_+ \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

哈密顿方程给出

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma(\vec{x},t) \quad = -\mathrm{i}[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x},t), \hat{H}]. \tag{3.1.40}$$

注意, 这里是普通对易子. 由 (3.1.39) 式给出

$$\dot{\hat{\psi}}_\sigma(\vec{x},t) \quad = -\int \mathrm{d}^3x'[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x},t),\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}',t)\vec{\alpha}\cdot\nabla'\hat{\psi}(\vec{x}',t)+\mathrm{i}m\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}',t)\beta\hat{\psi}(\vec{x}',t)]$$

利用

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]_+\hat{C}-\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]_+,$$

得到

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\psi}}_\sigma(\vec{x},t) =& -\int \mathrm{d}^3x'\{([\hat{\psi}_\sigma(\vec{x},t),\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\vec{x}',t)]_+\vec{\alpha}_{\alpha\beta}\cdot\nabla'\hat{\psi}_\beta(\vec{x}',t))\\ &-\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\vec{x}',t)\alpha_{\alpha\beta}\cdot\nabla'[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x},t),\hat{\psi}_\beta(\vec{x}',t)]_+ \longrightarrow 0\\ &+\mathrm{i}m[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x},t),\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\vec{x}',t)]_+\beta_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\vec{x}',t)\\ &-\mathrm{i}m\hat{\psi}^\dagger_\alpha(\vec{x}',t)\beta_{\alpha\beta}[\hat{\psi}_\sigma(\vec{x},t),\hat{\psi}_\beta(\vec{x}\,',t)]_+\} \longrightarrow 0\\ =& -\int \mathrm{d}^3x'(\delta_{\sigma\alpha}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')\vec{\alpha}_{\alpha\beta}\cdot\nabla'\hat{\psi}_\beta(\vec{x}\,',t)+\mathrm{i}m\delta_{\sigma\alpha}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\beta_{\alpha\beta}\hat{\psi}_\beta(\vec{x}',t))\\ =&(-\vec{\alpha}\cdot\nabla-\mathrm{i}m\beta)_{\sigma\beta}\hat{\psi}_\beta(\vec{x},t),\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

与经典方程相同.

哈密顿量一定以玻色型力学量出现于演化方程中, 也就是

$$\dot{A}=\frac{1}{\mathrm{i}}[A,H] \quad 而不是 \quad \dot{A}=\frac{1}{\mathrm{i}}[A,H]_+,$$

否则计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(AB)$ 会引出矛盾. 已知算子 $\hat{\psi}(x)$ 满足狄拉克方程

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mI\right)\hat{\psi}(x)=0, \tag{3.1.42}$$

这是四个分量的方程. 与前面的分析相同, 我们可以求出算子 $\hat{\psi}(x)$ 的平面波展开.

令 $px=\omega_p t-\vec{p}\cdot\vec{x}=p_\mu x^\mu$, $\omega_p>0$, $\hat{\psi}_+=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\hat{u}(\vec{p})$, $\hat{\psi}_-=\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\hat{v}(\vec{p})$, 代入 (3.1.42) 式得

$$(\not{p}-m)\hat{u}(p)=0\ ,\ (\not{p}+m)\hat{v}(p)=0,$$

仅当 $p^\mu p_\mu-m^2=0$, $(\omega_p^2=\vec{p}^{\,2}+m^2)$ 时有非零解.

可以证明这时 $\not{p}-m$ 和 $\not{p}+m$ 的秩均为 2, 所以 $\hat{u}(p)$ 和 $\hat{v}(p)$ 都有两组线性独立的解. 不失一般性, 可令它们为

$$\hat{b}(\vec{p},s)u(\vec{p},s), \quad \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s), \quad s=\pm 1.$$

于是 $\hat{\psi}(x)$ 是这些解的线性叠加, (因为 (3.1.42) 式是线性方程组)

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(x) &= \sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \left[\hat{b}(\vec{p},s)u(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right] \\
\hat{\psi}^\dagger(x) &= \sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \left[\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + \hat{d}(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right] \\
\hat{\bar{\psi}}(x) &= \sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \left[\hat{b}^\dagger(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + \hat{d}(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\right].
\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

利用 $\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} = (2\pi)\delta(p)$ 和 $u^\dagger, u$; $v^\dagger, v$ 的正交关系, 可以将 $\hat{b}(\vec{p},s)$ 和 $\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)$ 从 $\hat{\psi}(x)$ 中取出来.

由

$$\begin{aligned}
\int \hat{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}'\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x =& \sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \Big[\hat{b}(\vec{p},s)u(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t + \mathrm{i}(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \\
&+ \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t - \mathrm{i}(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}\Big]\mathrm{d}^3x \\
=& \sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} \Big[\hat{b}(\vec{p},s)u(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_p t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \\
&+ \hat{d}^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_p t}(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}')\Big] \\
=& \sum_s \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}} \Big[\hat{b}(\vec{p}\,',s)u(\vec{p}\,',s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{p'} t} \\
&+ \hat{d}^\dagger(-\vec{p}\,',s)v(-\vec{p}\,',s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{p'} t}\Big](2\pi)^3
\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

再用 (附录 3.1A)

$$\begin{aligned}
u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') &= \frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'}, \quad u^\dagger(\vec{p},s)v(-\vec{p},s') = 0 \\
v^\dagger(-\vec{p},s)v(-\vec{p},s') &= \frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'}, \quad v^\dagger(-\vec{p},s)u(\vec{p},s') = 0
\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

可以将 $\hat{b}(\vec{p},s)$ 和 $\hat{d}^\dagger(\vec{p},s)$ 取出来, 得到产生和湮灭算子:

$$\begin{aligned}
u^\dagger(\vec{p}',s')\int \hat{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x &= \frac{\omega_{p'}}{m}(2\pi)^3\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\hat{b}(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{p'}t} \\
v^\dagger(-\vec{p}',s')\int \hat{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x &= \frac{\omega_{p'}}{m}(2\pi)^3\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\hat{d}^\dagger(-\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{p'}t} \\
v^\dagger(\vec{p}',s')\int \hat{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x &= \frac{\omega_{p'}}{m}(2\pi)^3\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\hat{d}^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{p'}t}.
\end{aligned} \tag{3.1.46}$$

现在可以求 b 和 d 的各种反对易关系式了. 令 $t=0, x=(0,x,y,z)$, 由 (3.1.46)

式得

$$
\begin{aligned}
&[\hat{b}(\vec{p},s),\hat{b}^\dagger(\vec{p}',s')]_+\\
&=\left[\int \mathrm{d}^3x\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u^\dagger(\vec{p},s)\hat{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}},\int \mathrm{d}^3x'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\hat{\psi}^\dagger(x')u(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'}\right]_+\\
&=\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}u^\dagger(\vec{p},s)\underbrace{[\hat{\psi}(x),\hat{\psi}^\dagger(x')]_+}_{\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')I}u(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'}\\
&=\int \mathrm{d}^3x\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{p}-\vec{p}\,')\cdot\vec{x}}\\
&=\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p}\,',s')(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')\\
&=\frac{m}{\omega_p}u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s')\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')=\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,'),
\end{aligned}
\tag{3.1.47}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\hat{b}(\vec{p},s),\hat{d}(\vec{p}\,',s')\right]_+\\
&=\left[\int \mathrm{d}^3x\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u^\dagger(\vec{p},s)\hat{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}},\int \mathrm{d}^3x'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\hat{\psi}^\dagger(x')v(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'}\right]_+\\
&=\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}u^\dagger(\vec{p},s)[\hat{\psi}(x),\hat{\psi}^\dagger(x')]_+v(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot\vec{x}\,'}\\
&=\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}u^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p}\,',s')(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p}\,')\\
&=\frac{m}{\omega_p}u^\dagger(\vec{p},s)v(-\vec{p},s')\delta^3(\vec{p}+\vec{p}\,')=0.
\end{aligned}
\tag{3.1.48}
$$

其余情况类似.

归纳在一起, 我们得到狄拉克场的产生和湮灭算子之间的反对易关系

$$
\begin{aligned}
&[b,b]_+=[d,d]_+=[b,d]_+=0\\
&[b^\dagger,b^\dagger]_+=[d^\dagger,d^\dagger]_+=[b^\dagger,d^\dagger]_+=0\\
&[b,d^\dagger]_+=[b^\dagger,d]_+=0\\
&[b(\vec{p},s),b^\dagger(\vec{p}\,',s')]_+=\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')\\
&[d(\vec{p},s),d^\dagger(\vec{p}\,',s')]_+=\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,').
\end{aligned}
\tag{3.1.49}
$$

这里, 我们看到, 引入 $\sqrt{\dfrac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}$ 因子, 是为了 (3.1.49) 式有一个简洁的结果, 可以把 $b^\dagger b, d^\dagger d$ 表示为粒子数; 反过来, 由上面这些关系, 我们也可以反推出, 当 $t=t'$

时, 有

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')]_+ = I\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$
$$[\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(x')]_+ = [\hat{\psi}^\dagger_\alpha(x), \hat{\psi}^\dagger_\beta(x')]_+ = 0.$$

比如第一式可以作如下推导, 当 $t=t'$ 时

$$\begin{aligned}
&[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')]_+ \\
=&\Bigg[\sum_s\int \mathrm{d}^3p\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}(b(\vec{p},s)u(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}+d^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}),\\
&\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}(b^\dagger(\vec{p}\,',s')u^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{+\mathrm{i}p'x'}+d(\vec{p}\,',s')v^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x'})\Bigg]_+\\
=&\sum_{ss'}\int \mathrm{d}^3p\ \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}([b(\vec{p},s),b^\dagger(\vec{p}\,',s')]_+u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}p'x'}\\
&+[d^\dagger(\vec{p},s),d(\vec{p}\,',s')]_+v(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}px-\mathrm{i}p'x'})\\
=&\sum_{ss'}\int \mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}(\delta^3(\vec{p}-\vec{p}\,')\delta_{ss'})(u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}p'x'}\\
&+v(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}px-\mathrm{i}p'x'})\\
=&\sum_s\int \mathrm{d}^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}(u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_pt-\vec{p}\cdot\vec{x})+\mathrm{i}(\omega_pt-\vec{p}\cdot\vec{x}')}\\
&+v(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_pt-\vec{p}\cdot\vec{x})-\mathrm{i}(\omega_pt-\vec{p}\cdot\vec{x}')})\\
=&\sum_s\int \mathrm{d}^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}(u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}+v(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')})\\
=&\sum_s\int \mathrm{d}^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}(u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')})\\
&+\sum_s\int \mathrm{d}^3p'\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}(v(-\vec{p}\,',s)v^\dagger(-\vec{p}\,',s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\,'\cdot(\vec{x}-\vec{x}')})\\
=&\sum_s\int \mathrm{d}^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}(u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)+v(-\vec{p}\,',s)v^\dagger(-\vec{p}\,',s))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\\
=&\int \mathrm{d}^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}\frac{\omega_p}{m}I\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\\
=&\frac{1}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')I\\
=&\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')I,
\end{aligned}\tag{3.1.50}$$

倒数第 3 个等号是因为 (3.1.45) 式.

我们在下面将哈密顿量 H 用产生和湮灭算子表达出来, 给出

$$
\begin{aligned}
H=&\int \mathrm{d}^3x\,\psi^\dagger(x)(-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^i\partial_i+m\gamma^0)\psi(x)\\
=&\int \mathrm{d}^3x\sum_s\int \mathrm{d}^3p\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}[b^\dagger(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}+d(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}]\\
&\times(-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^i\partial_i+m\gamma^0)\\
&\times\int \mathrm{d}^3p'\sum_{s'}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}[b(\vec{p}\,',s')u(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x}+d^\dagger(\vec{p}\,',s')v(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}].
\end{aligned}
$$

而由 $(-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^i\partial_i+m\gamma^0)\psi=\mathrm{i}\dot{\psi}$, 进一步得到

$$
\begin{aligned}
H=&\int \mathrm{d}^3x\sum_s\int \mathrm{d}^3p\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}[b^\dagger(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}+d(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}]\\
&\times\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}[\omega_{p'}b(\vec{p}\,',s')u(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x}-\omega_{p'}d^\dagger(\vec{p}\,',s')v(\vec{p}\,',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}]\\
=&\sum_{ss'}\int \mathrm{d}^3p\mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\\
&\times[b^\dagger(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)\omega_{p'}b(\vec{p}\,',s')u(\vec{p}\,',s')(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p\,'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_pt-\mathrm{i}\omega_{p'}t}\\
&+b^\dagger(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)(-\omega_{p'})d^\dagger(\vec{p}\,',s')v(\vec{p}\,',s')(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p\,'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_pt+\mathrm{i}\omega_{p'}t}\\
&+d(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)\omega_{p'}b(\vec{p}\,',s')u(\vec{p}\,',s')(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}+\vec{p'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_pt-\mathrm{i}\omega_{p'}t}\\
&+d(\vec{p},s)v^\dagger(\vec{p},s)(-\omega_{p'})d^\dagger(\vec{p}\,',s')v(\vec{p}\,',s')(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{p\,'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_pt+\mathrm{i}\omega_{p'}t}]\\
=&\sum_{ss'}\int \mathrm{d}^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}\omega_p(2\pi)^3\\
&\times[b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s')u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s')-b^\dagger(\vec{p},s)d^\dagger(-\vec{p},s')u^\dagger(\vec{p},s)v(-\vec{p},s')\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_pt}\\
&+d(\vec{p},s)b(-\vec{p},s')v^\dagger(\vec{p},s)u(-\vec{p},s')\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_pt}-d(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p},s')v^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s')].
\end{aligned}
$$

由 (3.1.45) 式, 哈密顿量 H 可以表示为

$$
\begin{aligned}
H=&\sum_{ss'}\int \mathrm{d}^3p\ m\left[b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s')\frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'}-0+0-d(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p},s')\frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'}\right]\\
=&\sum_s\int \mathrm{d}^3p\omega_p[b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s)-d(\vec{p},s)d^\dagger(\vec{p},s)].
\end{aligned}
\tag{3.1.51}
$$

如果在量子化时用普通对易关系, 将导致 $[d(\vec{p},s),d^\dagger(\vec{p}\,',s')]=\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p\,'})$, 从而哈密顿量为

$$
H=\sum_s\int \mathrm{d}^3p\omega_p(b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s)-d^\dagger(\vec{p},s)d(\vec{p},s))-E_0,
$$

其中, E_0 是发散的常数, 但前面的有效项还将导致负能困难 (如果一开始就在 (3.1.43) 式中把 $d^\dagger$ 写成 d, 则 (3.1.51) 式本身就是两个粒子数的差, 同样导致负

能困难). 所以, Jordan-Wigner 改用反对易关系, 就有

$$H=\sum_s\int \mathrm{d}^3p\omega_p(b^\dagger(\vec{p},s)b(\vec{p},s)+d^\dagger(\vec{p},s)d(\vec{p},s))-E_0 \tag{3.1.52}$$

这样, 其有效部分就是正定的, 这就解决了负能困难, 同时还使费米子要遵从泡利不相容原理自动实现了.

习题

1. 设 $g=[g_{\mu\nu}]$ 是实对称矩阵 (叫度规张量), $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$, 定义 $[g^{\mu\nu}]$ 为其逆矩阵, 即

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}=g_\mu{}^\lambda=\delta_\mu^\lambda=\begin{cases}0, & \mu\neq\lambda;\\ 1, & \mu=\lambda.\end{cases}$$

(a) 证明: $g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}$ 而且

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}=g^\mu{}_\lambda=\delta^\mu_\lambda=\delta_\mu^\lambda=\begin{cases}0, & \mu\neq\lambda;\\ 1, & \mu=\lambda.\end{cases}$$

(b) 给定张量 $X^{\mu\nu}$, 令 $X^\mu{}_\nu\equiv X^{\mu\nu'}g_{\nu'\nu}$, $X_{\mu\nu}=X^{\mu'}{}_\nu g_{\mu'\mu}$

(i) 求证 $X^\mu{}_\nu g^{\nu\lambda}=X^{\mu\lambda}$, $X_{\mu'\nu}g^{\mu'\mu}=X^\mu{}_\nu$;

(ii) 当 $X^{\mu\nu}=X^{\nu\mu}$ 时, 求证 $X_{\mu\nu}=X_{\nu\mu}$;

(iii) 当 $X^{\mu\nu}=-X^{\nu\mu}$ 时, 求证 $X_{\mu\nu}=-X_{\nu\mu}$

2. 已知 $b,b^\dagger$ 满足 $[b,b^\dagger]_+=1,[b,b]_+=[b^\dagger,b^\dagger]_+=0$, 求证:

(a) $b^\dagger b=N$ 满足 $N^2=N$. 因而力学量 N 的本征值为 0 或 1;

(b) 能否找到 2×2 的矩阵实现这两个算子?

附录 3.1A　推导 $u(\vec{p},s)$ 和 $v(\vec{p},s)$ 的性质

由 $(\not p-m)u(\vec{p},s)=0\Rightarrow(\not p+m)u(\vec{p},s)=2mu(\vec{p},s)$, 取厄米共轭得

$$u^\dagger(\vec{p},s)(\not p^\dagger-m)=0\quad,\quad u^\dagger(\vec{p},s)(\not p^\dagger-m)\gamma^0=0,$$

由于 ${\gamma^\mu}^\dagger\gamma^0=\gamma^0\gamma^\mu$, $\not p^\dagger\gamma^0=\gamma^0\not p$, 所以有 $u^\dagger(\vec{p},s)\gamma^0(\not p-m)=\bar{u}(\vec{p},s)(\not p-m)=0\Rightarrow$ $\bar{u}(\vec{p},s)(\not p+m)=2m\bar{u}(\vec{p},s)$. 类似地有

$$(\not p+m)v(\vec{p},s)=0\Rightarrow(m-\not p)v(\vec{p},s)=2mv(\vec{p},s),$$

$$\bar{v}(\vec{p},s)(m-\not p)=2m\bar{v}(\vec{p},s).$$

由此得到

$$\bar{u}(\vec{p},s)=\bar{u}(\vec{p},s)\frac{m+\not p}{2m},\qquad \bar{v}(\vec{p},s)=\bar{v}(\vec{p},s)\frac{m-\not p}{2m},$$

并可以推导出

$$\begin{aligned}u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s') &= \bar{u}(\vec{p},s)\gamma^0 u(\vec{p},s') = \bar{u}(\vec{p},s)\frac{m+\not{p}}{2m}\gamma^0 u(\vec{p},s') \\ &= \bar{u}(\vec{p},s)\gamma^0\left(\frac{m-\not{p}}{2m}+\frac{2p_0\gamma^0}{2m}\right)u(\vec{p},s') = \bar{u}(\vec{p},s)\frac{p_0}{m}u(\vec{p},s'),\end{aligned}$$

其中, $p_0=\omega_p=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$,

$$\begin{aligned}u^\dagger(\vec{p},s)v(-\vec{p},s') &= \bar{u}(\vec{p},s)\gamma^0 v(-\vec{p},s') = \bar{u}(\vec{p},s)\frac{m+\not{p}}{2m}\gamma^0 v(-\vec{p},s') \\ &= \bar{u}(\vec{p},s)\gamma^0\frac{m+(p_0\gamma^0-p_j\gamma^j)}{2m}v(-\vec{p},s) \\ &= \bar{u}(\vec{p},s)\gamma^0\frac{m+\not{p}\,'}{2m}v(\vec{p}\,',s)=0,\end{aligned}$$

其中, $\vec{p}\,'=-\vec{p}, p_0'=p_0$.

我们可以推导类似方程

$$\begin{aligned}v^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s') &= \bar{v}(\vec{p},s)\gamma^0 v(\vec{p},s') = \bar{v}(\vec{p},s)\frac{m-\not{p}}{2m}\gamma^0 v(\vec{p},s') \\ &= \bar{v}(\vec{p},s)\gamma^0\left(\frac{m+\not{p}}{2m}-\frac{2p_0\gamma^0}{2m}\right)v(\vec{p},s') = -\bar{v}(\vec{p},s)\frac{p_0}{m}v(\vec{p},s'),\end{aligned}$$

$$v^\dagger(-\vec{p},s')u(\vec{p},s)=(u^\dagger(\vec{p},s)v(-\vec{p},s'))^\dagger=0.$$

由此可见, 如果取

$$u^\dagger(\vec{p},s)u(\vec{p},s')=\frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'},\quad v^\dagger(\vec{p},s)v(\vec{p},s')=\frac{\omega_p}{m}\delta_{ss'}, \tag{3.1A.1}$$

则有

$$\bar{u}(\vec{p},s)u(\vec{p},s')=\delta_{ss'},\quad \bar{v}(\vec{p},s)v(\vec{p},s')=-\delta_{ss'}. \tag{3.1A.2}$$

考虑四个四分量的矢量 (旋量)

$$u(\vec{p},s),\quad v(-\vec{p},s),\quad s=\pm1,$$

由上述讨论可知它们一定是线性独立的.

令矩阵 $A=\sum\limits_s(u(\vec{p},s)u^\dagger(\vec{p},s)+v(-\vec{p},s)v^\dagger(-\vec{p},s))$, 矩阵 A 满足

$$Au(\vec{p},s)=\frac{\omega_p}{m}u(\vec{p},s),\quad Av(-\vec{p},s)=\frac{\omega_p}{m}v(-\vec{p},s),$$

$\Rightarrow A=\dfrac{\omega_p}{m}I.$

类似地, 令 $B=\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)-\sum_s v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s)$, 则由 (3.1A.2) 式得 $Bu(\vec{p},s)=u(\vec{p},s), Bv(\vec{p},s)=v(\vec{p},s)$, 又由于

$$\bar{u}(\vec{p},s)v(\vec{p},s')=\bar{u}(\vec{p},s)\frac{m+\not{p}}{2m}v(\vec{p},s)=0,$$

类似地 $\bar{v}(\vec{p},s)u(\vec{p},s')=0$. 所以四个旋量 $u(\vec{p},s),v(\vec{p},s)$ 也是线性独立的, 从而给出 $B=I$. 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{m+\not{p}}{2m}&=B\frac{m+\not{p}}{2m}=\left[\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)-\sum_s v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s)\right]\frac{m+\not{p}}{2m}\\&=\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)-0\Rightarrow\frac{m+\not{p}}{2m}=\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s).\end{aligned}\tag{3.1A.3}$$

类似地也可导出

$$-\sum v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s)=\frac{m-\not{p}}{2m}.\tag{3.1A.4}$$

附录 3.1B　产生湮灭算符和粒子数算符

1. 令 a_j 与 $a_j^\dagger$ 满足

$$[a_j,a_{j'}^\dagger]=\delta_{jj'},\quad j=1,2,\cdots,m$$

我们可以证明以下结果.

(1) $a_j^\dagger a_j=N_j$ 是第 j 种粒子的粒子数算符, 它的本征值 $\geqslant 0$.

证明

设

$$N_j\mid\psi\rangle=r_j\mid\psi\rangle,$$

由于

$$r_j\langle\psi\mid\psi\rangle=\langle\psi\mid N\mid\psi\rangle=\langle\psi\mid a_j^\dagger a_j\mid\psi\rangle=\langle\varphi_j\mid\varphi_j\rangle\geqslant 0,$$

其中, $\mid\varphi_j\rangle=a_j\mid\psi\rangle$, 给出 $r_j\geqslant 0$.

(2) 若 $N_j|r_j\rangle=r_j|r_j\rangle$, 则 $N_ja_j|r_j\rangle=a_j(N_j-1)|r_j\rangle=(r_j-1)a_j|r_j\rangle$, 也就是 $a_j|r_j\rangle$ 是 N_j 的粒子数为 (r_j-1) 的本征态. 考虑到 1 和 2 的结果可以推断, 必定存在

$$|O_j\rangle,\quad \text{使}a_j|O_j\rangle=0\text{成立}.$$

同样可以证明 $a_j^\dagger|r_j\rangle$ 是 N_j 的粒子数为 (r_j+1) 的本征态, 而且

$$\langle r_j|a_ja_j^\dagger|r_j\rangle=\langle r_j|a_j^\dagger a_j+1|r_j\rangle=(r_j+1)\langle r_j|r_j\rangle=r_j+1>0,$$

所以

$$|\varphi'\rangle = a_j^\dagger|r_j\rangle \neq 0.$$

(3) 用这种方法可以构造无穷多个态.

$$|n_j\rangle = \rho_j(a_j^\dagger)^n|O_j\rangle, \quad n = 0, 1, \cdots ,$$

ρ_j 是归一化系数, 它们的粒子数为 $0, 1, \cdots$, 可以为任意非负整数.

(4) 对 m 种粒子情况也类似.

存在一个真空态

$$|O\rangle = |O_1\rangle|O_2\rangle\cdots|O_m\rangle = |O_1O_2\cdots O_m\rangle$$

使 $a_j|O\rangle = 0$. 然后, 可以造出无穷多个态

$$\rho_{s_1s_2\cdots}(a_1^\dagger)^{s_1}(a_2^\dagger)^{s_2}\cdots(a_m^\dagger)^{s_m}|O\rangle = |\psi_{s_1\cdots s_m}\rangle$$

满足 $N_j|\psi_{s_1\cdots s_m}\rangle = S_j|\psi_{s_1\cdots s_m}\rangle$, 这就是玻色子系统:

$$|\psi_{s_1\cdots s_m}\rangle = |S_1\rangle|S_2\rangle\cdots|S_m\rangle$$

粒子数是任意非负整数集合.

2. 令 b_j 和 $b_j^\dagger$, $j = 1, \cdots, m$ 满足

$$[b_j, b_{j'}^\dagger]_+ = \delta_{jj'}, [b_j, b_{j'}]_+ = [b_j^\dagger, b_{j'}^\dagger]_+ = 0 \Rightarrow b_j^2 = {b_j^\dagger}^2 = 0$$

当 $j = j'$ 时, 第二式在玻色子情况是显然的, 不用另加; 在费米子情况必须另加. 我们有以下结果.

(1) N_j 的本征值非负.

$$N_j^2 = b_j^\dagger b_j b_j^\dagger b_j = b_j^\dagger(1 - b_j^\dagger b_j)b_j = b_j^\dagger b_j - b_j^{+2}b_j^2 = b_j^\dagger b_j = N_j,$$

所以 N_j 的本征值 $r_j^2 - r_j = 0 \Rightarrow r_j = 0, 1$.

(2) 唯一可能的表示是 $\{|0_j\rangle, |1_j\rangle\}$, 其中

$$N_j|0_j\rangle = 0, \quad N_j|1_j\rangle = 1;$$

$$b_j|0_j\rangle = 0, \quad b_j^\dagger|0_j\rangle = |1_j\rangle, \quad b_j^\dagger|1_j\rangle = 0;$$

$$b_j|1_j\rangle = b_jb_j^\dagger|0_j\rangle = (1 - b_j^\dagger b_j)|0_j\rangle = |0_j\rangle.$$

证明　先考虑 $|0\rangle$ 态.

令 $b_j|0\rangle = |\varphi\rangle$, $\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle 0|b_j^\dagger b_j|0\rangle = \langle 0|N_j|0\rangle = 0 \Rightarrow b_j|0\rangle = 0$.

令 $b_j^\dagger|0\rangle=|\psi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle=\langle 0|b_jb_j^\dagger|0\rangle=\langle 0|(1-N_j)|0\rangle=1.\Rightarrow|\psi\rangle\neq 0$,

$N_jb_j^\dagger|0\rangle=b_j^\dagger b_jb_j^\dagger|0\rangle=\langle 0|(1-b_jb_j^\dagger)b_j^\dagger|0\rangle=b_j^\dagger|0\rangle\Rightarrow b_j^\dagger|0\rangle$ 的 N_j 本征值为 1, 即 $b_j^\dagger|0\rangle=|1\rangle$. $b_jb_j^\dagger|0\rangle=(1-N_j)|0\rangle=|0\rangle$.

另一方面, 考虑任意的 N_j 本征值为 1 的态 $|1\rangle'$.

令 $b_j|1\rangle'=|\xi\rangle'$, $'\langle\xi|\xi\rangle'='\langle 1|b_j^\dagger b_j|1\rangle'='\langle 1|N_j|1\rangle'=1\Rightarrow|\xi\rangle'\neq 0$.

$N_j|\xi\rangle'=N_jb_j|1\rangle'=b_j^\dagger b_jb_j|1\rangle'=0,\Rightarrow b_j|1\rangle'=|0\rangle'$, $b_j^\dagger|0\rangle'=b_j^\dagger b_j|1\rangle'=|1\rangle'$.

令 $b_j^\dagger|1\rangle'=|\varphi\rangle'$, $'\langle\varphi|\varphi\rangle'='\langle 1|b_jb_j^\dagger|1\rangle'='\langle 1|(1-N_j)|1\rangle'=0\Rightarrow|\varphi\rangle'=0$.

注意：$|0\rangle$ 态和 $|1\rangle$ 态都可能不止一个, 以上构造的是在同一个表示内的 $|0_j\rangle$ 态和 $|1_j\rangle$ 态.

(3) 在多种粒子的情况下, 一般的态为 $|n_1\cdots n_m\rangle$, $n_j=\begin{cases}0,\\1,\end{cases}$ 其中

$$\begin{aligned}|n_1\cdots n_m\rangle&=(b_1^\dagger)^{n_1}\cdots(b_m^\dagger)^{n_m}|O_1\rangle|O_2\rangle\cdots|O_m\rangle\\&=(b_1^\dagger)^{n_1}\cdots(b_m^\dagger)^{n_m}|O_1\cdots O_m\rangle\\&=(b_1^\dagger)^{n_1}\cdots(b_m^\dagger)^{n_m}|O\rangle.\end{aligned}$$

注意：$b_1^\dagger b_2^\dagger=-b_2^\dagger b_1^\dagger$, 所以定义时次序一定要说清楚.

3.2　自旋为 0 的中性粒子场 (K-G 场)

在本节, 我们介绍克莱因–高登 (Klein-Gordon) 场 (K-G 场), 它可以描述标量场.

3.2.1　K-G 场方程

考虑能量动量关系

$$E^2=\vec{p}^2+m^2\quad\Longrightarrow\quad E^2-\vec{p}^2-m^2=0,$$

仿照薛定谔和德布罗意的办法, 把它们变为算子,

$$E\longrightarrow\quad \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},\quad p^j\quad\longrightarrow\quad -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^j}=-\hat{p}_j,$$

作用到一个函数上

$$\left\{\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-\sum_j\left(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^2-m^2\right\}\phi(\vec{x},t)=0,$$

我们得到

$$\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}+m^2\right)\phi(x)=0, \tag{3.2.1}$$

这个方程称为 Klein-Gordon (K-G) 方程,

$$(g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu+m^2)\phi(x)=0 \quad\Longrightarrow\quad (\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi(x)=0.$$

从这个式子可以看出, 在洛伦兹变换下, 令 $x'=ax$, 则 $\phi(x(x'))=\tilde{\phi}(x')$ 是 $(\partial'^\mu\partial'_\mu+m^2)\tilde{\phi}=0$ 的解. 当 a 取空间转动时 ϕ 是标量, 所以对应自旋为 0 的粒子. 这个场方程可由下述 $\mathscr{L}$ 得到

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2-\sum_j(\partial_j\phi)^2-m^2\phi^2\right]=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi-m^2\phi^2). \tag{3.2.2}$$

习题　试由 (3.2.2) 式的 $\mathscr{L}$ 用欧拉–拉格朗日方程导出场方程 (3.2.1). 求证狄拉克场的每个分量都满足 K-G 方程.

3.2.2　K-G 场的量子化

为了把 K-G 场量子化, 我们首先给出它的哈密顿形式, 找出相应的泊松括号, 尤其是基本泊松括号, 然后把它们对应为相应的对易子.

(1) 求出广义动量密度, 得到

$$\Pi_\phi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_t}=\partial_t\phi=\phi_t=\partial_0\phi. \tag{3.2.3}$$

这个拉格朗日量是非奇异的.

(2) 求出基本泊松括号. 当 $t=0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\{\phi(\vec{x},0),\partial_t\phi(\vec{x}',0)\}=\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'),\\&\{\phi,\phi\}=\{\Pi,\Pi\}=0.\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

(3) 求出哈密顿密度：K-G 场的哈密顿密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\Pi\dot{\phi}-\mathscr{L}\\&=(\partial_0\phi)^2-\frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2-\sum_j(\partial_j\phi)^2-m^2\phi^2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[(\partial_0\phi)^2+\sum_j(\partial_j\phi)^2+m^2\phi^2\right].\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}^3 x &= \int \mathrm{d}^3 x \frac{1}{2}[(\partial_0\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \\
&= \int \mathrm{d}^3 x \frac{1}{2}[\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2].
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

场的正则方程是

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}(x') &= \{\phi(x'), H\} = \cdots, \\
\dot{\Pi}(x') &= \{\Pi(x'), H\} = \cdots.
\end{aligned}
\tag{3.2.7}
$$

(4) 量子化.

量子化有以下两个步骤：

① 将场量等变为算子;

② 将泊松括号变为对易子 (玻色子时).

我们得到场算子及动量密度算子的基本对易关系 (等时)：

$$
\text{玻色子}\begin{cases}
\dfrac{1}{\mathrm{i}}[\phi(\vec{x},t), \Pi(\vec{x'},t)] = \delta^3(\vec{x}-\vec{x'}), \\
[\phi,\phi] = [\Pi,\Pi] = 0.
\end{cases}
$$

(5) 求量子场方程. 在第 (5) 部分的求解中, x' 和 x 的时间 t' 与 t 相等：$t'=t$.

① 由

$$
\dot{\phi}(x') = -\mathrm{i}[\phi(x'), H]
$$

利用 $[C,AB]=[C,A]B+A[C,B]$, 得

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}[\phi(x'), H] &= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{1}{2}\right)\{[\phi(x'), \Pi^2(x)] + 0\} \\
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{1}{2}\right)(\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\Pi(x) + \Pi(x)\mathrm{i}\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})) \\
&= \Pi(x') = \dot{\phi}(x').
\end{aligned}
$$

这就是 $\Pi(x')$ 的计算结果.

② 关于 $\Pi(x')$ 的正则方程 (哈密顿方程) 是

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}(x') &= -\mathrm{i}[\Pi(x'), H] \\
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{1}{2}\right)[\Pi(x'), \partial_j\phi(x)\partial_j\phi(x) + m^2\phi(x)\phi(x)] \\
&= -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x \left(\frac{1}{2}\right)\Big\{[\Pi(x'), \partial_j\phi(x)]\partial_j\phi(x) + \partial_j\phi(x)[\Pi(x'), \partial_j\phi(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+m^2[\Pi(x'),\phi(x)]\phi(x)+m^2\phi(x)[\Pi(x'),\phi(x)]\Big\}\\
&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{\partial_j[\Pi(x'),\phi(x)]\partial_j\phi(x)+\partial_j\phi(x)\partial_j[\Pi(x'),\phi(x)]\\
&\quad +2m^2(-\mathrm{i})\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\phi(x)\Big\}\\
&=-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{\big(\partial_j(-\mathrm{i})\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\big)\partial_j\phi(x)\times 2-2m^2(\mathrm{i})\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\phi(x)\Big\}\\
&=\int \mathrm{d}^3x\Big\{\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\partial_j^2\phi(x)-m^2\delta^3(\vec{x}-\vec{x'})\phi(x)\Big\}\ (\text{分部积分})\\
&=\partial_{j'}^2\phi(x')-m^2\phi(x')=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi(x')\right)=\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\phi(x'),\qquad (t=t').
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\sum_j\frac{\partial^2}{\partial x'^{j^2}}+m^2\right)\phi(x')=0,
$$

与经典场方程一致.

(6) 求平面波解.

令 $kx\equiv k_0t-\vec{k}\cdot\vec{x},\quad k_0\geqslant 0$. 并令场的解的形式为平面波 $\phi(\vec{x},t)=a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, 为厄米 (中性粒子) 算子, 代入运动方程得到非零解条件

$$
k_0^2-\vec{k}^2-m^2=0,\quad k_0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2},\quad k_0\equiv\omega_k>0, \tag{3.2.8}
$$

这叫做能壳条件 (on shell).

因此, 一般的解为平面波的叠加

$$
\phi(\vec{x},t)=\int \mathrm{d}^3k\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a_k^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}] \tag{3.2.9}
$$

满足 $\phi(\vec{x},t)=\phi^\dagger(\vec{x},t)$. 动量密度为 $\Pi(\vec{x},t)=\dot{\phi}(\vec{x},t)=\int \mathrm{d}^3k\frac{-\mathrm{i}\omega_k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}-a_k^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]$.

利用场量 ϕ, 场动量密度 Π 的等时对易关系 (一共 3 个), 可以求出 a_k 和 $a_k^\dagger$ 的对易关系：

$$
\begin{aligned}
&[a_k,a_{k'}^\dagger]=\delta^3(k-k')\\
&[a_k,a_{k'}]=[a_k^\dagger,a_{k'}^\dagger]=0.
\end{aligned} \tag{3.2.10}
$$

习题 求证 (3.2.10) 式.

下面我们求哈密顿量的产生、湮灭算子的表达式, 由 (3.2.6) 式得

$$
\begin{aligned}
H =& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x[\Pi^2(x)+(\nabla\phi(x))^2+m^2\phi^2(x)] \\
=& \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\Big\{\int \mathrm{d}^3k\frac{-\mathrm{i}\omega_k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}-a_k^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\int \mathrm{d}^3k'\frac{-\mathrm{i}\omega_{k'}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \\
& -a_{k'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}]+\sum_j\int \mathrm{d}^3k\frac{-\mathrm{i}k_j}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}-a_k^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\int \mathrm{d}^3k'\frac{-\mathrm{i}k'_j}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \\
& -a_{k'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}]+m^2\int \mathrm{d}^3k\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a_k^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\int \mathrm{d}^3k'\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a_{k'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} \\
& +a_{k'}^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}]\Big\}.
\end{aligned}
$$

由等式

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(k+k')x}=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k'})\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(\omega_k+\omega'_k)t}=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}+\vec{k'})\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\omega_k t} \\
&\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(k-k')x}=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})
\end{aligned}
$$

哈密顿量可表示为

$$
\begin{aligned}
H=&\frac{1}{2}\Big\{\int \mathrm{d}^3k\frac{-\omega_k^2}{2\omega_k}[a_ka_{-k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_k t}+a_k^\dagger a_{-k}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_k t}-a_ka_k^\dagger-a_k^\dagger a_k] \\
&+\sum_j\int \mathrm{d}^3k\frac{k_j^2}{2\omega_k}[a_ka_{-k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_k t}+a_k^\dagger a_{-k}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_k t}+a_ka_k^\dagger+a_k^\dagger a_k] \\
&+\int \mathrm{d}^3k\frac{m^2}{2\omega_k}[a_ka_{-k}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega_k t}+a_k^\dagger a_{-k}^\dagger\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_k t}+a_ka_k^\dagger+a_k^\dagger a_k]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

由于 $\omega_k^2=\sum_j k_j^2+m^2$, 带时间指数的项消去, 给出

$$
H=\int \mathrm{d}^3k\left(\frac{1}{2}\right)\omega_k[a_ka_k^\dagger+a_k^\dagger a_k]=\int \mathrm{d}^3k\omega_k[a_k^\dagger a_k+\frac{1}{2}\delta(0)]=\int \mathrm{d}^3k\omega_ka_k^\dagger a_k+E_0,
\tag{3.2.12}
$$

这正是一系列谐振子的哈密顿量的叠加. 因为 $a_k^\dagger a_k$ 是粒子数算符, 能量可以看成一系列自由粒子的能量之和.

3.3 电磁场 (自旋为 1 的场)

本节我们研究自由电磁场即光子场的运动规律. 光子场的场量电磁势 A_μ 是闵氏空间的 4–矢量, 它在转动下形成角动量为 1 的表示, 对应自旋为 1 的粒子.

3.3.1　电磁场方程与洛伦兹规范下的量子化

我们知道, 电磁场可以由四维矢量势描述, $A = \{A_0, \vec{A}\}$ 其中 A_0 为标量势, 矢量势 $\vec{A}$ 的 j 分量 $A^j = -A_j$. 而电场和磁场可以由矢量势的微商给出：$\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \nabla A_0$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

电磁场可以写成张量形式. 令

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.3.1}$$

则电场强度和磁感应强度为

$$\begin{aligned}
&E^i = -F^{0i},\\
&B^i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk},\quad B^1 = -F_{23},\quad \epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1,\\
&\epsilon^{132} = \epsilon^{321} = \epsilon^{213} = -1, \text{其余为 } 0.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

其中, $F^{\mu\nu}$ 是二阶四维张量, 它的上下指标关系是

$$F_{\mu\nu} = F^{\mu'\nu'}g_{\mu'\mu}g_{\nu'\nu},\quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \to F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

麦克斯韦方程组可以用张量公式给出,

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu,\quad j_0 = \rho,\quad j^k \to \vec{j}, \tag{3.3.3}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \tag{3.3.4}$$

这里 $j^1 = j_x$, $j^2 = j_y$, $j^3 = j_z$, $j^l = -j_l$.

四维流密度 j^μ 遵守流守恒律

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}j_x + \frac{\partial}{\partial y}j_y + \frac{\partial}{\partial z}j_z = 0,$$

其中, $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu = \partial_{\mu'}g^{\mu'\mu}$.

由于有

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{3.3.5}$$

因此, (3.3.4) 式总可以满足, 而 (3.3.3) 式变为

$$\partial^2 A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = j_\nu,\quad \partial^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu. \tag{3.3.6}$$

为了导出 (3.3.3) 式, 我们可以令拉格朗日密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu, \tag{3.3.7}$$

欧拉–拉格朗日方程就给出 (3.3.3) 式.

习题 由 (3.3.7) 式用欧拉–拉格朗日方程导出 (3.3.3) 式.

在洛伦兹变换下, 矢势 A_μ 是洛伦兹矢量, 在转动中形成角动量为 1 的表示, 因此 A_μ 描写自旋为 1 的粒子. 由 (3.3.5) 式来看, 当 $F_{\mu\nu}$ 给定时, A_μ 并不唯一确定, 当 A_μ 作变换

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad \lambda \text{ 是 } x \text{ 的任意函数}$$

时 $F_{\mu\nu}$ 并不改变. 这种变换称为规范变换. 由于 $\lambda(x)$ 是任意的, 所以给定 $t=0$ 时的 $A_\mu(0,\vec{x})$ 和 $\dot{A_\mu}(0,\vec{x})$, 可以有无数个解满足运动方程 (3.3.6). 因此, 必须另外给一些条件才行. 这些条件称为规范固定. 比如适当选取 λ, 可以在给定 $F_{\mu\nu}$ 情况下找到满足

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0 \tag{3.3.8}$$

的 A_μ. (3.3.8) 式称为洛伦兹条件. 在这种条件下 (3.3.6) 式变为

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = j_\nu. \tag{3.3.9}$$

方程 (3.3.9) 用对时空的偏微商写出来就是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_\nu(x,y,z,t) = j_\nu, \quad \nu = 0,1,2,3.$$

可令拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu) - j^\nu A_\nu \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu g^{\mu\mu'} \partial_{\mu'} A^{\nu'} g_{\nu'\nu}) - j^\nu A_\nu \\
&= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \text{全微分},
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

与前面的拉格朗日密度 (3.3.7) 式比较, 多了一项 $-\dfrac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$, 这一项称为规范固定项. 我们可以写成一般形式 $\alpha(\partial_\mu A^\mu)^2$. 当我们把 α 看成动力学量时, 作用量原理 $\dfrac{\delta S}{\delta \alpha} = 0$就给出洛伦兹条件. 这个拉格朗日密度是洛伦兹不变的, 其系数的选取正好使求出的能量动量密度与物理一致. 由它可以导出场方程 (3.3.9), 即

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = j_\nu.$$

对于真空中的电磁场, $j^\nu = 0$, 这时场方程变为

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = 0, \tag{3.3.11}$$

形式上与 K-G 方程一样, 只是 m=0.

相应地我们可以把 $\mathscr{L}$ 写成

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A^{\nu'} g_{\nu'\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_\nu (\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A^\nu g_{\nu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_\nu g_{\nu\nu}(\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A^\nu) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A^0 \partial^\mu A^0 - \sum_j \partial_\mu A^j \partial^\mu A^j\right),\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

这是四个场量的分离的拉格朗日量：

$$\mathscr{L} = -\mathscr{L}_0 + \sum_j \mathscr{L}_j, \quad j = 1,2,3. \tag{3.3.13}$$

每个 $\mathscr{L}_\mu$ 代表一种 $m=0$ 的 K-G 场的拉格朗日量, 但是 $\mu=0$ 的项有一负号. 套用 K-G 场的已知结果, 我们得到

$$A_\mu = \int \mathrm{d}^3 k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}}\left[a_\mu(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a_\mu^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right], \tag{3.3.14}$$

这里

$$\omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + 0} = k \quad (m=0), \tag{3.3.15}$$

其中, 产生算符和湮灭算符的对易子为

$$\begin{aligned}&[a_j(\vec{k}), a_{j'}^\dagger(\vec{k'})] = \delta_{jj'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \\ &[a_0(\vec{k}), a_0^\dagger(\vec{k'})] = -\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}), \\ &[a_j(\vec{k}), a_0^\dagger(\vec{k'})] = 0, \\ &[a,a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0.\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

由此可见, 不同 $\vec{k}$ 的算子之间对易子总是为 0, 他们是互相独立的.

哈密顿量为

$$\begin{aligned}H &= \sum_j H_j - H_0, \\ H_j &= \int \mathrm{d}^3\vec{k}\omega_k\left(a_j^\dagger(k)a_j(k) + \frac{1}{2}\delta(0)\right), \\ H_0 &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{k}\omega_k\left(a_0^\dagger(\vec{k})a_0(\vec{k}) + a_0(\vec{k})a_0^\dagger(\vec{k})\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}^3\vec{k}\omega_k \left(a_0^\dagger(\vec{k})a_0(\vec{k}) - \frac{1}{2}\delta(0)\right), \\
H &= \int \mathrm{d}^3\vec{k}\omega_k \left(\sum_j a_j^\dagger(\vec{k})a_j(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k})a_0(\vec{k})\right) + \text{const.}
\end{aligned} \tag{3.3.17}
$$

这个哈密顿量使能量没有下界, 但是在考虑了洛伦兹条件之后是有下界的.

3.3.2 偏振矢量 $\boldsymbol{\epsilon(\vec{k},\lambda)}$

由于不同 $\vec{k}$ 的场算子互相独立 (见 (3.3.16) 式), 我们可以在 $\vec{k}$ 给定的情况下研究电磁场的一个子系统. 考虑一个空间转动 R, 它把 $\vec{k}$ 方向转到 z 方向, 把与 $\vec{k}$ 垂直的两个方向分别转到 x 方向和 y 方向. 我们把以 $\vec{k}$ 方向为第三方向 (z 方向) 的系统称为 α 系统, 而把现在考察的系统称为 β 系统.

在 α 系统中设定四个逆变单位矢量 $\epsilon(\vec{k},\lambda), \lambda = 0,1,2,3$(也可以认为是四个点 P_λ, ϵ 的分量是这些点的坐标 $x^\mu(P_\lambda)$, 逆变矢量是指标在上边的矢量).

$$
\epsilon(\vec{k},\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3.18}
$$

四维逆变矢量 k 在 α 系统是

$$
k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}. \tag{3.3.19}
$$

我们有闵氏空间的内积 $k \cdot \epsilon(\vec{k},\lambda) = k_\mu \epsilon^\mu(\vec{k},\lambda)$,

$$
k \cdot \epsilon(\vec{k},0) = k, k \cdot \epsilon(\vec{k},1) = 0, \quad k \cdot \epsilon(\vec{k},2) = 0, k \cdot \epsilon(\vec{k},3) = -k. \tag{3.3.20}
$$

上述转动 R 的逆是一个洛伦兹变换, 它把 $\epsilon(\vec{k},0), \cdots, \epsilon(\vec{k},3)$ 分别变为 (相当于 P_λ 的新坐标)

$$
\epsilon^\mu(\vec{k},\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_1^x \\ e_1^y \\ e_1^z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_2^x \\ e_2^y \\ e_2^z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e_3^x \\ e_3^y \\ e_3^z \end{pmatrix}. \tag{3.3.21}
$$

这也就相当于给出四个点 P_λ 的新坐标 $x'^\mu(P_\lambda)$.

其中, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是在 β 系统中的三维空间的互相垂直的单位矢量, 而且 $\vec{e_3} = \vec{k}/\sqrt{\vec{k}^2}$ 是 $\vec{k}$ 方向的单位矢量. 把 4–矢量 $\vec{k}$ 变为

$$k^\mu = \begin{pmatrix} k \\ k^1 \\ k^2 \\ k^3 \end{pmatrix}. \tag{3.3.22}$$

洛伦兹变换矩阵为

$$[a^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ 0 & e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ 0 & e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{pmatrix}. \tag{3.3.23}$$

因此, $a^\mu{}_\lambda = \epsilon(\vec{k}, \lambda)$ 矢量的新坐标 $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda), \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$ 由 (3.3.21) 式给出.

我们把在 α 系统中的场算子表为

$$\hat{a}^\lambda(\vec{k}) = a(\vec{k}, \lambda) \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3). \tag{3.3.24}$$

由于电磁场是矢量场, 在 β 系统的场算子 $a^\mu(\vec{k})$ 与 $\hat{a}^\lambda(\vec{k})$ 的关系是

$$a^\mu(\vec{k}) = a^\mu{}_\lambda \hat{a}^\lambda(\vec{k}) = a^\mu{}_\lambda a(\vec{k}, \lambda) = \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) a(\vec{k}, \lambda),$$

其中, $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$ 是 ϵ 矢量的新坐标 (3.3.21) 式. 我们把 4–矢量 $\epsilon(\vec{k}, \lambda)$ 称为极化矢量.

洛伦兹变换不改变场算子的对易关系, 因为洛伦兹条件和场的作用量都是相对论不变的, 因此有

$$\begin{aligned} &[a(\vec{k}, j), a^\dagger(\vec{k}', j)] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad j = 1, 2, 3, \\ &[a(\vec{k}, 0), a^\dagger(\vec{k}', 0)] = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

其余对易子为 0.

(3.3.14) 式可以写成

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= \sum_\lambda \int \mathrm{d}^3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}} \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) \left[a(\vec{k}, \lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(\vec{k}, \lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right] \\ &\equiv \sum_\lambda A_\mu^\lambda(x), \end{aligned} \tag{3.3.26}$$

容易验证, 当 $\lambda = 1, 2$, $A_\mu^\lambda(x)$ 符合洛伦兹条件 $\partial^\mu A_\mu^\lambda = 0$, 这时有 $k^\mu \epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda) = 0$. 而当 $\lambda = 0$ 时 (标量光子) 和 $\lambda = 3$ 时 (纵光子) 不符合洛伦兹条件. 实验上只观测到 $\lambda = 1, 2$ 的横光子, 而看不到纵光子和标量光子, 这需要假定在真实的物理态中, 这两种光子的效应正好抵消. 为此, 我们介绍 Gupta-Bleuler 方法.

3.3.3 Gupta-Bleuler(G-B) 方法

在场的正则量子化过程中, 我们把电磁场展开为振子 $a_\mu(\vec{k})$ 和 $a_\mu^\dagger(\vec{k})$ 形成的平面波叠加. 而 a_μ 和 $a_\mu^\dagger$ 作用的空间的基矢是振子的真空态 $|0\rangle$. 以产生算符 $a_\mu^\dagger(\vec{k})$ 的幂次作用得到的所有态, 这个空间称为 Fock 空间.

Gupta 和 Bleuler 认为物理态只是 Fock 空间的一个子空间. 他们假定物理态 $|\varphi\rangle$ 满足:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x)|\varphi\rangle = 0 \tag{3.3.27}$$

和

$$\langle\varphi|\partial^\mu A_\mu^{(-)}(x) = 0 \quad \text{这是相对论协变的,} \tag{3.3.28}$$

其中, $A_\mu^{(+)}(x)$ 和 $A_\mu^{(-)}(x)$ 分别是 $A_\mu(x)$ 平面波展开中的正频和负频部分, 即指数部分为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 的部分,

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x), \quad (A_\mu^{(+)})^\dagger = A_\mu^{(-)}.$$

因而有

$$\langle\varphi|\partial^\mu A_\mu(x)|\varphi\rangle = \langle\varphi|\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x) + \partial^\mu A_\mu^{(-)}(x)|\varphi\rangle = 0.$$

也就是场在物理态的平均值满足洛伦兹条件. 由此也可以推导场在任意两个物理态间的矩阵元满足洛伦兹条件 $\langle\psi|\partial^\mu A_\mu(x)|\varphi\rangle = 0$.

习题 证明: 当对任意态 $|x\rangle$ 总有 $\langle x|\partial^\mu A_\mu(x)|x\rangle = 0$ 时, 则对任意 $\langle\varphi|$ 和 $|\varphi\rangle$ 也有 $\langle\psi|\partial^\mu A_\mu(x)|\varphi\rangle = 0$.

(3.3.27) 式左边是

$$\begin{aligned}
&\partial^\mu \int \mathrm{d}^3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \sum_{\lambda=0}^{3} \epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda)|\varphi\rangle = 0 \\
&= \int \mathrm{d}^3k \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \sum_{\lambda=0}^{3} -\mathrm{i}k^\mu \epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) a(\vec{k},\lambda)|\varphi\rangle.
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

由于洛伦兹变换不改变内积, (3.3.20) 式给出

$$\begin{aligned}
&\lambda = 1, 2\text{时}, k^\mu\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) = 0, \\
&\lambda = 3\text{时}, k^\mu\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) = -k, \\
&\lambda = 0\text{时}, k^\mu\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda) = k.
\end{aligned}$$

所以 (3.3.27) 式意味着

$$[a(\vec{k},0) - a(\vec{k},3)]|\varphi\rangle \equiv L_k|\varphi\rangle = 0.$$

同理 (3.3.28) 式要求:

$$\langle\varphi|[a^\dagger(\vec{k},0)-a^\dagger(\vec{k},3)]=\langle\varphi|L_k^\dagger=0.$$

注意不可令 $a(\vec{k},0)=a(\vec{k},3)$, 否则会使其对易关系式 (3.3.25) 矛盾.

由这些关系, 可导出

$$\langle\varphi|a^\dagger(k,0)a(k,0)|\varphi\rangle=\langle\phi|a^\dagger(k,3)a(k,3)|\varphi\rangle.$$

因此, 能量的平均值为

$$\begin{aligned}\langle\varphi|\hat{H}|\varphi\rangle&=\int \mathrm{d}^3k\omega_k\Bigg(\sum_{\lambda=1}^{2}\langle\varphi|a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda)|\varphi\rangle\\&\quad+\langle\varphi|a^\dagger(k,3)a(k,3)-a^\dagger(k,0)a(k,0)|\varphi\rangle\Bigg)\\&=\int \mathrm{d}^3k\omega_k\sum_{\lambda=1}^{2}\langle\varphi|\underbrace{a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda)}_{N(k,\lambda)}|\varphi\rangle.\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

也就是只有横光子才对能量的平均值有贡献.

证明　由

$$[a(\vec{k},3)-a(\vec{k},0)]|\varphi\rangle=0$$

得

$$a(\vec{k},3)|\varphi\rangle=a(\vec{k},0)|\varphi\rangle.$$

类似地有

$$\langle\varphi|a^\dagger(\vec{k},3)=\langle\varphi|a^\dagger(\vec{k},0),$$

由此得到

$$\langle\varphi|a^\dagger(\vec{k},3)a(\vec{k},3)|\varphi\rangle=\langle\varphi|a^\dagger(\vec{k},0)a(\vec{k},0)|\varphi\rangle,$$

给出

$$\langle\varphi|\hat{H}|\varphi\rangle=\int \mathrm{d}^3k\omega_k\sum_{\lambda=1}^{2}\langle\varphi|a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda)|\varphi\rangle.\tag{3.3.31}$$

第 4 章　微扰论和相互作用场

我们在前面介绍的是自由场. 它们的拉格朗日密度是场量的二次式, 因此运动方程是线性方程. 在量子化后, 这种场可以看成是由没有相互作用的自由粒子形成的. 当拉格朗日密度不是场量的二次式的时候, 场的运动方程是非线性的. 粒子之间就有相互作用, 处理起来就困难多了. 当二次式以外的部分是小量的时候, 可以用微扰论的方法来处理. 在这一章, 我们介绍微扰论和相互作用场.

我们首先介绍非自由场的例子.

4.1　两个非自由场的例子

为了作计算微扰论中的 S 矩阵元的准备, 我们将具体介绍两种非自由场.

4.1.1　ϕ^4 场论

考虑一个有如下拉格朗日密度的场

$$\mathscr{L} \quad = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2) - gV(\phi) = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I, \tag{4.1.1}$$

其中,

$$gV(\phi) = \frac{g}{4!}\phi^4.$$

因此有

$$\begin{aligned} &H = H_0 + H_I, \quad \mathscr{H} = \pi\dot{\phi} - \mathscr{L}. \quad H_0\text{已如前所述 (见标量场,3.2 节)}. \\ &\Rightarrow \mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = \frac{g}{4!}\phi^4, \quad H_I = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}_I. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$\mathscr{H}_I$ 是场量的四次式. 类似地, 还可以有 ϕ^3 场论, ϕ^5 场论, $\phi^3+\phi^5$ 场论等.

4.1.2　电动力学

再考虑电动力学对应的场的拉格朗日密度, 它是自由电磁场和电子场的拉格朗日密度再加相互作用项：

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu) - m)\psi \\ &= \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi}_{\mathscr{L}_0} - \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\mathscr{L}_I} \\ &= \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

这个式子在总结单圈图重整化的 6.6.4 节中还要再提到. 其中, $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}_{光子} + \mathscr{L}_{电子}$, $\alpha(\partial^\mu A_\mu)^2$ 是规范固定项, 当把 α 当做动力学变量, 拉格朗日方程 $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha} = 0$, 即 $\dfrac{\delta S}{\delta\alpha} = 0$, 给出洛伦兹规范条件 $\partial^\mu A_\mu = 0$.

取 $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ 给出前面 (3.3.12) 式光子的拉格朗日密度. (4.1.3) 式中只有 $\mathscr{L}_I$ 是场量的三次式, 所以哈密顿量为

$$H = H_0 + H_I,$$

其中, $H_I = \displaystyle\int \mathrm{d}^3x \mathscr{H}_I$. 哈密顿密度为

$$\begin{aligned}&\mathscr{H} = \pi_{A_\mu}\dot{A}_\mu + \pi_\psi\dot{\psi} - \mathscr{L}_0 - \mathscr{L}_I = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_I,\\ &\Rightarrow \mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

是场量的三次式.

从 (4.1.3) 式看出

如果 $A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x)$, $\lambda(x)$ 是实数, 且 $\partial_\mu\partial^\mu\lambda = 0$, 并令 $\psi(x) \longrightarrow \psi\,'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi(x)$, 则有

$$\psi^\dagger(x) \longrightarrow \psi^{\dagger'}(x) = \psi^\dagger(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\lambda(x)} \Longrightarrow \mathscr{L}_I + \mathscr{L}_{电子}\text{不变}$$

(由于 $\partial_\mu\partial^\mu\lambda = 0$, 当规范固定项 $\dfrac{\delta S}{\delta\alpha} = 0$ 给出洛伦兹规范条件时, (4.1.3) 式中的光子部分 $\mathscr{L}_{光子} = -\dfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial_\mu A^\mu)^2$ 在变换前后不变).

证明 由

$$\begin{aligned}(\partial_\mu + \mathrm{i}eA'_\mu)\psi' &= (\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu(x) + \mathrm{i}e\partial_\mu\lambda(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi(x)\\ &= -\mathrm{i}e\partial_\mu\lambda(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi(x) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\partial_\mu\psi(x)\\ &\quad + \mathrm{i}eA_\mu(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi(x) + \mathrm{i}e\partial_\mu\lambda(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi(x)\\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu(x))\psi(x)\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA'_\mu)\psi' &= \bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\lambda(x)}\mathrm{i}\gamma^\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\psi\\ &= \bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\psi.\end{aligned}$$

□

令 $\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu = \mathscr{D}_\mu$, 我们看到

$$\begin{aligned}&\mathscr{D}'_\mu\psi\,' = \mathscr{D}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\mathscr{D}_\mu\psi\\ \Longrightarrow\quad &\mathscr{D}'_\mu\mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\mathscr{D}_\mu\\ &\mathscr{D}'_\mu = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\mathscr{D}_\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\lambda(x)}.\end{aligned}$$

因此, ψ 上的相因子与 x 有关的改变如果伴随着 A_μ 的一个适当改变, 可以使 $\mathscr{D}_\mu$ 进行一个相似变换, 从而最终使作用量不变, 这种变换称为规范变换, A_μ 称为与之相应的规范场.

以下我们对 (4.1.3) 式中 $\mathscr{L}_I$ 的来源做一些说明.

(1) 有源电磁场的方程是

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{4.1.5}$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \tag{4.1.6}$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + cyc = 0. \tag{4.1.7}$$

要得到有源电磁场的方程, 只要在无源电磁场的拉格朗日密度中加上一项 $\mathscr{L}_I = -j_\mu A^\mu = -j^\mu A_\mu$ 就可以了, 这样拉格朗日密度变为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial^\mu A_\mu)^2 - j^\nu A_\nu. \tag{4.1.8}$$

证明如下. 由欧拉拉格朗日方程就得到 (对 A_ν 变分)

$$\partial_\mu\left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}\right)\times 4-(-j^\nu)+2\alpha\partial^\nu(\partial^\mu A_\mu) = 0 \Longrightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} - 2\alpha\partial^\nu(\partial^\mu A_\mu) = j^\nu. \tag{4.1.9}$$

当 A_μ 满足洛伦兹条件

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \tag{4.1.10}$$

时, (4.1.6) 式成立. 而 (4.1.7) 式总是成立的, 因为

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + cyc &= (\partial_\mu\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda\partial_\mu A_\nu) + cyc \\ &= \partial_\mu\partial_\nu A_\lambda + cyc - (\partial_\lambda\partial_\mu A_\nu + cyc) \\ &= \partial_\mu\partial_\nu A_\lambda + cyc - (\partial_\mu\partial_\nu A_\lambda + cyc) \\ &= 0,\end{aligned}$$

所以, 如果要求 $F_{\mu\nu}$ 是由 (4.1.5) 式给出的话, (4.1.7) 式总成立, $F_{\mu\nu}$ 不能任意设定, 这是结构方程. 另一方面, (4.1.6) 式是由对作用量变分得到的, 这是运动方程. 还有洛伦兹条件是约束方程, 这三类方程是有区别的. 以上是电磁场方程.

(2) 从电子场的角度来看, 添加 $\mathscr{L}_I = -j_\mu A^\mu$ 正好符合电子运动受电磁力影响的要求. 对于带电物体所受电磁力的影响, 经典电动力学给出：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}, \quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

其中, $\vec{p}$ 和 ε 是带电粒子的动量和能量. 由洛伦兹力的公式, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} &= Q\vec{v}\times\vec{B} + Q\vec{E} + \vec{F}_0 = \vec{J}\times\vec{B} + Q\vec{E} + \vec{F}_0, \\ \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} &= Q\vec{E}\cdot\vec{v} + \vec{F}_0\cdot\vec{v} = \vec{E}\cdot\vec{J} + \vec{F}_0\cdot\vec{v}.\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

其中, $\vec{v}$ 是带电粒子的速度, $\vec{F_0}$ 是除电磁力以外的其他力.

我们知道动力学方程可以由拉格朗日方程得到,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

下面我们看到, 只要在 L 中加上 $-J_\mu A^\mu$, 就可以把电磁场对带电粒子的作用包括在内. 其中,

$$J_\mu A^\mu = J^\mu A_\mu = Qv^j A_j + QA_0 = Q\dot{q_{(j)}} A_j + QA_0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{4.1.12}$$

并且令第 j 个广义坐标 $q_{(j)} = x^j$, $\dot{x}^j = v^j = \dot{q}_{(j)}$. 以下是证明.

带电粒子的拉格朗日量 $L = L_0 - J^\mu A_\mu = L_0 - Q\dot{q}_{(j)} A_j - QA_0 = L_0 - Qv^i A_i - QA_0$. 拉格朗日方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\underbrace{\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_{(j)}}}_{\text{动量}p_{(j)}\neq\text{正则动量}}\Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-QA_j) - \underbrace{\frac{\partial L_0}{\partial q_{(j)}}}_{(-\vec{F}_0)_j} + Qv^i \frac{\partial A_i}{\partial q_{(j)}} + Q\frac{\partial A_0}{\partial q_{(j)}} = 0.$$

在这里我们定义三维矢量 $(\vec{F}_0)_{(1)} = (F_0)_x, \cdots, (\vec{E})_{(1)} = E_x = E^1, \cdots$. 方程左边第一项为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{(j)}$.

另一方面由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_j = \frac{\partial}{\partial t}A_j + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}A_j, \quad q_{(j)} = x^j,$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{(j)} &= \overbrace{Q\frac{\partial}{\partial x^0}A_j + \underbrace{Qv^i\frac{\partial}{\partial x^i}A_j - Qv^i\frac{\partial A_i}{\partial x^j}}_{(Q\vec{v}\times\vec{B})_{(j)}} - Q\frac{\partial A_0}{\partial x^j}}^{(Q\vec{E})_{(j)}} + \underbrace{\frac{\partial L_0}{\partial x^j}}_{(\vec{F}_0)_{(j)}} \\ &= (Q\vec{E})_{(j)} + (Q\vec{v}\times\vec{B})_{(j)} + (\vec{F}_0)_{(j)}.\end{aligned}$$

(洛伦兹力 $\vec{F} = Q\vec{E} + Q\vec{v}\times B$) 正好与电荷在电磁场中受力相同. 因此, 只要令 $L_0 \longrightarrow L_0 - J^\mu A_\mu$, 就可以使电荷受电磁力自动包括在其中了.

综合这两者来看, 只要在拉格朗日量中加上 $-J^\mu A_\mu$ 项, 就可以描述电磁相互作用. 这在场论中, 就是加上一项 $\mathscr{L}_I = -j^\mu A_\mu, j^\mu$ 是四维电流密度, 等于 $J^\mu/$(体积元).

验算: 由 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

$$B^3 = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = -\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1 = -F_{12}, \quad B^2 = -F_{31} = -\partial_3 A_1 + \partial_1 A_3,$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{v}\times\vec{B})_{(1)} &= v^2B^3 - v^3B^2 \\
&= -v^2F_{12} + v^3F_{31} \\
&= -v^2(\partial_1A_2 - \partial_2A_1) + v^3(\partial_3A_1 - \partial_1A_3) \\
&= -v^2\partial_1A_2 + v^2\partial_2A_1 + v^3\partial_3A_1 - v^3\partial_1A_3 \\
&= -v^1\partial_1A_1 - v^2\partial_1A_2 - v^3\partial_1A_3 + v^1\partial_1A_1 + v^2\partial_2A_1 + v^3\partial_3A_1 \\
&= -v^i\partial_1A_i + v^i\partial_iA_1.
\end{aligned}
$$

可以证明, 对于电子场 $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $e=-|e|$. 因此, 整个电磁场与电子场的作用量就是

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_{\text{自由光子}} + \mathscr{L}_{\text{自由电子}} + \mathscr{L}_I \\
&= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \qquad (4.1.13) \\
&= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \alpha(\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu) - m)\psi.
\end{aligned}
$$

结论是, 只要在物质场的拉格朗日密度中把微分算符改变为规范协变微分算符: $\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu$ 就包含了电子场与电磁场的相互作用.

如前所述, 如果场量作如下规范变换

$$
\begin{aligned}
\psi &\longrightarrow \psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\lambda(x)}\psi, \\
\bar{\psi} &\longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}e\lambda(x)}, \\
A_\mu &\longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda,
\end{aligned} \qquad (4.1.14)
$$

并且 $\partial_\mu\partial^\mu\lambda = 0$, 则拉格朗日密度不变

$$
\mathscr{L}(A_\mu,\psi) = \mathscr{L}(A'_\mu,\psi'). \qquad (4.1.15)
$$

4.2 微 扰 论

第 3 章讲的是自由场: $\mathscr{L}$ 是场量的二次函数, 场方程式是线性的, 可以用平面波叠加, 可以严格求解. 如果 $\mathscr{L}$ 中有三次以上的项, 方程是非线性的, 问题就很困难. 当这些三次以上的各项是小量时, 我们可以用微扰论来处理.

4.2.1 相互作用的微扰展开

在体系由哈密顿形式表达时, 我们把哈密顿量分为两部分

$$
H = H_0 + H_I = H_0(0) + H_I(0),
$$

其中, H_I 是作为微扰部分的小量, 而 H_0 代表自由场的哈密顿量. 在第 2 章 2.1 节中我们知道正则量子化可以取三种表象.

(1) 在海森伯绘景中, 我们有

$$\begin{aligned}&|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle,\\&O(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht},\end{aligned}$$

力学量的矩阵元是

$$\langle\psi_1(t)|O(t)|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi_2(0)\rangle.$$

(2) 在薛定谔绘景中, 我们有

$$\begin{aligned}&|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi(0)\rangle,\\&O(t) = O(0),\end{aligned}$$

力学量的矩阵元是

$$\langle\psi_1(t)|O(t)|\psi_2(t)\rangle = \langle\psi_1(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi_2(0)\rangle.$$

(3) 在相互作用表象中, 有

$$\begin{aligned}&|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi(0)\rangle\\&O(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}O(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t},\end{aligned}$$

力学量矩阵元是

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(t)|O(t)|\psi_2(t)\rangle &= \langle\psi_1(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}O(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi_2(0)\rangle\\&= \langle\psi_1(0)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}O(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi_2(0)\rangle.\end{aligned}$$

因此, 三个表象的矩阵元是相同的. 我们可以用任何一个来计算我们需要的结果.

在微扰论中我们用相互作用表象, 这时力学量 (场量和它们的代数函数) 与自由场时一样, 遵从自由场的方程:

$$\dot{O}_I(t) = \frac{1}{\mathrm{i}}[O_I(t), H_0], \quad H_0(t) = H_0(0) = H_0.$$

而态矢量则遵从

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle_I &= \mathrm{i}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}(\mathrm{i}H_0 - \mathrm{i}H)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi(0)\rangle\Big)\\&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}H_I(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|\psi(0)\rangle\\&= H_I(t)|\psi(t)\rangle_I,\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

其中

$$H_I(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t} H_I(0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t}. \tag{4.2.2}$$

不同时间的态矢量之间可以用幺正变换联系,

$$|\psi(t_1)\rangle_I = U(t_1, t_2)|\psi(t_2)\rangle_I, \quad U(t_1, t_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0 t_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0 t_2} \tag{4.2.3}$$

此幺正变换满足

$$\frac{\partial}{\partial t_1}U(t_1, t_2) = -\mathrm{i}H_I(t_1)U(t_1, t_2), \tag{4.2.4}$$

$$U(t_2, t_2) = I \quad (\text{identity}), \tag{4.2.5}$$

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3), \tag{4.2.6}$$

$$U(t_1, t_2)^{-1} = U(t_2, t_1) = U^\dagger(t_1, t_2). \tag{4.2.7}$$

习题 证明 $U(t_1, t_2)$ 的性质 ((4.2.4) 式 ~(4.2.7) 式).

根据 (4.2.4) 式, 可以用迭代方法计算 $U(t_1, t_2)$, 得到

$$\begin{aligned}
U(t_1, t_2) =& U(t_2, t_2) + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_2) \\
=& I + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t(-\mathrm{i})H_I(t)U(t, t_2) \\
=& I + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t(-\mathrm{i})H_I(t)[I + \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t'(-\mathrm{i})H_I(t')U(t', t_2)] \\
=& I + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t(-\mathrm{i})H_I(t) + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t'(-\mathrm{i})H_I(t)(-\mathrm{i})H_I(t')U(t', t_2) \\
=& I + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t(-\mathrm{i})H_I(t) + \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t'(-\mathrm{i})^2 H_I(t)H_I(t') \\
& \times[I + \int_{t_2}^{t'} \mathrm{d}t''(-\mathrm{i})H_I(t'')U(t'', t_2)] \\
=& I + (-\mathrm{i})\int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t H_I(t) + (-\mathrm{i})^2 \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t' H_I(t)H_I(t') \\
& +(-\mathrm{i})^3 \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{t_2}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_2}^{t'} \mathrm{d}t'' H_I(t)H_I(t')H_I(t'') + \cdots .
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

注意：被积函数中总有 $t > t' > t'' \cdots$.

积分区间为：$t_2 \to t_1, t_2 \to t, t_2 \to t', t_2 \to t'', \cdots$

引入编时算符：

$$
\begin{aligned}
&T[A_1(t_1)A_2(t_2)\cdots A_n(t_n)] \\
&=A_{j_1}(t_{j_1})A_{j_2}(t_{j_2})\cdots A_{j_n}(t_{j_n})(-1)^l, \quad t_{j_1}>t_{j_2}>t_{j_3}\cdots>t_{j_n},
\end{aligned}
\tag{4.2.9}
$$

其中, l 是在重新排列过程中费米场之间交换的次数. 由于 $H_I(t)$ 总是由偶数个费米场组成的, 可以令 $l=0$. 我们可以把 $U(t_1,t_2)$ 写成

$$
\begin{aligned}
U(t_1,t_2)&=\sum_n \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{t_2}^{t_1}\mathrm{d}t'\mathrm{d}t''\cdots\mathrm{d}t^{(n)}T[H_I(t')H_I(t'')\cdots H_I(t^{(n)})] \\
&=T\exp\left[-\mathrm{i}\int_{t_2}^{t_1}\mathrm{d}tH_I(t)\right].
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

定义 S 矩阵为 $t_1\to\infty$, $t_2\to-\infty$ 时的 $U(t_1,t_2)$:

$$
\begin{aligned}
S=U(\infty,-\infty)&=T\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}tH_I(t)\right] \\
&=T\Pi_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_I(t_i)\Delta t}).
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

在场论中, 哈密顿量为

$$
H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^3x\mathscr{H}(\vec{x}).
$$

设其中 $\mathscr{H}$ 可以分为两部分

$$
\mathscr{H}(\vec{x})=\mathscr{H}_0(\vec{x})+\mathscr{H}_I(\vec{x}).
$$

我们令

$$
\mathscr{H}_I(t,\vec{x})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathscr{H}_I(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t}, \quad H_0=\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_0(\vec{x}),
$$

使相互作用表象的 $H_I(t)$ 为

$$
H_I(t)=\int\mathrm{d}^3x\mathscr{H}_I(t,\vec{x}).
$$

于是有

$$
S=T\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x\mathscr{H}_I(t,\vec{x})\right]=T\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x\mathscr{H}_I(x)\right].
\tag{4.2.12}
$$

4.2.2　S 矩阵、入射和出射态

我们引入一个物理假设: 在 $t=\pm\infty$ 时, $H=H_0$, 这时, 粒子是自由粒子, 再令, $|\psi(\pm\infty)\rangle_I$ 是当时相互作用表象的粒子数算子 $a^\dagger a(\infty)$ 和 $a^\dagger a(-\infty)$ 的本征态. 它们也是 0 时刻的 $a^\dagger a$ 的本征态.

习题　试证明在相互作用表象中粒子数 $a^\dagger a(t)$ 的本征态 $|\psi\rangle$ 对各个时间 t 可以是同一个态.

因而可以取入射态为

$$|\psi(-\infty)\rangle_I = |\vec{k_1}, \vec{k_2}, \cdots\rangle_{\text{in}} = |\text{in}\rangle = a^\dagger(\vec{k_1})\cdots b^\dagger(\vec{p_n}, s_n)|0\rangle = |i\rangle, \tag{4.2.13}$$

出射态为

$$(|\psi(\infty)\rangle_I)^\dagger =_{\text{out}} \langle\vec{k_1'}, \vec{k_2'}, \cdots| = \langle out| = \langle 0|a(\vec{k_1'})\cdots b(\vec{p}\,'_m, s'_m) = \langle f|. \tag{4.2.14}$$

$a, b, a^\dagger, b^\dagger$ 都是自由场的粒子湮灭和产生算子. 这是因为在相互作用表象, 算子遵从自由场的演化形式, 因而它们的本征态也是自由场的本征态.

S 矩阵元为

$$S_{fi} = \langle\text{out}|U(\infty, -\infty)|\text{in}\rangle =_{\text{out}} \left\langle k_1', k_2', \cdots \middle| T\exp\left[-\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}tH_I(t)\right]|k_1, k_2, \cdots\right\rangle_{\text{in}}. \tag{4.2.15}$$

由

$$U(t, t') = U(t, 0)[U(t', 0)]^{-1}$$

得到

$$\begin{aligned} U(t,0) &\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \\ \Rightarrow U(t,t') &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht'}]^{-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t'} \end{aligned}$$

和

$$S_{fi} = \lim_{\substack{t\to\infty \\ t'\to-\infty}} \langle\text{out}|\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t'}|\text{in}\rangle.$$

由于 $|\text{in}\rangle$ 和 $\langle\text{out}|$ 都是 H_0 的本征态, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}$ 对它们的作用只给出一个相因子, S 矩阵元可以写成

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \lim \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_{\text{out}}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_{\text{in}}t'}\langle\text{out}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}|\text{in}\rangle \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot S^s_{fi}, \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

其中

$$S^s_{fi} = \lim\langle\text{out}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}|\text{in}\rangle$$

是薛定谔表象时间演化算符的矩阵元.

在场论中, 我们可以证明 $\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ t'\to-\infty}}\langle 0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t'}|0\rangle = \lim\limits_{T\to\infty}\langle 0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0T}\cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}H_T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0T}|0\rangle = \lim\limits_{T\to\infty}\langle 0|\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}HT}|0\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. 这是一个常数, 可以在重整化时, 用在 $\Delta\mathscr{L}$ 中添加常数的方法, 使它变为相因子. 绝对值为 1. 我们得到

$$|S_{fi}| = \frac{\lim\langle f|\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}HT}|i\rangle}{\lim\langle 0|\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}HT}|0\rangle} = \left|\frac{S^s_{fi}}{S_{oo}}\right| \tag{4.2.17}$$

记住S^s_{fi} 正是我们今后计算散射问题所需要的矩阵元. 只要计算 S_{fi}, 就可以得到 $|S^s_{fi}|^2$. 而用微扰论, 这又归结为计算:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \sum_n \langle\text{out}|(-\mathrm{i})^n/(n!)\int_t^{t'}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_nT[H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)]|\text{in}\rangle \\ &= \sum_n \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\langle\text{out}|\int\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_nT[H_I(t_1)\cdots H_I(t_n)]|\text{in}\rangle. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

考虑到

$$\langle \text{out}| = \langle 0|a(k_1')\cdots b(p_m, s_m),$$
$$|\text{in}\rangle = a^\dagger(k_1)\cdots b^\dagger(p_n, s_n)|0\rangle,$$

我们得到散射矩阵元的公式:

$$\begin{aligned} S_{fi} =& \langle 0|a(k_1')\cdots b(p_m', s_m')U(+\infty,-\infty)a^\dagger(k_1)\cdots b^\dagger(p_n,s_n)|0\rangle \\ =& \sum_l \frac{(-\text{i})^l}{l!}\int_{-\infty}^{\infty} \text{d}t_1\cdots\text{d}t_n\langle 0|a(k_1')\cdots \text{b}(p_m', s_m')T[H_I(t_1)\cdots H_I(t_l)]a^\dagger(k_1) \\ &\cdots b^\dagger(p_n,s_n)|0\rangle. \end{aligned}$$

由

$$H_I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{d}x\text{d}y\text{d}z\mathscr{H}_I(t,x,y,z),$$

进一步得到

$$\begin{aligned} S_{fi} =& \sum_l \frac{(-\text{i})^l}{l!}\int_{-\infty}^{\infty} \text{d}^4x_1\cdots\text{d}^4x_l \\ &\times\langle 0|a(k_1')\cdots b(p_m', s_m')T[\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\mathscr{H}_I(x_l)]a^\dagger(k_1)\cdots b^\dagger(p_n,s_n)|0\rangle. \end{aligned}$$

我们可以认为 $a(k_1')\cdots b(p_m', s_m')$ 属于 $t=\infty$, 记为 $\overline{a(k_1')}\cdots\overline{b(p_m', s_m')}$, 而 $a^\dagger(k_1)\cdots b^\dagger(p_n,s_n)$ 属于 $t=-\infty$, 记为 $\underline{a^\dagger(k_1)}\cdots\underline{b^\dagger(p_n,s_n)}$, 所以矩阵元 S_{fi} 可以写成

$$\begin{aligned} S_{fi} =& \sum_l \frac{(-\text{i})l}{l!}\int \text{d}^4x_1\cdots\text{d}^4x_l \\ &\times\langle 0|T\{\overline{a(k_1')}\cdots\overline{b(p_m', s_m')}\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\mathscr{H}_I(x_l)\underline{a^\dagger(k_1)}\cdots\underline{b^\dagger(p_n,s_n)}\}|0\rangle. \quad (4.2.19) \end{aligned}$$

在这个编时乘积中, 我们认为构成 $\langle\text{out}|$ 态的湮灭算子 $a(k_1')\cdots$ 属于 $t=\infty$, 而构成 $|\text{in}\rangle$ 态的产生算子 $a^\dagger(k_1)\cdots$ 属于 $t=-\infty$, 在编时乘积中 $a(k_1')\cdots$ 在最左边, 而 $a^\dagger(k_1)\cdots$ 在最右边, 它们正好与真空态一起给出入射态和出射态.

以上是微扰论求 S 矩阵元的哈密顿形式. 场论中玻色场能量密度是动量密度的二次式, 由此可以导出路径积分的拉格朗日形式, 而费米场本身路径积分就可以看成拉格朗日形式. 在下面我们推导微扰论求 S 矩阵元的拉格朗日形式. 我们有 (2.2.11) 式：

$$\begin{aligned} &\langle\psi_1, T_2|T\{\hat{A}_1(t_1)\cdots\hat{A}_n(t_n)\}|\psi_2, T_1\rangle \\ =& \langle\psi_1|T\{\text{e}^{-\text{i}\hat{H}(T_2-T_1)}\hat{A}_{1s}(t_1)\cdots\hat{A}_{ns}(t_n)\}|\psi_2\rangle \\ =& N\int\mathscr{D}q\text{e}^{\text{i}S}A_1(t_1)\cdots A_n(t_n)\langle\psi_1|q', T_2\rangle\langle q, T_1|\psi_2\rangle, \end{aligned}$$

其中, $\hat{A}_{is}$ 是薛定谔表象算符.

因此, (4.2.17) 式可以写成 $|S_{fi}| = \left|\dfrac{\lim\langle f|\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}HT}|i\rangle}{\lim\langle 0|\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}HT}|0\rangle}\right| = \left|\dfrac{A}{B}\right|$,

$$
\begin{aligned}
A =& \lim_{T\to\infty}\langle 0|a(p_1')\cdots a(p_l')\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}HT}a^\dagger(p_1)\cdots a^\dagger(p_m)|0\rangle \\
=& \lim N\int \mathscr{D}\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}S} a(p_1')\cdots a(p_l')|_{t=T}a^\dagger(p_1)\cdots a^\dagger(p_m)|_{t=-T} \\
& \times\langle 0|\phi'(\vec{x}',T)\rangle\langle\phi(\vec{x},-T)|0\rangle, \\
B =& \lim N\int \mathscr{D}\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}\times\langle 0|\phi'(\vec{x}',T)\rangle\langle\phi(\vec{x},-T)|0\rangle,
\end{aligned}
$$

其中, $|0\rangle, a, a^\dagger$ 等都是自由哈密顿量对应的真空态和湮灭、产生算符 (相互作用表象的算符). 考虑到, 当 $H = H_0 + \Delta H$ 时, 对应的拉格朗日量为 $L = L_0 + \Delta L$, 作用量为 $S = S_0 + \Delta S$. 我们得到

$$
\begin{aligned}
A =& \lim N\int \mathscr{D}\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{i}\Delta S)^n a(p_1')\cdots\times a^\dagger(p_1)\cdots \\
& \times\langle 0|\phi'(\vec{x}',T)\rangle\langle\phi(\vec{x},-T)|0\rangle \\
=& \frac{N}{N_0}\sum_{n=0}^{\infty}\lim N_0\int \mathscr{D}\phi \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_0}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\Delta\mathcal{L}(x_1)\int \mathrm{d}^4x_2\Delta\mathcal{L}(x_2)\cdots \\
& \times a(p_1')\cdots\times a^\dagger(p_1)\cdots\times\langle 0|\phi'(\vec{x}',T)\rangle\langle\phi(\vec{x},-T)|0\rangle, \qquad (4.2.20)
\end{aligned}
$$

其中, N_0 是对应于 S_0 的归一化常数.

类比 (4.2.19) 式有 (因为假设 $\Delta\mathcal{L} = g\mathcal{L}_I$, 则由微扰展开式 (4.2.19) 式和 (4.2.20) 式给出的式子对 g 的同一次幂必须逐项相等)

$$
\begin{aligned}
A =& \frac{N}{N_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x\cdots\langle 0|T\{\overline{a(p_1')}\cdots\overline{a(p_l')}\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_1)\cdots\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_n)\underline{a^\dagger(p_1)}\cdots\underline{a^\dagger(p_m)}\}|0\rangle, \\
B =& \frac{N}{N_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle 0|T\{\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_1)\cdots\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_n)\}|0\rangle,
\end{aligned}
$$

其中, $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_i)$ 是相互作用表象中的某个算符, 相当于 $-\mathscr{H}_I(x_i)$.

我们得到 S 矩阵的拉格朗日形式:

$$
\begin{aligned}
|S_{fi}| =& |\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle 0|T\{\overline{a(p_1')}\cdots\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_1)\cdots\underline{a^\dagger(p_1)}\cdots\}|0\rangle \\
& \div\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle 0|T\{\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_1)\cdots\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_n)\}|0\rangle|,
\end{aligned}
$$

当 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x)$ 是用相互作用表象中的 $\dot{\phi}(x)$ 及 $\phi(x)$ 表示时有 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x)=\Delta\mathcal{L}(x)$; 但若 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x)$ 由 $\pi(x)$ 及 $\phi(x)$ 表示, 其中 $\pi(x)$ 与 $\dot{\phi}(x)$ 的关系由自由哈密顿量 H_0 确定, 并且这部分 $\pi(x)$ 在路径积分中作为动量 p 进行积分, 则一般地 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_i)=-\mathscr{H}_I$ 对应于量子力学中的 $-(\Delta H)_I(t_i)$ 并不等于 $\Delta\mathcal{L}(x_i)$, 只有当系统速度二次项系数参量变更很小时才有 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_i)=\Delta\mathcal{L}(x_i)$, (证明将在下面给出). 我们在场论微扰论计算中用的是前一种方式, 所以总有 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x)=-\mathscr{H}_I=\Delta\mathcal{L}(x)$. 因此, 我们可以用 $\Delta\mathcal{L}(x_i)$ 代替 (4.2.21) 式中的 $\Delta\tilde{\mathcal{L}}(x_i)$, 由此得到

$$\begin{aligned}|S_{fi}|=&|\sum_n\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int\mathrm{d}^4x_1\cdots\langle 0|T\{\overline{a(p_1')}\cdots\Delta\mathcal{L}(x_1)\cdots\underline{a^\dagger(p_1)}\cdots\}|0\rangle\\&\div\sum_n\frac{(\mathrm{i})^n}{n!}\int\mathrm{d}^4x_1\cdots\langle 0|T\{\Delta\mathcal{L}(x_1)\cdots\Delta\mathcal{L}(x_n)\}|0\rangle|.\end{aligned}\tag{4.2.21}$$

证明 令哈密顿量为 $H=(\boldsymbol{p}^t+\boldsymbol{b}^t)A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})+C$, 其中 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{b}$ 是列矢量, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^t$ 是方阵. 由此得列矢量 $\dot{q}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}}=2A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}),\Rightarrow\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}=\frac{1}{2A}\dot{\boldsymbol{q}}.\tag{4.2.22}$$

对应地有

$$\begin{aligned}L=&\boldsymbol{p}^t\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}}-H=2\boldsymbol{p}^tA(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{p}^t+\boldsymbol{b}^t)A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})-C\\=&(\boldsymbol{p}^t+\boldsymbol{b}^t)A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})-2\boldsymbol{b}^tA(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})-C\\=&\dot{\boldsymbol{q}}^t\frac{1}{2A}A\frac{1}{2A}\dot{\boldsymbol{q}}-b^t\dot{\boldsymbol{q}}-C\\=&\frac{1}{4}\dot{\boldsymbol{q}}^t\frac{1}{A}\dot{\boldsymbol{q}}-b^t\dot{\boldsymbol{q}}-C,\end{aligned}\tag{4.2.23}$$

这个推导与路径积分的推导一致, 在参量变化 (A,b 和 C 变化) 时按 ΔH 的定义有

$$\begin{aligned}\Delta H=&2\Delta\boldsymbol{b}^tA(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{p}^t+\boldsymbol{b}^t)\Delta A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})+\Delta C\\=&\Delta\boldsymbol{b}^t\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{1}{4}\dot{\boldsymbol{q}}\frac{1}{A}\Delta A\frac{1}{A}\dot{\boldsymbol{q}}+\Delta C.\end{aligned}$$

这里假设速度与动量的关系 (4.2.22) 式不变. 而这正是微扰论公式 (4.2.19) 式所要求的. 因为在该式中要求 $\dot{\phi}$ 与 ϕ 的对易关系由 H_0 确定. 而这些参量变化时 L 的变更为

$$\Delta L=\frac{1}{4}\dot{\boldsymbol{q}}\Delta\frac{1}{A}\dot{\boldsymbol{q}}-\Delta\boldsymbol{b}^t\dot{\boldsymbol{q}}-\Delta C.$$

由公式 $\dfrac{1}{A-B}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{A}B\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{A}B\dfrac{1}{A}B\dfrac{1}{A}+\cdots$, 有 $\Delta\dfrac{1}{A}=-\dfrac{1}{A}\Delta A\dfrac{1}{A}+$ 高阶小量, 我们发现当 ΔA 是小量时有 $\Delta L=-\Delta H+$ 高阶小量.

习题 请证明 (4.2.23) 式的拉格朗日量 L 与路径积分中给出的拉格朗日量一致.

解：路径积分中要积分

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \exp\left\{\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)\left[H-\frac{\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}}{\Delta t}\boldsymbol{p}\right]\Delta t\right\}$$

相应地, 令 $\dfrac{\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{q}}{\Delta t}=\mu$, 在这里就是要考查

$$B=(\boldsymbol{p}^t+\boldsymbol{b}^t)A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b})+C-\mu^t\boldsymbol{p}$$

在指数上的相关计算. 经过配平方得

$$\begin{aligned}B=&\left(\boldsymbol{p}^t+\boldsymbol{b}^t-\frac{\mu^t}{2}A^{-1}\right)A\left(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{b}-A^{-1}\frac{\mu}{2}\right)-\frac{1}{4}\mu^tA^{-1}\mu+\boldsymbol{b}^t\mu+C\\ \equiv&\,\boldsymbol{p}^{'t}A\boldsymbol{p}'-\frac{1}{4}\mu^tA^{-1}\mu+\boldsymbol{b}^t\mu+C.\end{aligned}$$

把积分参量 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ 改为 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}'$, 就得到相关的路径积分公式, 其中

$$L=\frac{1}{4}\mu^t\frac{1}{A}\mu-\boldsymbol{b}^t\mu-C,$$

把 μ 与 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 相类比, 就证明了两者给出的拉格朗日量是一致的.

我们主要任务就是计算 (4.2.19) 式, 即 (4.2.19) 式的被积函数和它对 x_i 的积分. 为此, 我们介绍维克定理和费恩曼图.

4.2.3 维克定理

维克引入两种次序的乘积：正规乘积和编时乘积以及场算子的收缩.

1. 正规乘积

正规乘积就是将一个算子乘积中所有的产生算符放在左边而所有的湮灭算符放在右边. (在交换费米子时要加一个负号), 正规乘积可以用记号 $N(\cdots)$ 或 $:\cdots:$ 表示,

例如：(a 为玻色子, b 为费米子)

$$\begin{aligned}&:a(k_1)a^\dagger(k_2)a(k_3)a^\dagger(k_4):=a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_4)a(k_1)a(k_3),\\ &:a(k_1)a^\dagger(k_2)b(p_1s_1)b^\dagger(p_2s_2):=-a^\dagger(k_2)b^\dagger(p_2s_2)a(k_1)b(p_1s_1).\end{aligned}$$

一旦一个算子乘积用正规乘积表示出来, 它在 $\langle\mathrm{out}|$ 和 $|\mathrm{in}\rangle$ 之间的矩阵元马上就可以读出来.

例如：

$:\ a^\dagger(k_1')\cdots a^\dagger(k_m')a(k_1)\cdots a(k_n)\ :$ 的非零矩阵元必须是在 $\langle k_1',\cdots,k_m'|$ 和 $|k_1,\cdots,k_n\rangle$ 之间.

2. 编时乘积

前面已经介绍过, 编时乘积是把算子按照时间顺序排列得到的乘积,

$$T(O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)) = O_{j_1}(x_{j_1})\cdots O_{j_n}(x_{j_n})(-1)^l,$$

要求 $x^0_{j_1} > x^0_{j_2} > \cdots > x^0_{j_n}$, l 是重排列过程中费米子交换次数.

3. 场算子的收缩

对于两个场算子 $A(x)$ 和 $B(y)$(场算子是场量的一次式).

定义

$$T(A(x)B(y)) - :A(x)B(y): = \overbrace{A(x)B}(y) = \underbrace{A(x)B(y)}$$

为两个场算子的收缩 (或叫缩并). 不难证明

$$\overbrace{A(x)B}(y) = \langle 0 \mid T(A(x)B(y)) \mid 0\rangle. \tag{4.2.24}$$

维克提出如下用正规积展开编时积的定理.

维克定理：算子的编时乘积等于一切可能的场量收缩乘以其余部分的正规积之和. 用公式表为

$$\begin{aligned} T(AB\cdots YZ) =&: ABC\cdots YZ: + :\underbrace{AB}C\cdots YZ: + :\underbrace{ABC}\cdots YZ: \\ &+ \cdots + :ABC\cdots \underbrace{YZ}: + \cdots + :\underbrace{AB}C\cdots\underbrace{YZ}: + \cdots . \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

关于各项的符号

由于玻色子和费米子的收缩总为 0, 维克展开式 (4.2.25) 式的右边实际上等于玻色场展开式和费米场展开式的乘积, 为探讨符号问题不妨假定全为费米子.

形成收缩是首先把两个场量移在相邻位置, 然后再缩并. 这时由于它们是两个费米子并排, 对其他费米子来说越过这一对费米子并不改变符号, 所以它们先形成收缩或者其他费米子越过后再收缩, 对符号没有影响, 因此我们不妨把它们先移到一起, 暂不缩并. 直到最后将一切该缩并的各对算符都移在相邻位置然后一起缩并.

将各对该缩并的场量移在一起的过程 (其余不该缩并的场量不动), 得到总符号是不因过程而改变的, 也不因那些收缩对的位置而改变的 (比如, “$\varphi_1\varphi_2$” $\varphi_3\varphi_4$ 与 φ_3“$\varphi_1\varphi_2$” φ_4, $\varphi_3\varphi_4$“$\varphi_1\varphi_2$” 符号是相同的).

维克定理证明

我们考虑 $T(\varphi_1, \varphi_2\cdots\varphi_n)$. 维克定理展开式 (4.2.25) 式的两边对场算符 $ABC\cdots YZ$ 的重排列是不变的 (对于玻色场), 或者得到相同的 (-1) 因子 (有费米场时), 因此我们可以假定它们已经按时间顺序排列.

(1) 所有场算符都可分为产生算子部分 $\varphi^{(-)}$ 和湮灭算子部分 $\varphi^{(+)}$, 然后, 把算子按时序排好, 设它们是

$$\varphi_1\,\varphi_2\cdots\varphi_n=(\varphi_1^{(+)}+\varphi_1^{(-)})(\varphi_2^{(+)}+\varphi_2^{(-)})\cdots(\varphi_n^{(+)}+\varphi_n^{(-)}).$$

(2) 将 φ_n 中的产生算子部分用正反对易关系 (费米场之间用反对易关系) 移到最左边, 它就遇到所有其他算子. 在遭遇时它们可以交换, 也可以产生一个 C 数的正反对易子, 所以得到 φ_n 与其他场的正反对易子的项 (一共 $n-1$ 项) 以及 $\varphi_n^{(-)}$ 移到最左边的项.

$$\begin{aligned}\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n=&\varphi_1\varphi_2\cdots\underbracket{\varphi_{n-1}\varphi_n}+\cdots+\varphi_1\underbracket{\varphi_2\cdots\varphi_n}\\&+\underbracket{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n}+\varphi_1\varphi_2\cdots\check{\varphi}_n.\end{aligned}\tag{4.2.26}$$

这些 (正反) 对易子形成 φ_n 与其他 $n-1$ 个 $\varphi_j(j=1,\cdots,n-1)$ 的收缩, 余下的 $n-2$ 个场仍然是按时序排列的. 最后一项在 φ_n 上面打 “∨” 表示 φ_n 的产生算子已经在一切湮灭算子的前面了, 它实际上等于 $\varphi_n^{(-)}\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}\varphi_n^{(+)}\times(-1)^l$ ($(-1)^l$ 是交换费米子带来的因子), 这项对 φ_n 而言已完成正规化.

(3) 然后观察 φ_{n-1}, 将它的产生算符移到最左边去 (注意 (4.2.26) 式中的第一项中没有 φ_{n-1}, 因为它与 φ_n 已形成收缩了), 它与没有被收缩掉的 $\varphi_j, j=1,\cdots,n-2$ 遭遇, 每次都形成两项, 一项是给出对易子形成收缩, 另一项是它的 $\varphi_{n-1}^{(-)}$ 与 φ_j 交换位置 (费米子时要考虑符号的改变).

例如:

$$\begin{aligned}&\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-3}\underbracket{\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}\varphi_n}=\varphi_1\varphi_2\cdots\underbracket{\varphi_{n-3}\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}}\underbracket{\varphi_n}\\&+\cdots+\varphi_1\underbracket{\varphi_2\cdots\varphi_{n-3}\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}}\underbracket{\varphi_n}+\underbracket{\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-3}\varphi_{n-2}\varphi_{n-1}}\underbracket{\varphi_n}\\&+\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{n-3}\underbracket{\varphi_{n-2}\check{\varphi}_{n-1}\varphi_n},\end{aligned}$$

同样, 最后一项中 φ_{n-1} 上打的 “∨” 表示它的 $\varphi^{(-)}$ 已经顺利到达该式的最左边, 即在所有湮灭算子左边; 因而对 φ_{n-1} 而言已经完成正规化.

(4) 我们再将 φ_{n-2} 未收缩的各项进行同样处理, 它的 $\varphi_{n-2}^{(-)}$ 可能与一切 $\varphi_j, j<n-2$ 的场算子形成收缩, 也可能顺利到达一切 $\varphi^{(+)}$ 的左边, 这样得到的最后一项可以将该项在 φ_{n-2} 上打 “∨” 变为 $\check{\varphi}_{n-2}$ 来表示.

(5) 再进行对 $\varphi_{n-3}^{(-)}$ 的处理; ...

(6) φ_1 或者已与其他 φ 形成收缩, 否则它的产生算子本来早已在其他算符的湮灭算符之前, 所以我们也在它的上面打 “∨”.

(7) 这样我们得到的项是一切可能的收缩而其余未收缩的场量都被打 “∨” 的项的总和. 这些打 “∨” 的场量都已被按正规序排好. 这就得到维克定理.

维克定理的一些例子

1. 关于编时乘积和正规乘积的定义

(1) $t_1<t_2<t_3<t_4<t_5$, φ 是玻色子, ψ 是费米子.

$$\begin{aligned}&T\{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\psi_3(x_3)\psi_4(x_4)\varphi_5(x_5)\}\\=&-\varphi_5(x_5)\psi_4(x_4)\psi_3(x_3)\varphi_2(x_2)\varphi_1(x_1).\end{aligned}$$

(2) $t_1<t_2<t_3$, ψ 是费米子.

$$T\{\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\psi_3(t_3)\}=-\psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1).$$

(3) $t_2<t_1<t_3$, ψ 是费米子.

$$T\{\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\psi_3(t_3)\}=\psi_3(t_3)\psi_1(t_1)\psi_2(t_2).$$

(4) a 是玻色子, b 是费米子.

① $:a_1a_2^\dagger a_3^\dagger a_4b_5b_6^\dagger:=-a_2^\dagger a_3^\dagger b_6^\dagger a_1a_4b_5=-b_6^\dagger a_3^\dagger a_2^\dagger b_5a_4a_1=\cdots,$

② $:a_1b_2b_3^\dagger b_4b_5^\dagger:=b_5^\dagger b_3^\dagger b_2b_4a_1=-b_3^\dagger b_5^\dagger b_2b_4a_1=\cdots,$

③ $$\begin{aligned}&:b_1b_2^\dagger b_3^\dagger b_4:\\=&b_2^\dagger b_3^\dagger b_1b_4=-b_3^\dagger b_2^\dagger b_1b_4\\=&b_3^\dagger b_2^\dagger b_4b_1=-b_2^\dagger b_3^\dagger b_4b_1=\cdots.\end{aligned}$$

2. 用维克定理展开编时乘积

(1)

$$T\{a_1a_2a_3\}=:a_1a_2a_3:+:\underbrace{a_1a_2}a_3:+:a_1\underbrace{a_2a_3}:+:\underbrace{a_1a_2a_3}:.$$

(2)

$$\begin{aligned}&T\{a_1a_2a_3a_4\}\\=&:a_1a_2a_3a_4:+:\underbrace{a_1a_2}a_3a_4:+:\underbrace{a_1a_2a_3}a_4:+:\underbrace{a_1a_2a_3a_4}:\\&+:a_1\underbrace{a_2a_3}a_4:+:a_1\underbrace{a_2a_3a_4}:+\ \ a_1a_2\underbrace{a_3a_4}:\\&+:\underbrace{a_1a_2}\underbrace{a_3a_4}:+:a_1^{\bullet}a_2^{\bullet\bullet}a_3^{\bullet}a_4^{\bullet\bullet}:+:\underbrace{a_1\underbrace{a_2a_3}a_4}:\end{aligned}$$

(3) φ 是玻色子, ψ 是费米子.

$$
\begin{aligned}
&T\{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\psi_1(x_3)\psi_2(x_4)\}\\
=&:\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\psi_1(x_3)\psi_2(x_4): + :\underbrace{\varphi_1(x_1)\varphi_2}(x_2)\psi_1(x_3)\psi_2(x_4):\\
&+:\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)\underbrace{\psi_1(x_3)\psi_2}(x_4): \underbrace{\varphi_1(x_1)\varphi_2}(x_2)\underbrace{\psi_1(x_3)\psi_2}(x_4).
\end{aligned}
$$

4.2.4 几种场与其产生、湮灭算子的收缩

下面将构造 $\langle \mathrm{out}|$ 的湮灭算子看成 $t=\infty$ 时的算子, 而将构造 $|\mathrm{in}\rangle$ 态的产生算子看成 $t=-\infty$ 时的算子, 则

$$
\begin{aligned}
\overline{a(\vec{k})}\phi(x) = T(\overline{a(\vec{k})}\ \phi(x)) &=: a(\vec{k})\phi(x) : + \overbrace{\overline{a(\vec{k})}\phi(x)}\\
&=: a(\vec{k})\phi(x) : + [a(\vec{k}), \phi^{(-)}(x)]
\end{aligned}
$$

给出

$$
\overbrace{\overline{a(\vec{k})}\phi(x)} = T(\overline{a(\vec{k})}\phi(x)) - :\overline{a(\vec{k})}\phi(x) := [a(\vec{k}), \phi^{(-)}(x)],
$$

其他情形类似. 我们得到

(1)

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\overline{a(\vec{k})}\phi(x)} &= [a(\vec{k}), \int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\ a^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\ ]\\
&= \int \mathrm{d}^3k' \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}, \quad kx \equiv \omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{x};
\end{aligned} \tag{4.2.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\overbrace{\phi(x)\underline{a^\dagger(\vec{k})}} &= [\int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\ a(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}, a^\dagger(\vec{k})\ ]\\
&= \int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x}\ \delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}.
\end{aligned} \tag{4.2.28}
$$

(2)

$$
\overbrace{\overline{a(\vec{k}\lambda)}A_\mu(x)} = [a(\vec{k}\lambda), \int \mathrm{d}^3k' \frac{\sum_{\lambda'}\epsilon_\mu(\vec{k'}\lambda')}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} a^\dagger(\vec{k'}\lambda')\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k'x})]
$$

$$=\int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}} \sum_{\lambda'} \epsilon_\mu(\vec{k'}\lambda')\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k'x} \underbrace{[a(\vec{k}\lambda), a^\dagger(\vec{k'}\lambda')]}_{(-g)_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})}$$

$$=-g_{\lambda\lambda}\frac{\epsilon_\mu(\vec{k}\lambda)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx};\quad 对\ \lambda\ 不求和, \tag{4.2.29}$$

$$\overline{A_\mu(x)\underline{a^\dagger(\vec{k}\lambda)}} = -g_{\lambda\lambda}\frac{\epsilon_\mu(\vec{k}\lambda)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx};\quad kx=\omega_k t-\vec{k}\cdot\vec{x},$$

$$\omega_k=\sqrt{\vec{k}^2},\quad 对\ \lambda\ 不求和. \tag{4.2.30}$$

(3)
$$\begin{aligned}\overline{\underline{d(\vec{p},s)}\psi_\alpha(x)} &= d(\vec{p},s)\psi_\alpha(x) - :d(\vec{p},s)\psi_\alpha(x): = d(\vec{p},s)\psi_\alpha(x)+\psi_\alpha(x)d(\vec{p},s)\\ &=[d(\vec{p},s),\psi_\alpha(x)]_+\\ &=[d(\vec{p},s),\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}d^\dagger(\vec{p'},s')v_\alpha(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}]_+\\ &=\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}v_\alpha(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}\ [d(\vec{p},s),d^\dagger(\vec{p'},s')]_+\\ &=\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}v_\alpha(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p'})\\ &=\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}v_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px};\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

$$\overline{\underline{b(\vec{p},s)}\psi_\alpha(x)} = \sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\ [b(\vec{p},s),d^\dagger(\vec{p'},s')]_+=0; \tag{4.2.32}$$

$$\begin{aligned}\overline{\bar{\psi}_\beta(x)\underline{d^\dagger(\vec{p},s)}} &= \left[\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}d(\vec{p'},s')\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x},d^\dagger(\vec{p},s)\right]_+\\ &=\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x}\ \bar{v}_\beta(\vec{p'},s')[d(\vec{p'},s'),d^\dagger(\vec{p},s)]_+\\ &=\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\ \bar{v}_\beta(\vec{p},s)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px};\end{aligned}$$

$$\overline{\bar{\psi}_\beta(x)\underline{b^\dagger(\vec{p},s)}}=0,\quad \overline{\psi_\alpha(x)\underline{d^\dagger(\vec{p},s)}}=0;$$

$$\begin{aligned}\overline{\psi_\alpha(x)\underline{b^\dagger(\vec{p},s)}} &= [\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi^3)\omega_{p'}}}b(\vec{p'},s')u_\alpha(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x},b^\dagger(\vec{p},s)]_+\\ &=\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px};\end{aligned} \tag{4.2.33}$$

$$
\begin{aligned}
\overbrace{d(\vec{p},s)\bar{\psi}_\beta(x)} &= 0; \\
\overbrace{b(\vec{p},s)\bar{\psi}_\beta(x)} &= [b(\vec{p},s),\sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}b^\dagger(\vec{p'},s')\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}]_+ \\
&= \sum_{s'}\int \mathrm{d}^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}\ \bar{u}_\beta(\vec{p'},s')[b(\vec{p},s),b^\dagger(\vec{p'},s')]_+ \\
&= \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\ \bar{u}_\beta(\vec{p},s)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}.
\end{aligned}
\tag{4.2.34}
$$

从以上分析可以看出, 在 $t=-\infty$ 时的产生算子与在 x 点的场量的收缩一定有一个 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$ 或 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ 因子; 而在 $t=\infty$ 时的湮灭算子与在 x 点的场量的收缩一定有一个 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$ 或 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ 因子.

4.2.5 几种自由场的费恩曼传播子

为了今后用微扰论处理相互作用场, 我们还需计算场量与场量之间的收缩, 即自由场的费恩曼传播子.

如果定义

$$
\theta(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0,\end{cases}
$$

则两个场量的 T(编时) 乘积可以写成

$$
T\{\hat{A}(x)\hat{B}(y)\}=\hat{A}(x)\hat{B}(y)\theta(x_0-y_0)\pm\hat{B}(y)\hat{A}(x)\theta(y_0-x_0). \tag{4.2.35}
$$

其中, 玻色子取正号, 费米子取负号, 一个玻色子一个费米子也取正号.

两个场量的费恩曼传播子定义为

$$
\overbrace{A(x)B}(y)\equiv T\{\hat{A}(x)\hat{B}(y)\}-N\{\hat{A}(x)\hat{B}(y)\}, \tag{4.2.36}
$$

其中, N 是正规序, 即在乘积中将场量中的产生算子移到左方, 湮灭算子移到右方 (费米子交换时多一个负号), 但不计算交换时出现的场量之间的正反对易子, 即不考虑 $\delta(\cdots)$ 常数.

1. 标量场的费恩曼传播子

我们把标量场 (K-G 场) 的费恩曼传播子记为 $\overbrace{\phi(x)\phi}(y) = \mathrm{i}\Delta_F(x,y)$, 得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\Delta_F(x,y)\\
=&T\{\phi(x)\phi(y)\} - N\{\phi(x)\phi(y)\}\\
=&T\Big\{\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\\
&\times\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y} + a^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]\Big\}\\
&-N\Big\{\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\\
&\times\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y} + a^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]\Big\}.
\end{aligned}
$$

当 $x_0 > y_0$ 时, 费恩曼传播子为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\Delta_F(x,y)\\
\overset{x_0\geq y_0}{=}&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\\
&\times\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y} + a^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]\\
&-N\Big\{\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\\
&\times\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[a(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y} + a^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]\Big\}\\
=&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\{a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}a^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y} - a^\dagger(\vec{k'})a(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}\}\\
=&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}k'y}\\
=&\int \frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\int \frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k x_0+\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'_k y_0-\mathrm{i}\vec{k'}\cdot\vec{y}}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}).
\end{aligned}
$$

即

$$
\mathrm{i}\Delta_F(x,y) \overset{x_0\geq y_0}{=} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)+\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}. \tag{4.2.37}
$$

类似地当 $x_0 < y_0$ 时, 可算出费恩曼传播子为

$$
\mathrm{i}\Delta_F(x,y) \overset{x_0\leq y_0}{=} \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}, \tag{4.2.38}
$$

这里要求 $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$. 我们在下一步把这两个表达式用一个统一的式子写出来.

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}}{k_0^2-\omega_k^2+\mathrm{i}\epsilon}$$

和图 4.2.1 及图 4.2.2 中的回路.

当 $x_0 > y_0$ 时, 由复变函数定理 (约当引理)$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}$ 在下半大圆上 $\to 0$, 积分 I 可变为图 4.2.1 中的回路积分.

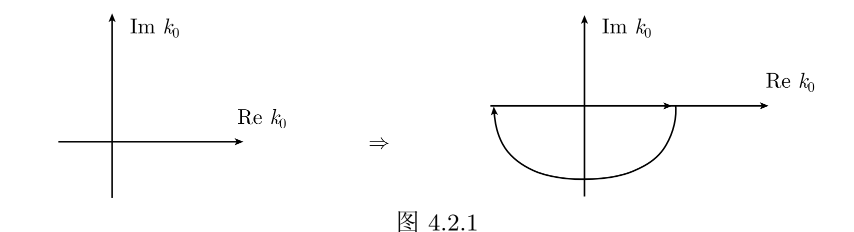


图 4.2.1

当 $x_0 < y_0$ 时, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}$ 在上半大圆 $\to 0$, 积分 I 可变为图 4.2.2 中的回路积分.

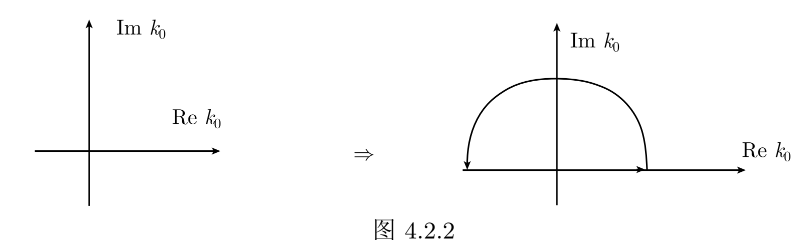


图 4.2.2

对于解析函数来说, 回路积分可以化为绕奇异点的积分. I 的被积函数的奇异点 (对 k_0 来说) 有两个: $k_0 = \pm\sqrt{\omega_k^2-\mathrm{i}\epsilon} \doteq \pm(\omega_k-\mathrm{i}\epsilon') = \pm z_0$(图 4.2.3). 我们在下面推导中也把 $\epsilon' > 0$ 写成 ϵ.

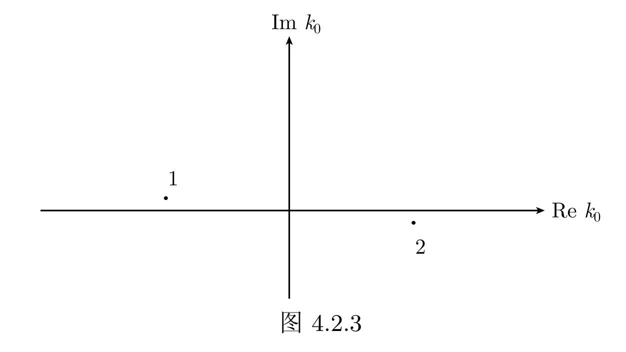


图 4.2.3

所以当 $x_0 > y_0$ 时, 积分变为围绕 $z_0 = \omega_k - \mathrm{i}\epsilon$ 的积分 (图 4.2.4).

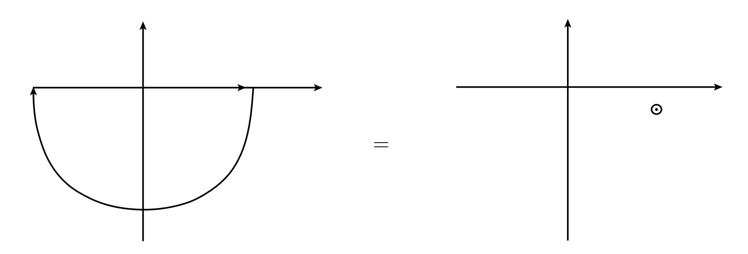


图 4.2.4

$$I = \oint \mathrm{d}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}}{(k_0-\omega_k+\mathrm{i}\epsilon)(k_0+\omega_k-\mathrm{i}\epsilon)} = \oint_C \mathrm{d}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}}{(k_0-z_0)(k_0+z_0)}$$

$$= (-2\pi\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z_0(x_0-y_0)}/(2z_0) \xrightarrow{\epsilon\to 0} (-2\pi\mathrm{i})\frac{1}{2\omega_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)}.$$

类似地当 $x_0 < y_0$ 时, $k_0 \to -z_0$ 是有关的极点, 给出

$$I = (2\pi\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_0(x_0-y_0)}/(-2z_0) \longrightarrow (-2\pi\mathrm{i})\frac{1}{2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)}.$$

用这个方法, 我们可以把 $\mathrm{i}\Delta_F(x-y)$ 统一地表示为一个四维积分：

$$\mathrm{i}\Delta_F(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{i}\Delta_F(x-y). \tag{4.2.39}$$

注意：(4.2.39) 式中 k_μ 的积分是从 $-\infty \to \infty$, 各分量独立积分. 并且, $\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} = \frac{\mathrm{i}}{k_0^2-(\vec{k}^2+m^2)+\mathrm{i}\epsilon}$, 这时 k_0 一般地不等于 $\sqrt{\vec{k}^{\ 2}+m^2}$, 这与 (4.2.37) 式和 (4.2.38) 式不同. 在那里 k_0 等于 $\sqrt{\vec{k}^{\ 2}+m^2}$.

习题　证明当圆半径 $\to\infty$ 时, 图 4.2.1 和图 4.2.2 中的半圆上的积分 $\to 0$.

我们现在考虑 $A = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}\phi(x)\right)\phi(y)$ (其中 $\phi(x)$ 与 $\phi(y)$ 以收缩符号相连), 类似推导得到当 $x_0 > y_0$ 时,

$$A = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)+\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}(-\mathrm{i}\omega_k);$$

当 $x_0 < y_0$ 时,

$$A = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}(\mathrm{i}\omega_k).$$

考虑积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}(-\mathrm{i}k_0)}{k_0^2-\omega_k^2+\mathrm{i}\epsilon}.$$

当 $x_0 > y_0$ 时, 由约当引理, 令 c 为图 4.2.4 的小回路, 得到

$$\begin{aligned} I &= \oint_c \mathrm{d}k_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(x_0-y_0)}(-\mathrm{i}k_0)}{(k_0-z_0)(k_0+z_0)} \\ &\longrightarrow_{\epsilon\to 0} (-2\pi\mathrm{i})\frac{1}{2\omega_k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)}(-\mathrm{i}\omega_k). \end{aligned}$$

当 $x_0 < y_0$ 时, 令 c' 为围绕极点 $-(\omega_k - \mathrm{i}\epsilon)$ 的小回路, 得到

$$\begin{aligned} I &= (2\pi\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{(-\mathrm{i})(-(\omega_k-\mathrm{i}\epsilon))(x_0-y_0)}(-\mathrm{i})(-(\omega_k-\mathrm{i}\epsilon))}{(-2)(\omega_k-\mathrm{i}\epsilon)} \\ &=_{\epsilon\to 0} (-2\pi\mathrm{i})\frac{1}{2\omega_k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k(x_0-y_0)}(\mathrm{i}\omega_k). \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} A = \frac{\partial}{\partial x^0}\overbrace{\phi(x)\phi}(y) &= \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial x^0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} \\ = \ \frac{\partial}{\partial x^0}\mathrm{i}\Delta_F(x,y). \end{aligned}$$

对于 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\overbrace{\phi(x)\right)\phi}(y), i=1,2,3$. 因为不涉及时间顺序, 可以直接对 $\mathrm{i}\Delta_F(x,y)$ 取偏微商的极限手续, 得到 $\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{i}\Delta_F(x,y)$. 因此我们有

$$\left(\frac{\partial}{\partial^\mu}\underbrace{\phi(x)\right)\phi}(y) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\mathrm{i}\Delta_F(x,y). \tag{4.2.40}$$

这个结果在 (6.6.27) 式的证明中有用.

2. 矢量场的费恩曼传播子

我们知道电磁场可以看成是四种相互独立的粒子, 其中三种满足:

$$[a_j(\vec{k}), a^\dagger_{j'}(\vec{k'})] = \delta_{jj'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}),$$

第四种满足:

$$[a_0(\vec{k}), a^\dagger_0(\vec{k'})] = -\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}),$$

合起来是

$$[a_\mu(\vec{k}), a^\dagger_\nu(\vec{k'})] = -g_{\mu\nu}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}). \tag{4.2.41}$$

其余对易关系为 0.

因此, 矢量场的费恩曼传播子为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x,y)\\
\equiv&T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}-N\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}\\
=&T\Big\{\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}}[a_\mu(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a_\mu^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\\
&\times\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}}[a_\nu(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y}+a_\nu^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]\Big\}\\
&-N\Big\{\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}}[a_\mu(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a_\mu^\dagger(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]\\
&\times\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}}[a_\nu(\vec{k'})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'y}+a_\nu^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}]\Big\}.
\end{aligned}
$$

当 $x_0>y_0$ 时得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x,y)=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}}a_\mu(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\int\frac{\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}}a_\nu^\dagger(\vec{k'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'y}\\
&-\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}\sqrt{2\omega_{k'}(2\pi)^3}}a_\nu^\dagger(\vec{k'})a_\mu(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}k'y}\\
=&-g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}.
\end{aligned}
\tag{4.2.42}
$$

当 $x_0<y_0$ 时得到

$$
\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x,y)=-g_{\nu\mu}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}=-g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)}.\tag{4.2.43}
$$

注意, 这里 $\omega_k=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}=\sqrt{\vec{k}^2}$, 即 $k_0=|\vec{k}|$.

费恩曼传播子可以统一写成

$$
\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x,y)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}=\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x-y).\tag{4.2.44}
$$

注意: (4.2.42) 式、(4.2.43) 式中要求 $k_0=\sqrt{\vec{k}^2}=\omega_k$, 即四维矢量 $k=(k^0,k^1,k^2,k^3)$ 在能壳上, 然而 (4.2.44) 式中的 k 无此限制, 它的各分量都独立地从 $-\infty$ 积到 ∞.

3. 旋量场的费恩曼传播子

最后我们计算旋量场的费恩曼传播子, 记为 $\mathrm{i}S_F(x,y)$, 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}S_F(x,y)_{\alpha\beta} \equiv & T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi_\beta}(y)\} - N\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi_\beta}(y)\} \\
= & T\Big\{\sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}[b(\vec{p},s)u_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + d^\dagger(\vec{p},s)v_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}] \\
& \times \sum_{s'}\int \mathrm{d}^3 p' \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}[b^\dagger(\vec{p'},s')\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y} + \mathrm{d}(\vec{p'},s')\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'y}]\Big\} \\
& - N\Big\{\sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}[b(\vec{p},s)u_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + d^\dagger(\vec{p},s)v_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}] \\
& \times \sum_{s'}\int \mathrm{d}^3 p' \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}[b^\dagger(\vec{p'},s')\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y} + \mathrm{d}(\vec{p'},s')\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'y}]\Big\}.
\end{aligned}$$

当 $x_0 > y_0$ 时, 费恩曼传播子为

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}S_F(x,y)_{\alpha\beta} = & \sum_{ss'} \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}} b(\vec{p},s)u_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} \\
& \times \int \mathrm{d}^3 p' \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}} b^\dagger(\vec{p'},s')\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y} \\
& - \sum_{ss'} \int \mathrm{d}^3 p \mathrm{d}^3 p' \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}} \\
& \times [-b^\dagger(\vec{p'},s')b(\vec{p},s)]u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y}.
\end{aligned}$$

由

$$b(\vec{p},s)b^\dagger(\vec{p}\,',s') - (-b^\dagger(\vec{p}\,',s')b(\vec{p},s)) = [b(\vec{p},s), b^\dagger(\vec{p}\,',s')]_+ = \delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p'}),$$

得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}S_F(x,y)_{\alpha\beta} = & \sum_{ss'} \int \mathrm{d}^3 p \mathrm{d}^3 p' \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}} \\
& \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px+\mathrm{i}p'y} u_\alpha(\vec{p},s)\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p'}) \\
= & \int \mathrm{d}^3 p \frac{m}{(2\pi)^3\omega_p} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)} \sum_s [u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s)]_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.2.45}$$

当 $x_0 < y_0$ 时, 费恩曼传播子为

$$\begin{aligned}
& \mathrm{i}S_F(x,y)_{\alpha\beta} \\
= & -\sum_{s'} \int \mathrm{d}^3 p' \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}[b^\dagger(\vec{p'},s')\bar{u}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'y} + \mathrm{d}(\vec{p'},s')\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'y}] \\
& \times \sum_s \int \mathrm{d}^3 p \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}[b(\vec{p},s)u_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + \mathrm{d}^\dagger(\vec{p},s)v_\alpha(\vec{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}] - N\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi_\beta}(y)\}
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{s'}\int d^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}d(\vec{p'},s')\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')e^{-ip'y}\sum_s\int d^3p\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}d^\dagger(\vec{p},s)v_\alpha(\vec{p},s)e^{ipx}$$

$$-\sum_{ss'}\int d^3pd^3p'\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}d^\dagger(\vec{p},s)d(\vec{p'},s')\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')v_\alpha(\vec{p},s)e^{-ip'y}e^{ipx}$$

$$= -\sum_{ss'}\int d^3p'd^3p\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}v_\alpha(\vec{p},s)\bar{v}_\beta(\vec{p'},s')e^{-ip'y+ipx}\delta_{ss'}\delta^3(\vec{p}-\vec{p'})$$

$$= \int d^3p\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}e^{ip(x-y)}\sum_s(-)[v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s)]_{\alpha\beta}. \tag{4.2.46}$$

由狄拉克方程一节附录中 (3.1A.3) 式及 (3.1A.4) 式可得

$$\sum_s u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) = \Lambda_+ = \frac{\not{p}+m}{2m},$$

$$-\sum_s v(\vec{p},s)\bar{v}(\vec{p},s) = \Lambda_- = \frac{m-\not{p}}{2m}.$$

我们得到

$$\begin{aligned} iS_F(x,y)_{\alpha\beta} = &\int d^3p\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_p}e^{-ip(x-y)}(\not{p}+m)_{\alpha\beta}\theta(x_0-y_0)\\ &+\int d^3p\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_p}e^{ip(x-y)}(m-\not{p})_{\alpha\beta}\theta(y_0-x_0), \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

我们可以验证, 它可以写成一个统一的积分：

$$iS_F(x,y)_{\alpha\beta} = \int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}\left[\frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}\right]_{\alpha\beta} = iS_F(x-y)_{\alpha\beta}. \tag{4.2.48}$$

注意 (4.2.47) 式的 $p=(p^0,p^1,p^2,p^3)$ 是在能壳上, 须满足：

$$(p^0)^2-(\vec{p})^2-m^2=0. \tag{4.2.49}$$

而 (4.2.48) 式的 p^μ 都是独立地从 $-\infty$ 积分到 ∞, (在实数轴上积分) 不受 (4.2.49) 式限制. 前面的两种传播子也一样.

证明

(1) 当 $x_0>y_0$ 时, 对 p_0 的积分可以化为图 4.2.1 的回路积分, 然后化为图 4.2.4 的积分. 我们得到

$$iS_F(x-y)_{\alpha\beta} = \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\oint_C\frac{dp_0}{2\pi}e^{-ip\cdot(x-y)}\frac{i(\not{p}+m)_{\alpha\beta}}{(p_0+\omega_p-i\epsilon)(p_0-\omega_p+i\epsilon)},$$

其中, $\omega_p \equiv \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$, c 为围绕 $z_0=\omega_p-\mathrm{i}\epsilon$ 的小回路. 当回路半径趋近于零时, 给出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}S_F(x-y)_{\alpha\beta} &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{(-2\pi\mathrm{i})(\mathrm{i})}{2\pi}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\frac{(\not p+m)_{\alpha\beta}}{(p_0+\omega_p-\mathrm{i}\epsilon)}\right\}_{p_0=\omega_p-\mathrm{i}\epsilon} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\frac{1}{2\omega_p}(\not p+m)_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

与 (4.2.47) 式一致.

(2) 当 $x_0<y_0$ 时, 对 p_0 的积分可以化为图 4.1.2 的回路积分, 然后化为正向绕 $-z_0$ 的小回路积分, 因而积分为

$$\mathrm{i}S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\oint_{C'}\frac{\mathrm{d}p_0}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\frac{\mathrm{i}(\not p+m)_{\alpha\beta}}{(p_0+\omega_p-\mathrm{i}\epsilon)(p_0-\omega_p+\mathrm{i}\epsilon)},$$

其中, c' 是绕 $-z_0=-\omega_p+\mathrm{i}\epsilon$ 的小回路, 由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{i}S_F(x-y)_{\alpha\beta} &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{(2\pi\mathrm{i})(\mathrm{i})}{2\pi}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}\frac{(\not p+m)_{\alpha\beta}}{(p_0-\omega_p+\mathrm{i}\epsilon)}\right\}_{p_0=-\omega_p+\mathrm{i}\epsilon} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{-1}{-2\omega_p}\times(-\omega_p\gamma^0+p_j\gamma^j+m)_{\alpha\beta}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[-\omega_p(x_0-y_0)-\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})]} \\ &\overset{\vec{p'}=-\vec{p}}{=} \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{p'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}[-\omega_p(x_0-y_0)+\vec{p'}\cdot(\vec{x}-\vec{y})]}(-\omega_p\gamma^0-p'_j\gamma^j+m)_{\alpha\beta} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_{p'}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'(x-y)}(m-\not p')_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

也与 (4.2.47) 式一致.

由于 $\not p^2=p^2I$, 我们可以把 (4.2.48) 式简写成

$$\begin{aligned}\mathrm{i}S_F(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\frac{\mathrm{i}(\not p+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}.\end{aligned} \tag{4.2.50}$$

习题 证明 (4.2.50) 式中的第二个等号.

在前边 4.1 节的两个例子中, $\mathscr{H}_I$ 都是由超过两个场量组成的, 这些场量处在同一个时空点, 这样, 在取正规乘积时就可能出现一些无穷大. 因此我们总是约定在计算微扰展开时它们是事先已经正规化好了的, 即

对 ϕ^4 理论 我们约定

$$\mathscr{H}_I=\frac{g}{4!}:\phi^4(x):=\frac{g}{4!}:\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x):, \tag{4.2.51}$$

对电动力学 我们约定

$$\mathscr{H}_I = e:\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu := e:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x): \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{H}_I =: \mathscr{H}_I:. \tag{4.2.52}$$

所以散射振幅公式变为

$$\begin{aligned} S_{f_i} =& \sum_n \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n \\ & \times\langle 0|T\big\{\overline{a(k_1')}\cdots\overline{b(p_m',s_m')}:\mathscr{H}_I(x_1):\cdots:\mathscr{H}_I(x_n):\underline{a^\dagger(k_1)}\cdots\underline{b^\dagger(p_n,s_n)}\big\}|0\rangle \\ \equiv& \sum_n S_{f_i}^{(n)} \end{aligned}$$

按维克定理, $T\{\ \cdots\ \}$ 可以化为场量的一切可能的收缩与其余部分 (未收缩的部分) 的正规乘积构成的单项式的和. 在这个过程中, $:\mathscr{H}_I(x):$ 中在同一时空点的各场量自己的收缩是不考虑的, 因为它们已经取了正规积了. 由于包含场的产生或者湮灭算子的正规积的真空平均值总是 0, $\langle 0|a^\dagger\cdots b^\dagger a\cdots b|0\rangle = 0$. 所以矩阵元 $\langle 0|T\{\ \cdots\ \}|0\rangle$ 只要考虑所有场算子全部缩并后得到的各项之和.

有了这些知识, 我们可以计算任何 $\mathscr{H}_I$ 是场量多项式的相互作用场的 S 矩阵元. 在下一章, 我们将具体计算 ϕ^4 理论和量子电动力学的 S 矩阵元, 并从中找到一些规律.

第 5 章　S 矩阵的分振幅、费恩曼积分和费恩曼图

在这一章, 我们具体计算两种场的 S 矩阵元的费恩曼积分表达式和费恩曼图.

5.1　ϕ^4 理论的费恩曼图

我们把

$$S_{f_i}^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\langle 0|\ T\{a(\vec{k_1'})\cdots\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)a^\dagger(\vec{k_1})\cdots\}\ |0\rangle \tag{5.1.1}$$

叫做 S 矩阵的分振幅, 它的关键计算是算

$$T^{(n)} = \langle 0|T\{\cdots\mathscr{H}_I(x_1)\cdots\mathscr{H}_I(x_n)\cdots\}|0\rangle. \tag{5.1.2}$$

这项的计算可以按如下进行.

(1) 把 $\mathscr{H}_I(x_j)$ 用场量写出, 比如在 ϕ^4 理论中微扰哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_I(x_j) = \frac{g}{4!}:\phi(x_j)\phi(x_j)\phi(x_j)\phi(x_j):. \tag{5.1.3}$$

(2) 把各个场量, 包括 $\mathscr{H}_I$ 中的场量以及构成 $|\mathrm{in}\rangle$ 态和 $\langle\mathrm{out}|$ 态的产生湮灭算子配成对, 只要各对的收缩都不为零. 直到把所有场量都用完.

(3) 将各对场量取收缩, 写出其传播子, 这些传播子的乘积之和等于 $T^{(n)}$(写时要考虑费米子对形成时需要引入的 $(-1)^l$ 因子) 中的一项. 因为取成对收缩的方式很多, $T^{(n)}$ 中有很多项. 将 $T^{(n)}$ 求出后, 就得到

$$S_{f_i}^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\ T^{(n)}(x_1,\cdots,x_n). \tag{5.1.4}$$

以下看一个例子.

例　在 ϕ^4 理论中计算 $T^{(2)}$, 令入射和出射粒子都是两个, 这时有

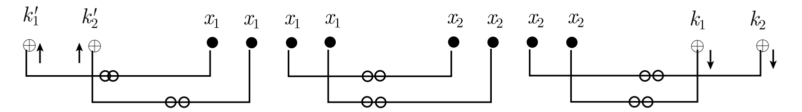
$$\begin{aligned}T^{(2)} =& \langle 0|\ T\{\overline{\underline{a(\vec{k_1'})}}\ \overline{\underline{a(\vec{k_2'})}}:\phi^4(x_1)::\phi^4(x_2):\underline{a^\dagger(\vec{k_1})}\ \underline{a^\dagger(\vec{k_2})}\}\ |0\rangle\\ =& \langle 0|\ T\{\overline{\underline{a(\vec{k_1'})}}\ \overline{\underline{a(\vec{k_2'})}}:\phi(x_1)\phi(x_1)\phi(x_1)\phi(x_1)\\ &::\phi(x_2)\phi(x_2)\phi(x_2)\phi(x_2):\underline{a^\dagger(\vec{k_1})}\ \underline{a^\dagger(\vec{k_2})}\}\ |0\rangle,\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

其中一共是 12 个场算子, 任意两个之间 (除了同在 x_1 或同在 x_2 之外) 都可以收缩. 它们必须成对地收缩完毕, 这就构成一个非零项. 比如, 其中有一项是

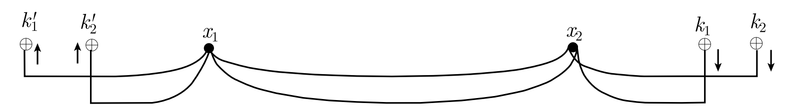
$$
\begin{aligned}
T_1^{(2)} &= \langle 0|\overline{a(\vec{k'}_1)}\;\overline{a(\vec{k'}_2)}\;\overset{①}{\phi}(x_1)\overset{②}{\phi}(x_1)\overset{③}{\phi}(x_1)\overset{④}{\phi}(x_1)\overset{①}{\phi}(x_2)\overset{②}{\phi}(x_2)\overset{③}{\phi}(x_2)\overset{④}{\phi}(x_2)\;\underline{a^\dagger(\vec{k}_1)}\;\underline{a^\dagger(\vec{k}_2)}|0\rangle \\
&= \overline{a(\vec{k'}_1)}\;\overline{a(\vec{k'}_2)}\;\overset{①}{\phi}(x_1)\overset{②}{\phi}(x_1)\overset{③}{\phi}(x_1)\overset{④}{\phi}(x_1)\overset{①}{\phi}(x_2)\overset{②}{\phi}(x_2)\overset{③}{\phi}(x_2)\overset{④}{\phi}(x_2)\;\underline{a^\dagger(\vec{k}_1)}\;\underline{a^\dagger(\vec{k}_2)}
\end{aligned}
\tag{5.1.6}
$$

由于四个 $\phi(x_1)$ 是相同的, 四个 $\phi(x_2)$ 也是相同的, 所以与这个项的值相同的项一共有 $\dfrac{(4!)\times(4!)}{2}$ 个. 除以 2, 是因为交换 x_1 处的③、④同时交换 x_2 处的①、②并不给出新的项.

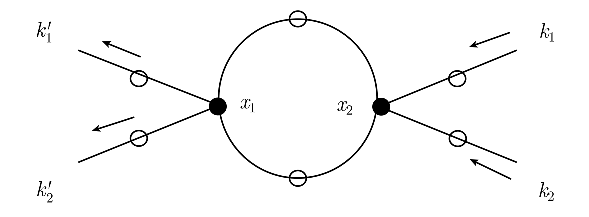
我们形象地将上面的项画成



在 $\phi(x_1),\cdots$ 地方, 为表示它是场量 ϕ, 用黑点表示. 上图又可简化为



其中, 每个节点出发的线相连接构成完整的连接线, 代表一个收缩. 此图还可以分布在平面上:



这样就好看多了, 这叫做费恩曼图, 其中 x_1 和 x_2 点叫顶角, x_1 和 x_2 之间的联线叫内线, 在顶角 x_1 和 x_2 之间的内线, 表示一个费恩曼传播子 $i\Delta_F(x_1-x_2)$, 其余线叫外线.

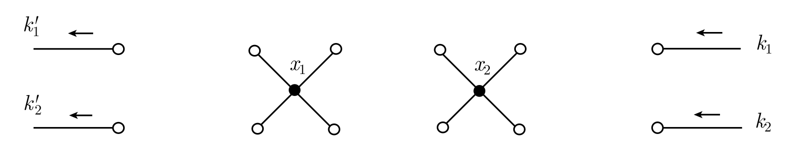
从这个例子看, 每一个场量都可表示为 x •—○ , 其中的空圈必须与另一个场量的空圈配成对, 每一个 $\mathscr{H}_I(x)$ 都可表示为四个场量共用一个黑点:

$\mathscr{H}_I(x) = \dfrac{g}{4!}$　　　　$\phi(x) =$ x

准确地说, $\mathscr{H}_I$ 的图才是完全的顶角, 其中黑点是顶角的顶点, 四根带空圈的线是顶角的外线或者叫顶角线. 费恩曼图中的内线和外线都是由顶角线组成的. 而构成 $|\text{in}\rangle$ 和 $|\text{out}\rangle$ 态的场算符可用不带黑点而带 k、k' 的图表示:

$\overline{a(k_1')}$ = k_1'　　　　$\underline{a^\dagger(k_1)}$ = k_1

这样我们只要将它们放在平面上,



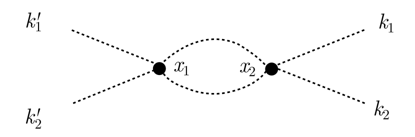
然后将空圈作任何可能的配对即可得到上例 (5.1.5) 式中的一项.

例如, 下图中

k_1', k_2', 1, 2, 4, 3　与　k_1', k_2', 1, 2, 4, 3

表示的项不是同一项.

通常我们在标量场中用虚线表示收缩, 并且省去作为连接键的空圈和作为入射线和出射线标志的箭头, 比如本页开头的项可以用下图表示:



其中, x_1 与 x_2 之间的连线是内线, 其余是外线, x_1 与 x_2 是顶角.

在以上构图中, 我们认为每个 $\mathscr{H}_I(x_j)$ 的各个场量都有权与别的地方的场量收缩, 这四个 $\phi(x_j)$ 的交换给出 4! 种可能的数值相同的 $T^{(n)}$, 我们可以先将它们标记成

$$\mathscr{H}_i(x) =:\overset{①}{\phi}(x)\overset{②}{\phi}(x)\overset{③}{\phi}(x)\overset{④}{\phi}(x):$$

比如,

$$a(\vec{k_1})a(\vec{k_2})a(\vec{k_3})a(\vec{k_4})\ \overset{①}{\phi}(x)\overset{②}{\phi}(x)\overset{③}{\phi}(x)\overset{④}{\phi}(x)$$

与

$$a(\vec{k_1})a(\vec{k_2})a(\vec{k_3})a(\vec{k_4})\ \overset{①}{\phi}(x)\overset{②}{\phi}(x)\overset{③}{\phi}(x)\overset{④}{\phi}(x)$$

是不同的项.

因此, 一般地, $T^{(n)}$ 中可能有 $(4!)^n$ 相同的项, 正好消去 $\dfrac{g}{4!}$ 下面的分母 4!; 但是有些情况下, 从连线情况看, 并不是所有 4! 种置换都给出新的项. 比如在前面的例子中两点间两根内线的交换并不给出新项.

图 5.1.1 对应的项为 (5.1.6) 式 (在图 5.1.1 和图 5.1.2 中用 x, x' 表示 x_1, x_2).

由两根内线的交换给出的图 5.1.2, 还是对应 (5.1.6) 式.

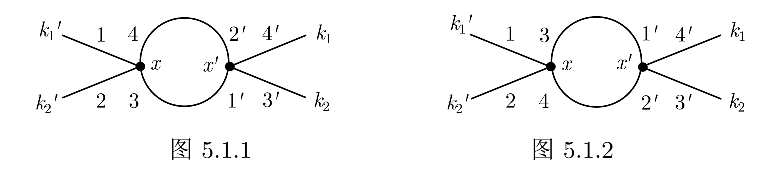


图 5.1.1　　　　图 5.1.2

换句话说, 虽然两张图的确相当于 x 的四个场及 x' 的四个场的不同排列, 然而对应的收缩乘积是同一个. 所以这种有对称性的费恩曼图总的相同的项数应为 $(4!)^n/S$, S 是内线的交换可以带来的对称变换数目, 此图 $S=2$. 一般来说, 一张费恩曼图如果只考虑它的点和线的连接关系, 而不考虑它的顶角字母和线的标号, 它可能把自己的一些点线映射到自己的另一些点线上, 但是不改变这张空的 (即没有标号和字母的) 费恩曼图连接关系. 这种映射是费恩曼图的对称变换. 由图 5.1.1 到图 5.1.2 就是空白图 5.1.3 的对称变换. 图 5.1.3 的对称因子是 $S=2$.

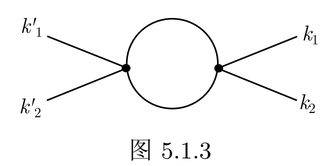


图 5.1.3

一般地说, 当费恩曼图没有对称性时, 由于

$$S^{(n)}=\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots \mathrm{d}^4x_n\, T^{(n)}(x_1\cdots x_n) \tag{5.1.7}$$

对 $x_1\cdots x_n$ 是对称的, 因此, $x_1\cdots x_n$ 的重排列给出的新项在对 x 积分后与原来相同. 这就使同一张费恩曼图由重排列 $x_1,\cdots,x_n$ 而带来 $n!$ 个相同的对 $S^{(n)}$ 的贡献项, 正好消去 $S^{(n)}$ 表示式分母 $n!$.

但是当费恩曼图有对称性时就要作更细微的分析, 比如图 5.1.4: 交换 x_2 和 x_3 并不给出新的 $T^{(n)}$ 中的项, 因此它对顶角交换具有两重对称 (当然在交换 x_2 和 x_3 时, 与 x_2 和 x_3 相关的顶角线也要跟着交换, 从而线 $x_1x_2 \leftrightarrow x_1x_3$, $x_2ax_3 \leftrightarrow x_3ax_2$), $s_v=2$. 对于不改变顶点只对线 a 和 b 的交换, 给出 $s_l=2$, $S=s_ls_v=4$. 因此, 在计算中取消 $\dfrac{g}{4!}$ 下面的 4! 和 $\dfrac{(-\mathrm{i})^n}{n!}$ 下面的 $n!$ 后, 必须将结果除以 S.

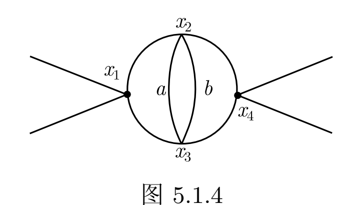


图 5.1.4

▲ 到这里, 我们必须强调, 一旦空白图上每个顶角标上了 x_j , 每个顶角伸出的四条顶角线标上了①、②、③、④, 则任何一张拓扑上不同的图 (这图要包括顶角的标号 x_j 及每个顶角四条顶角线各自的标号), 即表示唯一的一项.

它的在 $S^{(n)}$ 中的系数为 $\dfrac{(-\mathrm{i})^n}{n!}(\dfrac{g}{4!})^n$, 这是我们讨论图的贡献的出发点. 由顶角的顶角线的重新标号带来相同的 4! 个不同的维克展开项. 正好消去 4! 因子; 由顶角的顶点 x_i 的重标号, 也给出不同的维克展开项. 这些项在对 x_i 积分之前是不同的, 然而积分之后就对 $S^{(n)}$ 给出相同的项, 正好消去"$n!$"因子. 当这种重新标号的操作不带来新的连接关系时, 仍只能代表维克展开中的同一项. 一个空白图的对称操作能带来一个新的重标号方式, 因此对每一种标号方式, 都有 S 种标号方式与它代表同一种连接关系. 它们只代表维克展开的同一项. 因此在乘以 $(4!)^n n!$ 之后, 必须除以对称因子 S.

以上结果是对于一般情形. 如果一张费恩曼图可以分解为 k 个互不连接的子图, 则在标记 x_i 时可以先把 n 个 x_i 分为几个部分, 它们分别是 $l_1, l_2, \cdots, l_k$ 个, 这种分解方式有 $\dfrac{n!}{l_1! \times \cdots l_k!}$ 种. 然后在每个连接部分内填写 x_i , 它们分别有 $l_1!$ 种、$l_2!$ 种 $\cdots$ 方式. 而各张子图中顶角的线的对称交换只涉及该子图. 所以最后的总的重复数是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{S}\frac{n!}{l_1! \times \cdots l_k!} \times \underline{l_1! \times (\text{第 1 张子图顶角线的对称数})} \times \cdots \\ &\times \underline{l_k! \times (\text{第 } k \text{ 张子图顶角线的对称数})}\end{aligned}$$

由于 $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k \times S_0$, 这里 S_0 为将不同的等价子图 (比如, Γ_1 与 Γ_3 等价, Γ_2、Γ_4、Γ_6 等价, $\cdots$) 互相映射的对称数.

因此, 费恩曼积分为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{S}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\frac{n!}{l_1! \times \cdots} \times l_1! \times (\text{第 1 张子图顶角线的对称数}) \times \cdots \\ =&\frac{1}{S_0}\frac{(-\mathrm{i})^{l_1}}{S_1}\frac{1}{l_1!} \times l_1! \times (\text{第 1 张子图顶角线的对称数}) \times \cdots \\ =&\frac{1}{S_0} \times (\text{各张子图的费恩曼积分之积}).\end{aligned}$$

当费恩曼图分解为一系列真空图 Γ_1 和没有真空图的部分 Γ_2 时, 因为 Γ_1 与 Γ_2 不

等价, S_0 显然为 1, 所以费恩曼积分可分解为 Γ_1 和 Γ_2 的费恩曼积分的乘积.

$$S_\Gamma = S_{\Gamma_1} \times S_{\Gamma_2} \tag{5.1.8}$$

定理　回顾 (4.2.21) 式, 其分母是一系列真空图求和. 分子是连接外线的图与真空图的乘积, 我们可以将它写成一张连接外线的图与一系列真空图的积, 然后对连接外线的图求和. 因此 (4.2.21) 式就等于连接外线的图对应的费恩曼积分之和. 因此我们处理散射问题时不用考虑真空图.

例 1　图 5.1.5 的对称数 $S = 2 \times 4! = 48$.

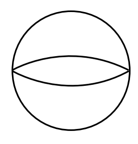


图 5.1.5

例 2　在 $\phi^3 + \phi^5$ 理论中有图 5.1.6, 它的对称数为 $S = s_{转动} \times s_{反射} = 5 \times 2 = 10$.

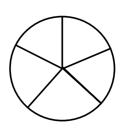


图 5.1.6

以下我们总结出费恩曼图的规则：

(1)　$\phi(x)$　　x

(2)　$\overline{a(\vec{k})}$　　k

(3)　$\underline{a^\dagger(\vec{k})}$　　k

(4)　$\underbrace{\phi(x)\phi(y)} = \mathrm{i}\Delta_F(x-y)$　　x　y

(5)　$\underbrace{\overline{a(\vec{k})}\phi(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}$　　k　x

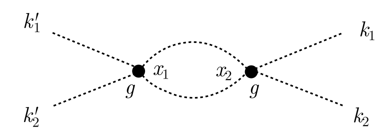
(6)　$\underbrace{\phi(x)\underline{a^\dagger(k)}} = \frac{\ }{\mathrm{e}}^{-\mathrm{i}kx}\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}$　　x　k

(7) 每个顶角提供一个 $g/4!$

根据这些规则, 只要画出一张费恩曼图, 便可写出该项的值.

这些规则称为坐标空间的费恩曼图规则, 它可以给出 (5.1.2) 式 $T^{(n)}$ 中一个特定的收缩项 $T_i^{(n)}$, 将 $T_i^{(n)}$ 乘以 $\dfrac{1}{n!}$ 之后对 $x_1, \cdots x_n$ 积分得到 (5.1.4) 式 $S^{(n)}$ 中的一项.

例如, 右图



给出 $T^{(2)}$ 中的一项:

$$T_1^{(2)} = \frac{g^2}{(4!)^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1'x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1'}}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2'x_1}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2'}}}\left(\mathrm{i}\Delta_F(x_1-x_2)\right)^2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2x_2}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}. \tag{5.1.9}$$

在 (4.2.39) 式中, 我们算出

$$\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$$

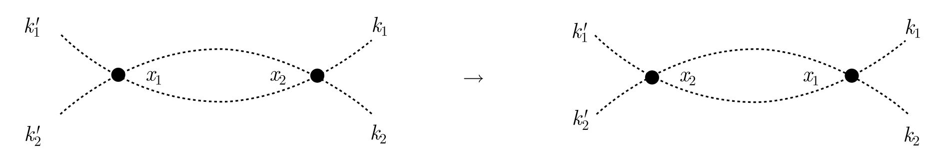
代入 (5.1.9) 式中, 可得

$$\begin{aligned}G=&\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 T_1^{(2)} = \left(-\mathrm{i}\frac{g}{4!}\right)^2\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1'}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2'}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}\\&\times\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x_1-x_2)}\ \frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \int\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'(x_1-x_2)}\\&\times\frac{\mathrm{i}}{k'^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\times\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1'+k_2')x_1}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1+k_2)x_2}\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

先对 x_1, x_2 积分给出

$$\begin{aligned}G=&\left(-\mathrm{i}\frac{g}{4!}\right)^2\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1'}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2'}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}\\&\times\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\ \frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \frac{\mathrm{i}}{k'^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\&\times\ (2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2'-k-k')(2\pi)^4\delta^4(k+k'-k_1-k_2)\end{aligned}$$

这张图属于 $S^{(2)}$. 再考虑交换 x_1 和 x_2 的图:



得到相同值, 这个因子 2 正好在后面 $S^{(2)}$ 的计算中抵消 $\dfrac{1}{2!}$ 因子. 另外, $\mathscr{H}_I$ 中四个 ϕ 场的交换给出 $(4!)^2 \div 2(\text{对称因子}) = \dfrac{(4!)^2}{2}$, 最后得到与它同类的对应于同一张空

白费恩曼图的所有的项对 $S^{(2)}$ 的贡献为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(-\mathrm{i}g)^2\prod_i\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_i}}}\prod_f\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_f}}}\\&\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{i}}{k'^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\&(2\pi)^4\delta^4(k_1'+k_2'-k-k')(2\pi)^4\delta^4(k+k'-k_1-k_2)\end{aligned}\tag{5.1.11}$$

式中, 第一个因子取 $\dfrac{1}{2}$是由于对称因子 $S=2$.

归纳起来有以下规则:

(1) [四线顶点图]　　$-\mathrm{i}g(2\pi)^4\delta^4(\sum k)$

(2) [两顶点间的虚线, 标 k]

$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\tag{5.1.12}$$

(3) [外线, 动量 k] 或 [外线, 动量 k]　　$\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}$

(4) 除以图的对称因子 S. 这些规则称为动量空间的费恩曼图规则.

以上是 $\mathscr{H}_I=\dfrac{g}{4!}\phi^4$ 是一个单项式的情形, 当是多项式时情况也类似.

比如, $\mathscr{H}_I=\left(\dfrac{g_2}{2!}\phi^2+\dfrac{g_3}{3!}\phi^3\right)$ 时有一项, 示意如下:

(1)

$$\langle 0|a_1a_2\ \overset{x_1}{(\phi\phi+\phi\phi\phi)}\overset{x_2}{(\phi\phi+\phi\phi\phi)}\overset{x_3}{(\phi\phi+\phi\phi\phi)}\ a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger|0\rangle$$

它的特点是在每个 x_j 只取多项式中的一项, 则当 x_j 之间进行置换时, 也相当于另一种联结方式. 比如将上式的 x_1 和 x_2 进行直接置换, 就是下式.

(2)

$$\langle 0|a_1a_2\ \overset{x_1}{(\phi\phi+\phi\phi\phi)}\overset{x_2}{(\phi\phi+\phi\phi\phi)}\overset{x_3}{(\phi\phi+\phi\phi\phi)}\ a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger|0\rangle$$

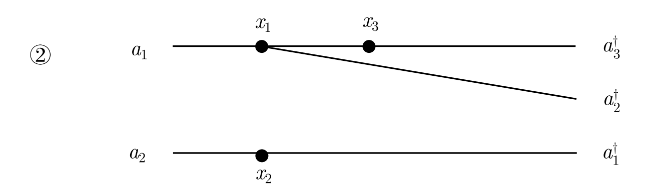
这两个式子的费恩曼图分别为

①

a_1　x_2　x_3　$a_3^\dagger$

$a_2^\dagger$

a_2　x_1　$a_1^\dagger$



因而 x_j 的各种置换也同样能消去 $S^{(n)}$ 表达式中的 $\dfrac{1}{n!}$ 因子. 上图 ① 中 $x_2\,x_3$ 之间为内线, ② 中 $x_1\,x_3$ 之间为内线, 其收缩 $=\mathrm{i}\Delta_F$.

在这例子中, 顶角有两种：① $\dfrac{g_2}{2}\phi^2$ $\quad\cdots\bullet\cdots$; ② $\dfrac{g_3}{3!}\phi^3$ $\quad\cdots\bullet\cdots$.

以上我们看到, 各个顶角 (即不同 x_j 处的 $\mathscr{H}_I$) 的对等性, 导致 $S^{(n)}$ 中 $\dfrac{1}{n!}$ 因子的消除, 而 $\mathscr{H}_I$ 中各项自己的对称性, 导致另外的 4!($\mathscr{H}_I$ 中的 ϕ^4 项)、3!(ϕ^3 项) 或 2!(ϕ^2 项) 的重复数, 可以消去 $\dfrac{g}{4!}$, $\dfrac{g_3}{3!}$, $\dfrac{g_2}{2!}$ 中的分母. 当然, 当费恩曼图自己有对称因子 S 时, 总的重复数要少 S 倍.

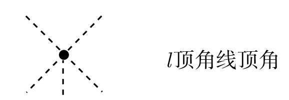
因此, 画出一张费恩曼图, 它对 $S^{(n)}$ 的贡献不必计算各个阶乘 ($n!$, $4!$, $\cdots$) 因子, 只要按 (5.1.12) 式中的三项规则写出来即可, 最后结果要除以图的对称因子 S. 在微扰为 ϕ^2 和 ϕ^3 的例子中费恩曼图规则 (1) 应该改为

$$(1') \qquad (-\mathrm{i}g_2)(2\pi)^4\delta^4(\sum k) \qquad \cdots\bullet\cdots$$

$$(-\mathrm{i}g_3)(2\pi)^4\delta^4(\sum k) \qquad \cdots\bullet\cdots$$

其余不变.

从以上分析我们也可以看到, 如果希望添加图



只要在 $\mathscr{H}_I$ 中加上一项 $\dfrac{g_l}{l!}:(\phi(x))^l:$即可.

如果在其中某个 $\phi(x)$ 上加上算子 ∂_μ, 就会在相应的顶角的线上乘以一个 $-\mathrm{i}k_\mu$ 的因子 (k_μ 的方向是进入顶角的动量), 比如考虑传播子 $\langle 0|T\{\,\phi(x)\phi(y)\,\}|0\rangle$, 加上 $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$ 变为

$$\langle 0|\partial_\mu\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle 0|T\{\,\phi(x)\phi(y)\,\}|0\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Delta_F(x-y) \tag{5.1.13}$$

(见 (4.2.40) 式) 这就会在动量空间的传播子上乘一个 $-\mathrm{i}k_\mu$ 因子：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\mu}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\&=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}\frac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\times(-\mathrm{i}k_\mu).\end{aligned}\tag{5.1.14}$$

5.2 量子电动力学 (QED) 中的微扰论

我们在这一小节介绍量子电动力学中的微扰论, 这是量子场论中最成功的典范, 也是物理学最辉煌的成就之一.

在量子电动力学中, 相互作用哈密顿密度是

$$\mathscr{H}_I=e:\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x):,$$

相应的矩阵元是

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(n)}=&\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\langle 0|a\cdots d\cdots T\Big\{\int\mathrm{d}^4x_1\mathscr{H}_I(x_1)\int\mathrm{d}^4x_2\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\int\mathrm{d}^4x_n\mathscr{H}_I(x_n)\Big\}\\&a^\dagger\cdots d^\dagger\cdots|0\rangle\\=&\langle 0|T\Big\{\bar{a}\cdots\bar{d}\cdots\int\mathrm{d}^4x_1\mathscr{H}_I(x_1)\int\mathrm{d}^4x_2\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\int\mathrm{d}^4x_n\mathscr{H}_I(x_n)\underline{a}^\dagger\cdots\underline{d}^\dagger\cdots\Big\}|0\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}a\cdots d\cdots&=a(\vec{k}_1',\lambda_1')\cdots b(\vec{p}_1',s_1')\cdots d(\vec{p}_2',s_2')\cdots,\\a^\dagger\cdots d^\dagger\cdots&=a^\dagger(\vec{k}_1,\lambda_1)\cdots b^\dagger(\vec{p}_1,s_1)\cdots d^\dagger(\vec{p}_2,s_2)\cdots,\end{aligned}$$

是光子的产生湮灭算符和电子和正电子的产生、湮灭算符.

由前面 3.3.3 节, 令 $L_k=a(\vec{k},3)-a(\vec{k},0), L_k^\dagger=a^\dagger(\vec{k},3)-a^\dagger(\vec{k},0)$, 则有 $[L_k,L_{k'}^\dagger]=0$. 对入射态和出射态, 要求 $L_k|\mathrm{in}\rangle=0$, $\langle\mathrm{out}|L_k^\dagger=0$, 由此可以证明, 入射态是由 $a^\dagger(\vec{k},1)$ 和 $a^\dagger(\vec{k},2)$ 以及 $L_k^\dagger$ 作用于作用于真空态上得到的物理态, 因此在 $a(k_1'\lambda_1')\cdots$ 及 $a^\dagger(k_1\lambda_1)\cdots$ 中只需包括 $\lambda=1,2$ 的光子, 虚光子 L_k 及 $L_k^\dagger$ 由于它们与 $\mathscr{H}_I(x_j)=V(x_j)$ 的对易子为全散度, 在 $\int\mathrm{d}^4x_j$ 之后消失, 因而可以认为在积分下

$$[\int\mathrm{d}^4xV(x),L_k]=0,$$

取厄米共轭得

$$[L_k^\dagger,\int\mathrm{d}^4xV(x)]=0.$$

我们可以把所有 $|\mathrm{in}\rangle$ 态中的 $L_k^\dagger$ 移到最左端, 把 $\langle\mathrm{out}|$ 态中的 L_k 移到最右端, 就可以证明它们对 $S_{fi}^{(n)}$ 无贡献.

在 QED 中：

$$\mathscr{H}_I =: e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) :,$$

从前面平面波展开可见, $\psi(x)$ 含 b 和 $d^\dagger$, 它只能与 $b^\dagger, d$ 或 $\bar{\psi}$ 形成收缩; $\bar{\psi}$ 含 $b^\dagger$ 和 d, 它只能与 $b, d^\dagger$ 或 ψ 形成收缩. 将表示收缩的连线加上箭头, 要求箭头方向是从 $\bar{\psi}, b^\dagger, d$ 出发, 并且进入到 $\psi, b, d^\dagger$ 的. 在作缩并连线时不可以两个箭头或两个箭尾对在一起, 就可以概括上面的配对规则.

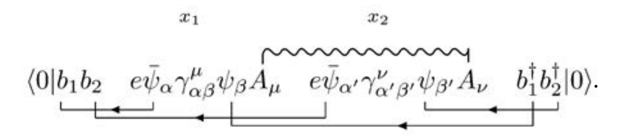
例 1　我们先看一个例子, 考虑两个电子入射两个电子出射的 $S^{(2)}$,

$$\begin{aligned}S^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2\langle 0|T\{b(\vec{p'}_1s'_1)b(\vec{p'}_2s'_2)\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)b^\dagger(\vec{p}_1s_1)b^\dagger(\vec{p}_2s_2)|0\rangle\\ &\equiv \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\int \mathrm{d}^4x_2 T^{(2)},\end{aligned}$$

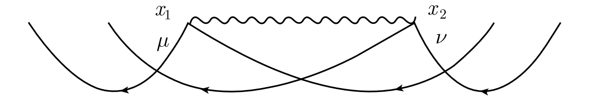
以下是 $T^{(2)}$ 中的一项:

$$T_1^{(2)} = \langle 0|b(\vec{p'_1}, s'_1)b(\vec{p'_2}, s'_2)e\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)e\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)b^\dagger(\vec{p_1}, s_1)b^\dagger(\vec{p_2}, s_2)|0\rangle,$$

此式可简写为



上面图示可以简化如下:



即 (图 5.2.1)

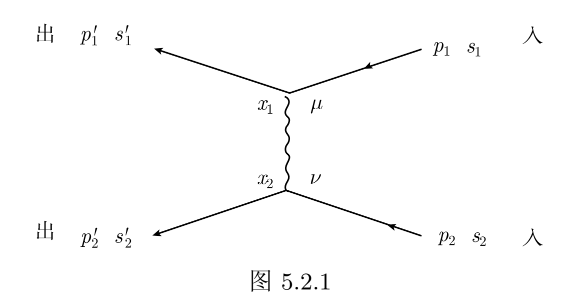


图 5.2.1

由第 4 章中关于缩并的公式写出该项

$$T_1^{(2)} = -e^2\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1'}}}\bar{u}_\alpha(\vec{p_1'},s_1')\gamma^\mu_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1}}}u_\beta(\vec{p_1},s_1)\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2'}}}\bar{u}_{\alpha'}(\vec{p_2'},s_2')\gamma^\nu_{\alpha'\beta'}$$
$$\times u_{\beta'}\cdot(\vec{p_2},s_2)\times\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2}}}\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1'x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2'x_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x_2} \tag{5.2.1}$$

(考虑到下面关于正负号的规则, 前面取负号).

关于费恩曼图正负号的确定

由于 $\overline{\psi}$ 和 ψ 是费米型场量, 因此根据费恩曼图写出散射振幅的时候要注意符号. 以下几个因素对正负号有影响.

(1) 入射态和出射态中费米场产生和湮灭算子的排列次序;

(2) 内线传播子 $S_F(x_1-x_2)$ 是定义为收缩 $\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}}(x_2)$, 如果取收缩 $\underbrace{\bar{\psi}(x_2)\psi}(x_1)$ 应该差一个符号;

(3) 各对费米场要成对地移到一起收缩时才能给出 $\pm S_F(x_i-x_j)$, 这个过程中费米场的交换可能带来符号的改变. 我们可以证明, 首尾封闭的费米圈有一个总的 (-1) 因子. 其余情形要具体分析.

比如 $T_1^{(2)}$ 表达式对应的图 5.2.1 是对以下散射矩阵

$$S^{(2)} = \frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int\mathrm{d}^4x_1\int\mathrm{d}^4x_2\langle 0|T\{b(\vec{p_1'},s_1')b(\vec{p_2'},s_2')\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)b^\dagger(\vec{p_1},s_1)b^\dagger(\vec{p_2},s_2)\}|0\rangle \tag{5.2.2}$$

的贡献之一, 由上述关于正负号的规定, 此图的贡献为

$$S_1^{(2)} = -\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}e^2\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1'}}}\bar{u}_\alpha(\vec{p_1'},s_1')\gamma^\mu_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1}}}u_\beta(\vec{p_1},s_1)\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2'}}}\bar{u}_{\alpha'}(\vec{p_2'},s_2')$$
$$\times\gamma^\nu_{\alpha'\beta'}u_{\beta'}(\vec{p_2},s_2)\times\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2}}}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_1'-p_1)x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_2'-p_2)x_2},$$

代入

$$\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) = \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x_1-x_2)}(-\mathrm{i}g_{\mu\nu})}{k^2+\mathrm{i}\epsilon},$$

得到

$$S_1^{(2)} = -\frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2!}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1'}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2'}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2}}}\bar{u}(\vec{p_1'},s_1')\gamma^\mu u(\vec{p_1},s_1)$$
$$\times\bar{u}(\vec{p_2'},s_2')\gamma^\nu u(\vec{p_2},s_2)\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-\mathrm{i})g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$$
$$\times(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_1'+k)(2\pi)^4\delta^4(p_2-p_2'-k)\times(2!). \tag{5.2.3}$$

最后乘一个因子 (2!) 是因为在对 x_1 和 x_2 交换时, 给出同样值的一项. 对于一张空白图 (图 5.2.2 即设有标记 x_1, x_2 的图), 可以用 2! 种方式标志两个顶角的顶点坐标, 它正好消去最前面分母的 (2!) 因子.

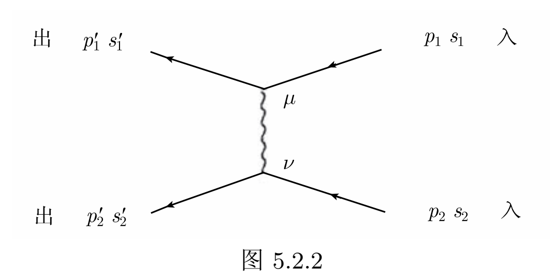


图 5.2.2

例 2 在两个电子入射两个电子出射的 $S^{(2)}$ 中, 与 $T_1^{(2)}$ 表达式不同, 还有一项非 **0** 贡献:

$$T_2^{(2)}=\langle 0|b(\overrightarrow{p_1'},s_1')b(\overrightarrow{p_2'},s_2')e\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)A_\mu(x_1)e\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)A_\nu(x_2)b^\dagger(\overrightarrow{p_1},s_1)b^\dagger(\overrightarrow{p_2},s_2)|0\rangle$$

它不能用交换 x_1 与 x_2 而从 $T_1^{(2)}$ 表达式得到, 其费恩曼图为图 5.2.3.

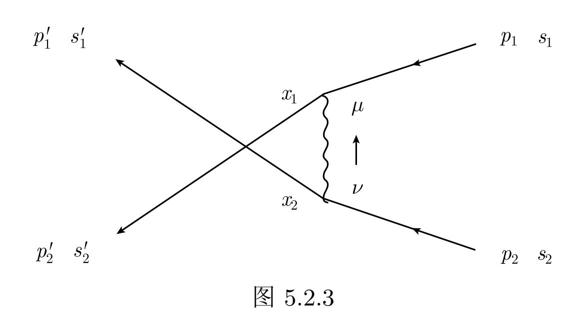


图 5.2.3

从此图可明显看出它与 $T_1^{(2)}$ 表达式对应的费恩曼图 5.2.1 不同. 它对应的空白图也与 $T_1^{(2)}$ 简写式不同, 它在坐标空间的 $T^{(2)}$ 中的值为

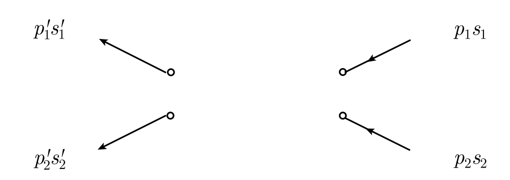
$$\begin{aligned}T_2^{(2)}=&e^2\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1'}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2'}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2}}}\bar{u}(\vec{p_1'},s_1')\gamma^\nu u(\vec{p_2},s_2)\bar{u}(\vec{p_2'},s_2')\\&\times\gamma^\mu u(\vec{p_1},s_1)\times \mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2'x_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1'x_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2x_2}\end{aligned}\tag{5.2.4}$$

对 x_1,x_2 积分之后对 $S^{(2)}$ 的贡献为 (已由 $x_1\leftrightarrow x_2$ 消去 $\dfrac{1}{2!}$ 因子)

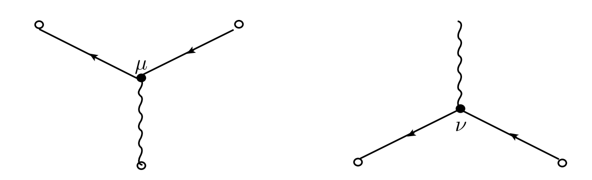
$$\begin{aligned}S_2^{(2)}=&(-\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{(-\mathrm{i})g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}(2\pi)^4\delta^4(p_1+k-p_2')(2\pi)^4\delta^4(p_2-k-p_1')\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1'}}}\\&\times\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2'}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_1}}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p_2}}}\\&\times\bar{u}(\vec{p_1'}s_1')\gamma^\nu u(\vec{p_2}s_2)\bar{u}(\vec{p_2'}s_2')\gamma^\mu u(\vec{p_1}s_1).\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

由以上例子说明对电子与电子碰撞的二级微扰 $S^{(2)}$ 可以用以下法则找出费恩曼图.

(1) 画出四个外部线头:



(2) 加上中间两顶角



(3) 然后尽可能的将空圈配对, 连接之后就形成费恩曼图.

其中,

或

是不允许的, 因为假设 $\mathscr{H}_I$ 已经先正规化了. 这样你会发现总共只有以上两种可能的连接关系不同的空白 (即不标记坐标的费恩曼图) 费恩曼图.

▲以上构图方法和对应的费恩曼积分公式适用于一般情况. 它的理由是, 如果将顶角的每条顶角线标上号, 将顶角的坐标也标上 x_j, 则一张图就一一对应地给出一个完全收缩了的 $T\{\cdots\}$ 中的一项. 然后再考虑重新排列 $\{x_j\}$ 给出 $n!$, 与 $S^{(n)}$ 表式中 $\dfrac{1}{n!}$ 相消, 重排同一顶角处相同顶角线 (现在在量子电动力学中没有). 可以得到 $\mathscr{H}_I$ 内部对称因子, 消去 $\dfrac{g}{4!}, \dfrac{g_3}{3!}, \dfrac{g_2}{2!}$(在 ϕ 场中) 的 $\dfrac{1}{4!}, \dfrac{1}{3!}, \dfrac{1}{2!}$ 因子, 就最终得到费恩曼规则. 最后要除以对称因子是由于当空白费恩曼图有对称性时, 空白图的对称操作得到的 S 张标记图虽然代表不同的标记方式, 但是它们代表同一种连接关系, 因而代表在维克展开中相同的项. 费恩曼用此法又省事又不易出错, 是他的重要贡献.

例 3　费米圈

有的时候费米子线形成封闭的圈, 在圈上费米子线的方向是连贯一致的. 比如两个光子入射, 一个光子出射时考虑三级微扰中 $S^{(3)}$ 中的一项:

$$T_1^{(3)} = \langle 0|a(\vec{k'}_1,\lambda'_1)\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta A_\mu(x_1)\ \ \bar{\psi}_{\alpha'}\gamma^\nu_{\alpha'\beta'}\psi_{\beta'}A_\nu(x_2)\ \ \bar{\psi}_{\alpha''}\gamma^\lambda_{\alpha''\beta''}\psi_{\beta''}A_\lambda(x_3)a^\dagger(\vec{k}_1,\lambda_1)a^\dagger(\vec{k}_2,\lambda_2)|0\rangle$$

$$T_1^{(3)} = e^3\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k'_1}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_1x_1}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_3}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2x_2}$$

$$\times\epsilon_\mu(\vec{k'}_1\lambda'_1)\epsilon_\nu(\vec{k}_2\lambda_2)\epsilon_\lambda(\vec{k}_1\lambda_1)\mathrm{i}S_F(x_1-x_2)_{\beta\alpha'}\gamma^\nu_{\alpha'\beta'}$$
$$\times\mathrm{i}S_F(x_2-x_3)_{\beta'\alpha''}\gamma^\lambda_{\alpha''\beta''}\mathrm{i}S_F(x_3-x_1)_{\beta''\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}(-1), \tag{5.2.6}$$

其中, (-1) 因子是因为 $\psi_{\beta''}(x_3)$ 要放到 $\bar{\psi}_\alpha(x_1)$ 之前才得到 $\mathrm{i}S_F(x_3-x_1)$, 而这要越过 5 个费米场 ψ 或 $\bar{\psi}$). 上式给出一个 tr 来, 也就是 (图 5.2.4)

$$T_1^{(3)}=e^3\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k'_1}}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}}}\epsilon_\mu(\vec{k'}_1\lambda'_1)\epsilon_\nu(\vec{k}_2\lambda_2)\epsilon_\lambda(\vec{k}_1\lambda_1)$$
$$\times(-1)\mathrm{tr}[\mathrm{i}S_F(x_1-x_2)\gamma^\nu\mathrm{i}S_F(x_2-x_3)\gamma^\lambda\mathrm{i}S_F(x_3-x_1)\gamma^\mu]. \tag{5.2.7}$$

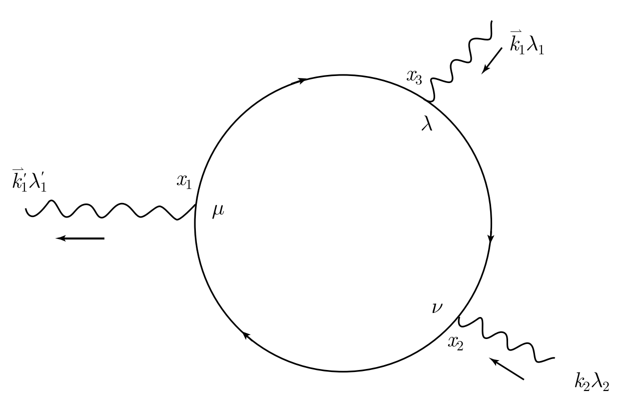


图 5.2.4

这个结论不难推广到 $S^{(n)}$ 中的费米圈, 请读者自己思考.

以上的例子, 可以推广到一般情形, 得到由费恩曼图写出费恩曼积分 (费恩曼图值) 的步骤, 导致如下费恩曼图规则.

(1) 在坐标空间:

① n 级微扰有 n 个顶角;

② 顶角对应 $-\mathrm{i}e\gamma^\mu$;

③ 内部光子线 $\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x_k-x_l)$;

④ 内部费米子线 $\mathrm{i}S_F(x_k-x_l)\Rightarrow\psi(x_k)\bar{\psi}(x_l)$;

⑤ 外部费米子线;

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\ (\text{入射电子}),$$
$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\bar{v}(\vec{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\ (\text{入射正电子}),$$

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\bar{u}(\overrightarrow{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\ (\text{出射电子}),\quad \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}v(\overrightarrow{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\ (\text{出射正电子}).$$

⑥ 外部光子线;

$$\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\epsilon_\mu(\overrightarrow{k},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\ (\text{入射光子}),\qquad \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\epsilon_\mu(\overrightarrow{k},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ (\text{出射光子}).$$

⑦ 费米线是中间不间断的, 方向一致的. 沿着费米子线但是逆着费米子线的方向是一系列矩阵相乘;

⑧ 费米子线形成环路时要加上 $(-1)\mathrm{tr}$;

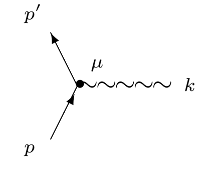
⑨ 对顶角的坐标空间积分;

⑩ 乘以 $1/S$. 在量子电动力学中, 当没有真空图时, 因子 $S=1$.

我们将费恩曼传播子的对动量积分的形式代入坐标空间的费恩曼传播子, 发现费恩曼图即对应的费恩曼积分对坐标的依赖关系总是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\sum_j p_j}$, 其中 p_j 是流入 x 的各线的动量. 对 x 的积分给出 $(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_j p_j)$. 在某些问题中我们对某个 x 不积分, 这时就对该点留下这个指数因子. 这在 6.7 节的推导中有用.

在对坐标 (时空) 积分之后, 给出如下的**在动量空间的费恩曼图法则**.

(2) 在动量空间:



① n 级微扰有 n 个顶角

顶角因子为

$$(-\mathrm{i}e)\gamma^\mu(2\pi)^4\delta^4(p-p'\pm k)(\text{如果光子线动量 } k \text{ 是进入 } \mu \text{ 顶角时取 } + \text{ 号})$$

② 内部光子线为

$$\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(k)=\frac{(-\mathrm{i})g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$$

μ　　ν

③内部费米子线为

$$\mathrm{i}S_F(p)=\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon}$$

p

注意动量 p 的方向必须与费米子线的方向一致;

④ 外部费米子线如下

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u(\overrightarrow{p},s) \qquad \text{(电子入射)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\bar{v}(\overrightarrow{p},s) \qquad \text{(正电子入射)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\bar{u}(\overrightarrow{p},s) \qquad \text{(电子出射)}$$

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}v(\overrightarrow{p},s) \qquad \text{(正电子出射)}$$

⑤ 外部光子线为

$$\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\epsilon_\mu(k,\lambda) \qquad \text{(光子入射)} \quad \text{(光子出射)}$$

⑥ 对内线的 4-动量积分: $\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$, $\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}$;

⑦ 费米子线上是一连串 4×4 矩阵相乘, 应该逆着费米子线方向排列这些矩阵的次序, 费米子环路要另加 $(-1)\mathrm{tr}$;

⑧ 除以对称因子 S, 电动力学有外线的连接图 $S=1$.

写出费恩曼图值 (即费恩曼积分) 的步骤 (QED)

当我们解到一个具体问题时, 我们要做如下处理.

(1) 根据题意, 首先画出入射线和出射线, 然后根据微扰的级别给出顶角数目, 画出费恩曼图.

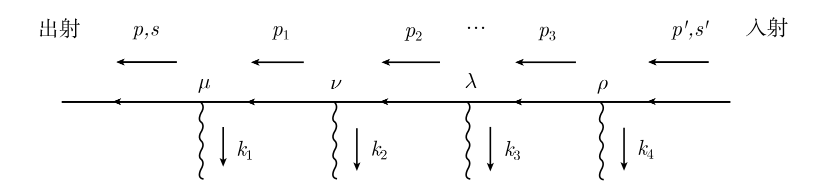
(2) 在图上标明入射线, 出射线, 对电子或正电子, 标明入射和出射动量 p 和自旋 s, 对光子标明动量 k 和偏振 λ, 动量用箭头标明方向, 应与出入射一致.

(3) 在顶角处标上 μ,ν,λ,ρ 等.

(4) 在内线, 用箭头标明所取的内线动量方向. 对电子或正电子, 必须使所标的动量方向与费米子线的方向一致.

(5) 对于每一根开放的费米子线, 顺次从费米子线箭头开始一直写到箭尾得到一项, 它们是 (见下图):

$$\bar{u}(\vec{p},s)\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\cdots\gamma^\lambda\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_4-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\rho u(\vec{p}',s')$$



这根线是电子入射和电子出射, 如果遇到正电子情形, $u, \bar{u}$ 要改为 $v, \bar{v}$.

(6) 对费米子圈, 写出

$$(-1)\mathrm{tr}[\gamma^{\mu}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1+m-\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\nu}\cdots\gamma^{\rho}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_4+m-\mathrm{i}\epsilon}].$$

(7) 对每个出射或入射光子线, 写出 $\epsilon_{\mu}(\vec{k},\lambda)$.

(8) 对每个光子内线, 写出

$$\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}.$$

(9) 对每个顶角, 写出

$$(-\mathrm{i}e)(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2\pm k),$$

p_1 为进入顶角的费米子动量, p_2 为出去的费米子动量, k 为光子动量, 如果进入顶角取正号, 否则取负号.

(10) 写出所有对内线动量积分 (在式子前面)

$$\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4},\quad \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}.$$

(11) 对所有外线, 写出规一因子:

$$\text{电子和正电子}:\quad \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}},$$

$$\text{光子}:\quad \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\epsilon_{\mu}(\vec{k},\lambda).$$

附录 5.2A　光子的入射态 (只考虑横向光子)

(1) 由于 $|\mathrm{in}\rangle$ 和 $\langle\mathrm{out}|$ 必须是物理态, 由 $[L_k, L_{k'}^{\dagger}]=[L_k, L_{k'}]=[L_k^{\dagger}, L_{k'}^{\dagger}]=0$, 可以证明它们只能是

$$\langle\varphi_{\tau}|(1+\int\mathrm{d}^3kC(k)L_k+\int\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'C(kk')L_kL_{k'}+\cdots)$$

和

$$(1+\int\mathrm{d}^3kC'(k)L_k^{\dagger}+\int\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^3k'C'(kk')L_k^{\dagger}L_{k'}^{\dagger}+\cdots)|\varphi_{\tau}'\rangle$$

的形式. 其中 $|\varphi'_\tau\rangle$ 和 $|\varphi_\tau\rangle$ 中只有横向光子, 也就是 $\lambda=1,2$ 的光子产生算子作用于真空态 $|0\rangle$ 上形成的态.

(2) 由 $L_{k'}=a(\vec{k'},3)-a(\vec{k'},0)$, 得 $([a(\vec{k},\lambda),a^\dagger(\vec{k'},\lambda')]=-g_{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'}))$

$$[A_\mu(x),L_{k'}]=\sum_\lambda\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\epsilon_\mu(\vec{k},\lambda)[a(\vec{k}\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}+a^\dagger(\vec{k}\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},L_{k'}],$$

$$\begin{aligned}[A_\mu(x),L_{k'}]&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}[\epsilon_\mu(k,3)(-1)+\epsilon_\mu(k,0)(-1)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\delta^3(\vec{k}-\vec{k'})\\&=\frac{-1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}[\epsilon_\mu(\vec{k'},0)+\epsilon_\mu(\vec{k'},3)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\\&=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}\omega_{k'}}(+\mathrm{i})\partial_\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x},\end{aligned}$$

因此, $\mathscr{H}_I$ 与 $L_{k'}$ 的对易子为

$$[eA_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi,L_{k'}]\quad=\frac{(+\mathrm{i})e}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}\omega_{k'}}\bar\psi\gamma^\mu\psi\partial_\mu\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}\sim k'_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x}.$$

由第 6 章 (6.4.18) 式, 这项对于 S 矩阵贡献为 0(当没有反常时).

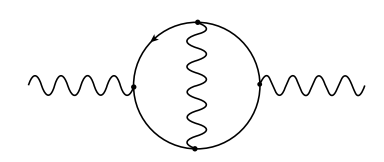
附录 5.2B　量子电动力学中费恩曼图计算题

(1)

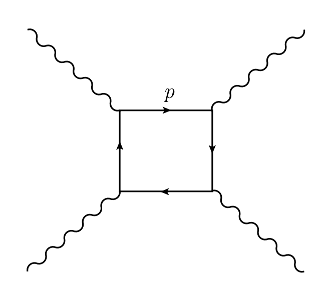
$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\int\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\bar u(\overrightarrow{p'},s')\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not p_1-m+\mathrm{i}\epsilon}$$
$$\times\gamma^\nu u(\overrightarrow{p},s)\epsilon_\mu(\overrightarrow{k},\lambda)\epsilon_\nu(\overrightarrow{k'},\lambda')(-\mathrm{i}e)(2\pi)^4\delta^4(p-p_1-k')(-\mathrm{i}e)(2\pi)^4\delta^4(p_1+k-p')$$

以下请读者考虑下列图的值. (指标不全时, 请读者自己补足)

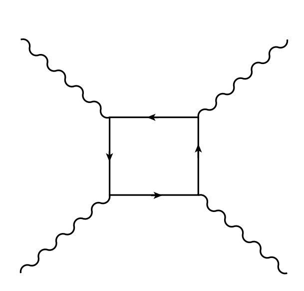
(2)



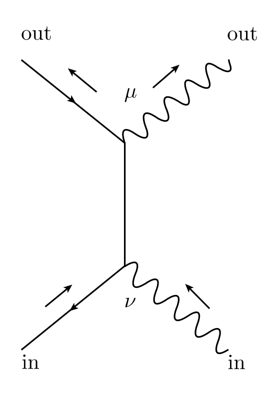
(3)



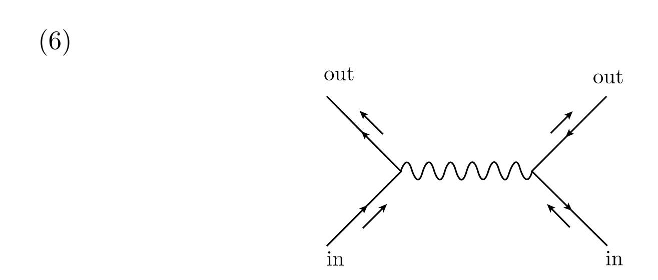
(4)



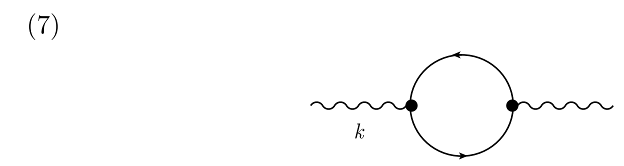
(5)



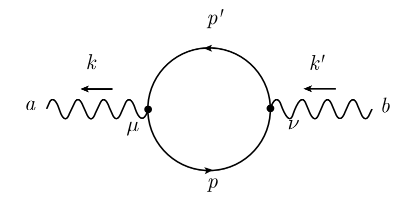
(6)



(7)



解:

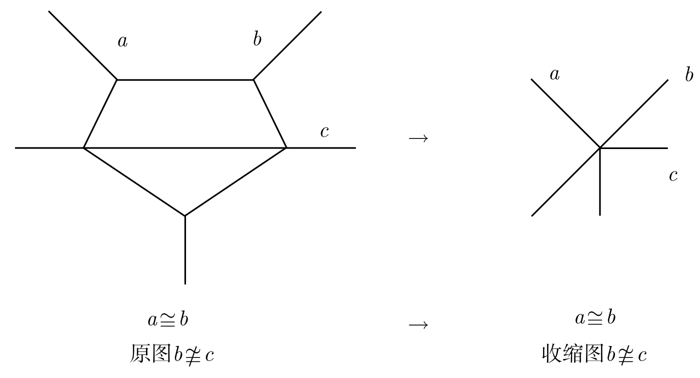


$$
\int\frac{\mathrm{d}^4p'}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{i}e)^2(-1)\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}\,'-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon}\right)(2\pi)^4\delta^4(p'-k-p)
$$
$$
\times(2\pi)^4\delta^4(p+k'-p')
$$

关于图论变为约化图时 $\boldsymbol{S=s_vs_l}$ 变化可能的备忘录 (为重整化用)

(1) 关于 s_l

设约化图为原图中将某些子图收缩为一点而成, 则原图的顶角线的对称性当然会保持.



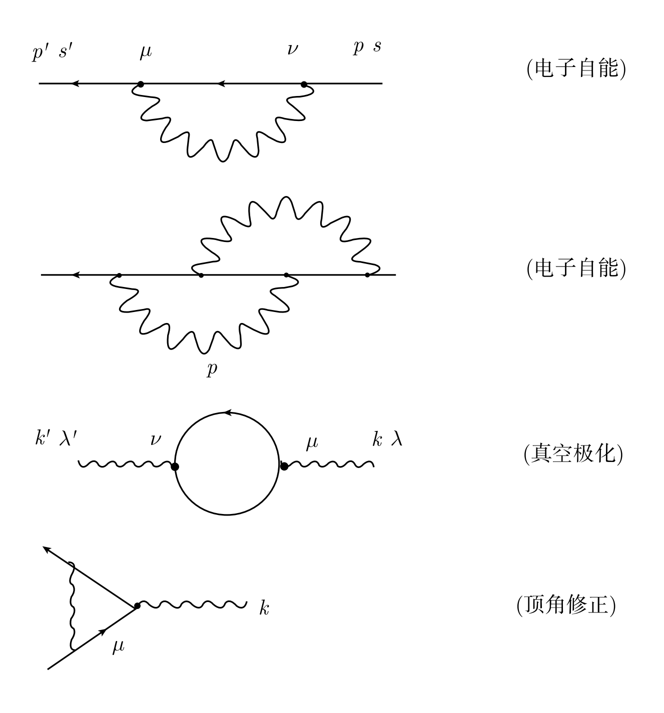
这个问题可以人为的将 c 标上与 ab 不同的记号进入拼接程序, 就像一般拼图开始时将一切顶角线认为不同一样.

(2) 关于 S_v

假设约化图 A, B, C 各不相同, 当然不存在 s_v 增加的可能, 即在原图中有几个对称的区域成为 A 的原形, 则这些原形收缩后约化图坐标点 (这些点原来是一些子图) 当然保持这种对称性, 所以 s_v 不减少. 反过来, 如果约化使某些本不相同的区域收缩变成了相同环境的点, 即外线相同,s_v 可能增加, 这时只有不同的原形收缩后变为相同约化图才可能. 在此情况下, 可以人为地认为它们是不同的约化图, 代表 $\mathscr{H}_I$ 中添加的不同项即不同的添加顶角即可.

由于约化图的原形的对称性, 顶角线的对称性可以人为地保持原样, 而不同内部结构的原形在收缩约化后又可人为地认定为不同品种的新顶角, 所以从原则上可以由约化之后的图恢复到它的原形. 从而在这样处理之后, s_v 及 s_l 均不会变大, 这是因为它的原形既是 *connected*(连接), 又是 *proper*(正规) 的 (至少有两根线连接不同部分). 约化图不论是在 $S^{(n)}$ 的哪个 n 引进的, 都不会因为原形出现在另一个 n' 而改变一一对应关系 (即一张包含原形的图恰恰有一张有约化图的图与之相消).

习题 找出下面四图在 $S^{(n)}$ 中的对应项, 即用 $\langle 0|\cdots\cdots|0\rangle$ 的表式写出其在坐标和动量空间的式子.



5.3 散射截面

由 S 矩阵元可以求得散射概率, 并且与实验比较. 在本小节, 我们介绍相关的计算.

对于正交归一的分立态 $|i\rangle, \langle f|$, 由 n 个相近的初态出发, 不相干地到达 m 个终态的非相干概率是

$$\frac{1}{n}\sum_{f=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|\langle f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|i\rangle|^2 = \text{概率}P.$$

考虑到 $\sum\limits_i \to \int \frac{\mathrm{d}i}{\delta}$, δ 是 $|i\rangle$ 每个态占用的参量空间的体积, 又考虑到对连续态, 是用

$$\sum_i |i\rangle\langle i| \longrightarrow \int \mathrm{d}i\widetilde{|i\rangle}\widetilde{\langle i|} = \int \frac{\mathrm{d}i}{\delta}|i\rangle\langle i|$$

进行归一化的. 因此, 连续态 $\widetilde{|i\rangle}$ 与分立态 $|i\rangle$ 的关系是

$$\widetilde{|i\rangle} = \frac{|i\rangle}{\sqrt{\delta}}, \quad \frac{1}{\delta}\ \text{是连续态在参量空间的态密度.}$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_f\sum_i|\langle f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|i\rangle|^2 \to \int_{\Delta_f}\frac{\mathrm{d}f}{\delta_f}\int_{\Delta_i}\frac{\mathrm{d}i}{\delta_i}|\langle f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}|i\rangle|^2\\ =&\int_{\Delta_f}\mathrm{d}f\int_{\Delta_i}\mathrm{d}i|\widetilde{\langle f}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\widetilde{|i\rangle}|^2, \quad n=\sum_{i=1}^{n}1 \to \int_{\Delta_i}\frac{\mathrm{d}i}{\delta_i} = \rho\int_{\Delta i}\mathrm{d}i = n,\end{aligned}$$

因此在初态和终态是连续时几率 P 变为

$$P = \frac{1}{\rho\int_{\Delta_i}\mathrm{d}i}\int_{\Delta_f}\mathrm{d}f\int_{\Delta_i}\mathrm{d}i|\widetilde{\langle f}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\widetilde{|i\rangle}|^2,$$

其中, $\rho\int_{\Delta_i}\mathrm{d}i$ 是初态数目.

在散射问题中变为

$$P = \frac{1}{\rho\int_{\Delta_i}\prod\limits_i \mathrm{d}^3\vec{p}_i}\int_{\Delta_i}\prod_i \mathrm{d}^3\vec{p}_i\int_{\Delta_f}\prod_f \mathrm{d}^3\vec{p}_f|\langle 0|\prod_f a_f(\vec{p}_f)S\prod_i a^\dagger(\vec{p}_i)|0\rangle|^2,$$

其中, $S = U(+\infty, -\infty)$ 是散射演化算符.

我们可以证明 $\langle 0|\cdots S\cdots|0\rangle$ 总是以 $\mathfrak{m}(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)$ 的形式出现. 其中 $(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)$ 是由积分 $\int_{VT}\mathrm{d}^4x\exp i(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)x$ 得到的. $\mathfrak{m}$ 为有限矩阵元. 因此, 到达终态的元振幅是

$$\mathrm{d}P=\frac{1}{\rho}\prod_f\mathrm{d}^3\vec{p}_f|\mathfrak{m}|^2[(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)]^2.$$

在附录中我们证明在初态 $p_x\to p_x+\Delta p_x$, $p_y\to p_y+\Delta p_y$, $p_z\to p_z+\Delta p_z$ 的区间中, 在 $V=L_x\times L_y\times L_z$ 的体积中, 周期富氏级数模式的数目是 $\frac{V}{(2\pi)^3}\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z$. 因而 $\rho=\prod\limits_i[\frac{V}{(2\pi)^3}]$. 另一方面, $[(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)]^2$ 实际上等于 $(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)VT$, 其中 V 为体积, T 为散射经过的总时间. 由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P&=\prod_f\mathrm{d}^3\vec{p}_f|\mathfrak{m}|^2(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\prod_i[\frac{(2\pi)^3}{V}]VT\\&=\prod_f\mathrm{d}^3\vec{p}_f|\mathfrak{m}|^2(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\prod_i(2\pi)^3\prod_i(\frac{1}{V})VT,\end{aligned}$$

其中, $\prod\limits_i(\frac{1}{V})$ 表示入射粒子的密度 (单位体积粒子数), 用 $\prod\limits_i\mu_i$ 表示,

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{VT}&=\text{单位时间, 单位体积中的跃迁元概率}\\&=\prod_f\mathrm{d}^3\vec{p}_f|\mathfrak{m}|^2(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\prod_i[\mu_i(2\pi)^3].\end{aligned}$$

其中, μ_i 是入射粒子的密度. 在两个粒子碰撞时, 经常用散射截面表示散射概率. 当 $i=a,b$ 时, 元概率为

$$\begin{aligned}\text{元概率}&=\overbrace{v_{ab}\mu_a}^{J_{ab}}\mu_b\mathrm{d}\sigma\\&=\prod_f\mathrm{d}^3\vec{p}_f|\mathfrak{m}|^2(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\mu_a\mu_b\cdot(2\pi)^6,\end{aligned}$$

其中, $J_{ab}=v_{ab}\mu_a$ 是 a 粒子的相对于静止 b 粒子的流密度, $\mathrm{d}\sigma$ 是元散射截面, 我们得到 $\mathrm{d}\sigma$ 为

$$\mathrm{d}\sigma=\prod_f\mathrm{d}^3\vec{p}_f|\mathfrak{m}|^2(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\cdot(2\pi)^6/v_{ab}.$$

附录 5.3A　振子模式数等计算

(1) 设傅氏级数项振子模式为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p_x x+p_y y+p_z z)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{p}\cdot\vec{x}}.$$

则周期边界条件要求

$$p_x L_x=2\pi m_x,\quad p_y L_y=2\pi m_y,\quad p_z L_z=2\pi m_z,$$

m_x, m_y, m_z 为三个整数. $p_x\to p_x+\Delta p_x$ 之间可能有的整数数目为 (L_x 足够大)

$$\frac{\Delta m_x}{\Delta p_x}=\frac{L_x}{2\pi}.$$

同理：

$$\frac{\Delta m_y}{\Delta p_y}=\frac{L_y}{2\pi},\quad \frac{\Delta m_z}{\Delta p_z}=\frac{L_z}{2\pi}.$$

在此范围内的振动模式数目为

$$n=\Delta m_x\Delta m_y\Delta m_z,$$

即

$$n=\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z\frac{L_x}{2\pi}\frac{L_y}{2\pi}\frac{L_z}{2\pi}=\frac{V}{(2\pi)^3}\Delta p_x\Delta p_y\Delta p_z.$$

(2) $(2\pi)^4\delta^4(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)$ 是由下述积分得到的：

$$(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)=\int\limits_{VT}\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)x},$$

$$\begin{aligned}[(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)]^2&=\int\limits_{VT}\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sum\limits_i p_i-\sum\limits_f p_f)x}(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\\&\doteq\int\limits_{VT}\mathrm{d}^4x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}0\cdot x}(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\\&=\int\limits_{VT}\mathrm{d}^4x(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)\\&=(2\pi)^4\delta^4(\sum_i p_i-\sum_f p_f)VT.\end{aligned}$$

第 6 章　重整化 (一) 量子电动力学单圈图的重整化

6.1　发 散 积 分

量子电动力学 (QED) 是到目前为止最成功的量子场论. 它与实验比较相对精度达到 10^{-7}. 这在量子场论中是绝无仅有的, 在其他实验科学中, 可能也是罕见的. 要与实验符合得这样好, 必须引入重整化的手续, 因此我们着重介绍 QED 的重整化. 当我们进一步计算高阶费恩曼图时, 我们会遇到一些圈图, 这时我们有可能遇到动量空间中的发散积分. 下面介绍最典型的几种发散积分.

6.1.1　真空极化

考虑图 6.1.1,

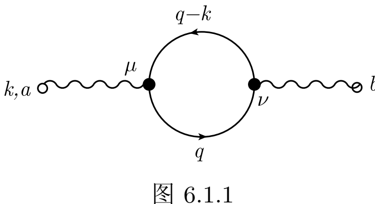


图 6.1.1

图中在 a 点和 b 点的空圈表示未配对的顶角线端点. 它的费恩曼积分是

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\Big[(-\mathrm{i}e\gamma^\mu)\frac{\mathrm{i}}{\not{q}-\not{k}-m+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not{q}-m+\mathrm{i}\epsilon}\Big]. \tag{6.1.1}$$

如果 a 端和 b 端接外线, 则费恩曼图的值应再乘以光子的外线因子. 比如，图 6.1.2 的费恩曼积分为

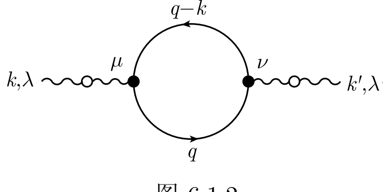


图 6.1.2

$$J_\Gamma=(2\pi)^4\delta^4(k-k')\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\epsilon_\mu(k,\lambda)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k'}}}\epsilon_\nu(k',\lambda')\Pi^{\mu\nu}(k). \tag{6.1.2}$$

如果 a 端和 b 端接光子内线, 则图 6.1.3 对应的费恩曼积分为

$$J_\Gamma = \int (2\pi)^4\ \delta^4(k-k')\ \frac{-\mathrm{i}g_{\mu'\mu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \frac{-\mathrm{i}g_{\nu'\nu}}{k'^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\ \Pi^{\mu\nu}(k) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ f_{\mu'\nu'}(k). \tag{6.1.3}$$



图 6.1.3

因此, $\Pi_{\mu\nu}(k)$ 是一个“部件”, 只要费恩曼图中遇到光子线中间插一个费米子圈, 就会出现这个部件, $f_{\mu'\nu'}(k) \sim \mathrm{i}D_{F_{\mu'\nu'}}(k)$(两者类似). 这个部件叫真空极化. 因为它可以看成是真空在光子场作用下形成一个电子对 (这就是极化), 然后在另一时空点复合的过程.

6.1.2 电子自能

考虑图 6.1.4,

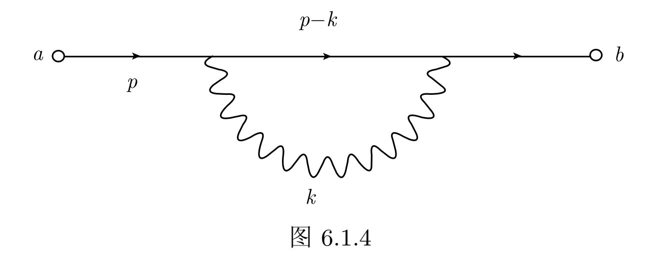


图 6.1.4

图中在 a 点和 b 点的空圈表示未配对的顶角线端点.

它对应的费恩曼积分是

$$-\mathrm{i}\Sigma(\not{p}) = (-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma^\mu\ \frac{\mathrm{i}}{\not{p}-\not{k}-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma^\nu. \tag{6.1.4}$$

这也是一个“部件”, 叫电子自能. 因为它可以看成电子与自己的电磁场相互作用的过程, 在经典电动力学中, 电荷周围的电磁场也有能量. 在这式子里, 我们令光子的质量为 λ, 为以后推导之用.

如果在 a、b 端接外线, 则得到费恩曼图 6.1.5.

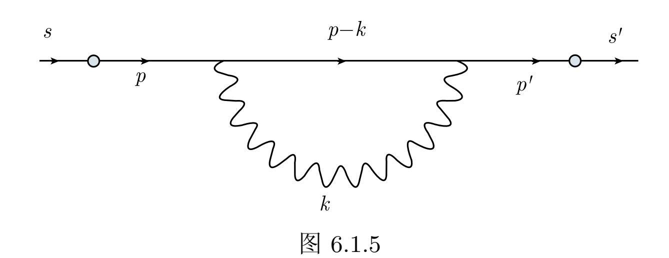


图 6.1.5

它的费恩曼积分是

$$J_\Gamma = (2\pi)^4\delta^4(p-p')\bar{u}(\vec{p}\,',s')\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}(-\mathrm{i})\Sigma(\not p)u(\vec{p},s)\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}. \tag{6.1.5}$$

如果在 a、b 端接电子内线, 则图 6.1.6 对应费恩曼积分为

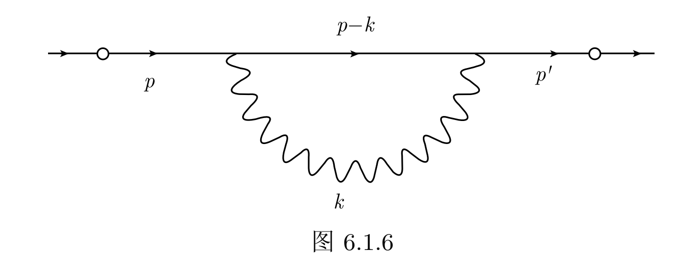


图 6.1.6

$$\begin{aligned} J_\Gamma &= \int \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}^4p'/(2\pi)^4}{\not p\,'-m+\mathrm{i}\epsilon}\ [-\mathrm{i}\Sigma(\not p)]\ \frac{\mathrm{i}\mathrm{d}^4p/(2\pi)^4}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\ (2\pi)^4\delta^4(p-p') \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\ [-\mathrm{i}\Sigma(\not p)]\ \frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\ G(\not p). \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

其中, $G(\not p)\sim \mathrm{i}S_F(\not p)$(两者类似).

6.1.3　顶角修正

考虑费恩曼图 6.1.7, 其中 a、b、c 点的小圆圈表示未配对的顶角线的端点 (三个顶角用三个实心圆黑点表示).

它对应的费恩曼积分是

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu &= (-\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma_\nu\ \frac{\mathrm{i}}{\not p\,'-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma^\mu\ \frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma^\nu \\ &= -\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{\gamma_\nu(\not p\,'-\not k+m)\gamma^\mu(\not p-\not k+m)\gamma^\nu}{(k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon)((p'-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)((p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)}. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

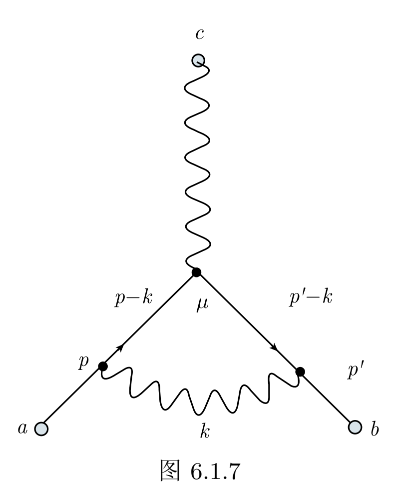


图 6.1.7

这是第三个“部件”, 叫顶角修正, 因为它的作用类似于顶角中的 γ^{μ}. 比如, 将 a、b、c 都接内线, 给出图 6.1.8.

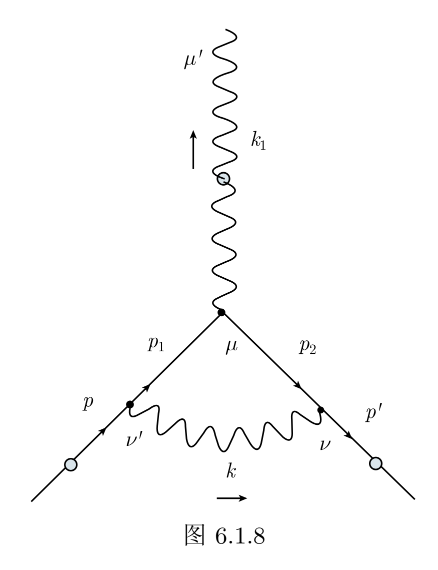


图 6.1.8

对应的费恩曼积分为

$$
\begin{aligned}
J_{\Gamma}=(-\mathrm{i}e)^3\int &\frac{\mathrm{d}^4p'}{(2\pi)^4}\ \frac{\mathrm{i}}{\not p\,'-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma^{\nu}\ \frac{\mathrm{i}}{\not p_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \frac{\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^4}\ \gamma^{\mu}\ \frac{\mathrm{i}}{\not p_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \ \frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\gamma^{\nu'}\\
&\times\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\ \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\mu'}}{k_1^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\ \frac{-\mathrm{i}g_{\nu\nu'}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\\
&\times(2\pi)^4\ \delta^4(p-k-p_1)\ (2\pi)^4\ \delta^4(k+p_2-p')\ (2\pi)^4\delta^4(p_1-k_1-p_2).
\end{aligned}
\tag{6.1.8}
$$

将 p_1 和 p_2 积掉, 得到　$p_1 = p - k$, $p_2 = p' - k$, 去掉两个 δ^4, 给出

$$
\begin{aligned}
J_\Gamma = & (-\mathrm{i}e)^3 \int \frac{\mathrm{d}^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{\not p\,' - m + \mathrm{i}\epsilon} \Big[\gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not p\,' - \not k - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\mu \frac{\mathrm{i}}{\not p - \not k - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^{\nu'} \\
& \times \frac{-\mathrm{i} g_{\nu\nu'} \dfrac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}}{k^2 - \lambda^2 + \mathrm{i}\epsilon} \Big] \times \frac{\mathrm{i} \dfrac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}}{\not p - m + \mathrm{i}\epsilon} \times \frac{-\mathrm{i} g_{\mu\mu'} \dfrac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4}}{k_1^2 - \lambda^2 + \mathrm{i}\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - p') \\
= & (-\mathrm{i}e) \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \mathrm{i}\, S_F(\not p\,')\, \Lambda^\mu(p, p')\, \mathrm{i}\, S_F(\not p)\, \mathrm{i}\, D_{F_{\mu\mu'}}(k_1) \\
& \times (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - p').
\end{aligned} \tag{6.1.9}
$$

对比图 6.1.9(三条顶角线均接内线) 的费恩曼积分

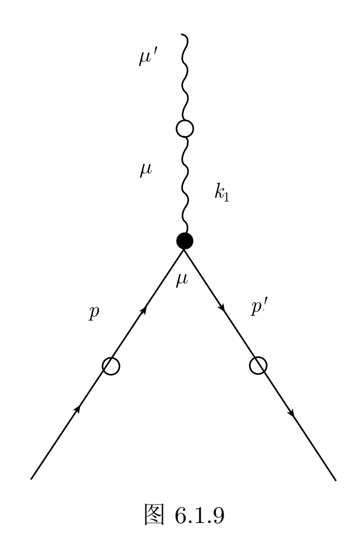


图 6.1.9

$$
J_\Gamma = (-\mathrm{i}e) \int \frac{\mathrm{d}^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \mathrm{i}\, S_F(\not p\,')\, \gamma^\mu\, \mathrm{i}\, S_F(\not p)\, \mathrm{i}\, D_{F_{\mu\mu'}}(k_1)\, (2\pi)^4\, \delta^4(p - k_1 - p') \tag{6.1.10}
$$

发现 $\Lambda^\mu(p, p') \sim \gamma^\mu$. (两者类似) 如果将 Λ^μ 的三条顶角线接外线, 情况也一样.

以上三个部件是在高阶费恩曼图中经常遇到的. 然而, 图 6.1.1、图 6.1.4 和图 6.1.7 的积分都是发散的! 考虑对积分变量的幂次：

$\Pi^{\mu\nu}(k)$: 分母是 q 的 2 次, 积分是 4 次 $\longrightarrow$ 2 次发散;

$-\mathrm{i}\Sigma(\not p)$: 分母是 k 的 3 次, 积分是 4 次 $\longrightarrow$ 1 次发散;

$\Lambda^\mu(pp')$: 分母是 k 的 4 次, 积分是 4 次 $\longrightarrow$ 0 次发散 (对数发散).

6.2 表观发散度的计算 (QED)

对一张费恩曼图, 可以计算它的表观发散度 D. 它的定义是费恩曼被积函数 I 的动量幂次加积分变元的幂次：

$$D = \deg_l I + 4 \times \dim k \tag{6.2.1}$$

$4 \times \dim k$ 是积分变元的幂次, $\dim k$ 是独立积分的 4–矢量 k 的数目.

考虑以下因素：

(1) 每个顶角提供 $(2\pi)^4\delta^4(\sum p)$, $D_v = -4$(应除去总的能动量守恒的 δ^4 函数), d 是微分符号;

(2) 每条费米子内线提供 $\dfrac{\mathrm{d}^4p/(2\pi)^4}{\not p - m - \mathrm{i}\epsilon}$, $D_{F_i} = 3$;

(3) 每条光子内线提供 $\dfrac{\mathrm{d}^4k/(2\pi)^4}{k^2 + \mathrm{i}\epsilon}$, $D_{B_i} = 2$;

(4) 每个顶角有两条费米子线和一条光子线与之相连;

(5) 每条内线连接两个顶角, 每条外线连接一个顶角, 所以可以将内线看成两段半条线. 令顶角数为 n, 我们有以下数据,

$$\begin{aligned} F_\mathrm{i} &= \text{内费米子线数}, \quad B_\mathrm{i} = \text{内光子线数}, \\ F_\mathrm{e} &= \text{外费米子线数}, \quad B_\mathrm{e} = \text{外光子线数}, \\ 2F_\mathrm{i} &+ F_\mathrm{e} = 2n, \quad 2B_\mathrm{i} + B_\mathrm{e} = n. \end{aligned}$$

从而表观发散度为

$$\begin{aligned} D &= (-4)(n-1) + 3F_\mathrm{i} + 2B_\mathrm{i} \\ &= (-4)(n-1) + 3\left(F_\mathrm{i} + \frac{1}{2}F_\mathrm{e}\right) + 2\left(B_\mathrm{i} + \frac{1}{2}B_\mathrm{e}\right) - \frac{3}{2}F_\mathrm{e} - \frac{2}{2}B_\mathrm{e} \\ &= (-4)n + 4 + 3n + n - \frac{3}{2}F_\mathrm{e} - B_\mathrm{e} \\ &= 4 - \frac{3}{2}F_\mathrm{e} - B_\mathrm{e}. \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

其中, $(-4)(n-1)$ 是因为对于一张连接图, 一定有 $(n-1)$ 个 δ^4 函数在积分中可以消去, 它们使维数降低 $4 \times (n-1)$.

我们发现, 对量子电动力学, 一张连接图的表观发散度是与顶角数无关的, 只与外线的数目有关.

在 QED 中表观发散度 $D \geqslant 0$ 的图如表 6.2.1.

表 6.2.1

B_{e}	F_{e}	D	
0	0	4	真空图 (泡泡图)
1	0	3	由 Furry 定理不用算
2	0	2	真空极化图
3	0	1	由 Furry 定理不用算
4	0	0	可能收敛或降阶
0	2	1	电子自能图
1	2	0	顶角修正图

请注意, D 称为 “表观” 发散度, 它不一定表示积分的实际收敛情况. 特别是 $D<0$, 不一定积分收敛.

我们还可以这样考虑：每个顶角具有一个 δ^4 函数和几条线, 每条线有它自己固定的幂次, 对于内线, 一个顶角只分享半条, 外线的幂次因为不积分, 所以为 0. 因此, 对一个顶角而言, 它的贡献为

$$D_v=(-4)+\frac{1}{2}\sum_j D_{l_j}-\frac{1}{2}\sum_s D_{l_{外s}} \tag{6.2.3}$$

$$=d_v-\frac{1}{2}\sum_s D_{l_{外s}}. \tag{6.2.4}$$

其中, d_v 是某种顶角固有的; D_{l_j} 是与该顶角相连的线的幂次. 分析来源, $\frac{1}{2}D_{l_j}$ 这个是其实取决于在顶角中形成该线的场量的种类和场量对时空的偏微商次数：每个费米场为 $\frac{3}{2}+$ 微商次数, 玻色场为 $\frac{2}{2}+$ 微商次数.

将所有顶角加起来, 去掉一个总的 $\delta^d(\sum p)$ 的贡献, 得到

$$\begin{aligned}D=&\sum(D_v)+4\\=&\sum_k\{n_k d_{v_k}-\frac{1}{2}\sum_{s_k}D_{l_{外s_k}}\}+4=\sum_k n_k d_{v_k}-\frac{1}{2}\sum_s D_{l_{外s}}+4.\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

等式右边 +4 是因为对一张连接图, 一定有一个总的 δ^4 函数在积分中不能被积掉. 只要所有 $d_{v_k}\leqslant 0$, 则 $D\geqslant 0$ 的图的外线组合品种是有限的.

对 QED 而言, 只有一种顶角, 它的固有幂次是

$$d_v=-4+\underbrace{\frac{3}{2}\times 2}_{费米线}+\underbrace{\frac{2}{2}\times 1}_{光子线}=0. \tag{6.2.6}$$

由

$$\frac{1}{2}D_{费米线}=\frac{3}{2},\quad \frac{1}{2}D_{光子线}=\frac{2}{2}=1, \tag{6.2.7}$$

得到 QED 的连接图的表现发散度

$$D = 4 - \frac{3}{2}F_{\mathrm{e}} - B_{\mathrm{e}}. \tag{6.2.8}$$

当一种场论具有比 0 大的 d_v 的顶角时, 随着顶角数加多, D 就无限制地加大, 而不管外线是几. 将来可以看到, 这种场论是不可重整化的.

从以上推导可以知道, 当顶角中有一个玻色场量时, 固有幂次增加 $\frac{1}{2}$(玻色线动量分量数目 − 玻色传播子动量幂次)= $\frac{1}{2}(4-2)$, 而有一个费米场量时, 固有幂次增加 $\frac{1}{2}$(费米线动量分量数目 − 费米传播子动量幂次)= $\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$, 以上是在组成顶角的场量没有对时空的偏微商的时候, 回顾传播子的公式 (4.2.39), 令

$$\underbrace{\varphi(x)\varphi}(y) = \mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\mathrm{i}\Delta_F(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)},$$

其中, $\mathrm{i}\Delta_F(k) = \dfrac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$, 在场量 $\varphi(x)$ 对 x 求偏微商时, 有 (4.2.40) 式,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\underbrace{\varphi(x)\varphi}(y) &= T(\partial_\mu\varphi(x), \varphi(y)) - N(\partial_\mu\varphi(x), \varphi(y)) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\mathrm{i}\Delta_F(k)(-\mathrm{i}k_\mu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-y)}.\end{aligned}$$

这相当于在 $\mathrm{i}\Delta_F(k)$ 上再乘以 $(-\mathrm{i}k_\mu)$ 因子. 类似地, 场量 $\varphi(y)$ 对 y 的偏微商导致 $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y^\mu}\Delta_F(x-y)$, 相当于在 $\mathrm{i}\Delta_F(k)$ 上再乘以 $(+\mathrm{i}k_\mu)$ 因子, 对其余场 (费米场) 情况类似. 因而当组成顶角的场量中出现偏微商时, 顶角因子应增加偏微商数目

$$d_v = (-4) + \frac{1}{2}\times \text{玻色场数} + \frac{3}{2}\times \text{费米场数} + \text{偏微商数目}. \tag{6.2.9}$$

6.3 Furry 定理

我们在这小节介绍 Furry 定理.

Furry 定理 费恩曼图包含奇数光子线连着的电子圈 (即电子圈上有奇数个顶角) 时, 对 S 矩阵无贡献. 因为此图的费恩曼积分与把这个电子圈反向而得到的图的费恩曼积分相抵消.

证明 不失一般性, 考虑图 6.3.1 的费恩曼积分,

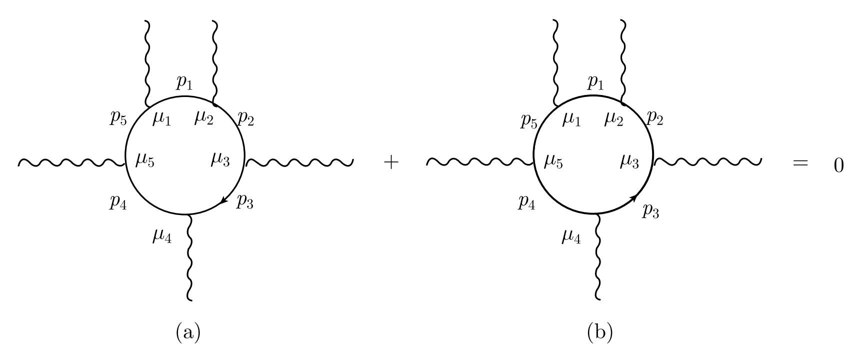


图 6.3.1

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{a}) = & \int (-1)\mathrm{tr}\left[\frac{\mathrm{i}}{\not p_5 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_5}\frac{\mathrm{i}}{\not p_4 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_4}\frac{\mathrm{i}}{\not p_3 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_3}\frac{\mathrm{i}}{\not p_2 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_2}\right.\\
& \left.\times\frac{\mathrm{i}}{\not p_1 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_1}\right]\mathrm{d}^4 p_1 \cdots \mathrm{d}^4 p_5\\
= & \int (-1)\mathrm{tr}\left[(\not p_5 + m)\gamma^{\mu_5}(\not p_4 + m)\gamma^{\mu_4}(\not p_3 + m)\gamma^{\mu_3}(\not p_2 + m)\gamma^{\mu_2}(\not p_1 + m)\gamma^{\mu_1}\right]\\
& \times\prod_j\left(\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}^4 p_j}{p_j^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right);
\end{aligned} \tag{6.3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{b}) = & \int (-1)\mathrm{tr}\left[\gamma^{\mu_1}(\not p_1 + m)\gamma^{\mu_2}(\not p_2 + m)\gamma^{\mu_3}(\not p_3 + m)\gamma^{\mu_4}(\not p_4 + m)\gamma^{\mu_5}(\not p_5 + m)\right]\\
& \times\prod_j\left(\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}^4 p_j}{p_j^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}\right).
\end{aligned} \tag{6.3.2}
$$

由

$$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, A^t, \quad \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$$

以及

$$(\gamma^0)^t = \gamma^0, \quad (\gamma^1)^t = -\gamma^1, \quad (\gamma^2)^t = \gamma^2, \quad (\gamma^3)^t = -\gamma^3,$$

所以有

$$(\gamma^0\gamma^2)(\gamma^\mu)^t = -\gamma^\mu(\gamma^0\gamma^2).$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{b}) = & \int (-1)\mathrm{tr}\left[(\not{p}_5+m)^t(\gamma^{\mu_5})^t \cdots (\not{p}_1+m)^t(\gamma^{\mu_1})^t\right] \times \prod_j \left(\frac{\mathrm{i}}{p_j^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)\mathrm{d}^4p_j \\
= & \int (-1)\mathrm{tr}\left[\gamma^2\gamma^0(-1)\gamma^0\gamma^2(\not{p}_5+m)^t(\gamma^{\mu_5})^t \cdots (\not{p}_1+m)^t(\gamma^{\mu_1})^t\right] \\
& \times \prod_j \left(\frac{\mathrm{i}}{p_j^2-m^2+i\epsilon}\right)\mathrm{d}^4p_j \\
= & \int (-1)\mathrm{tr}\left[(-\not{p}_5+m)(-\gamma^{\mu_5})(-\not{p}_4+m)(-\gamma^{\mu_4})\cdots(-\not{p}_1+m)\right. \\
& \left.\times(-\gamma^{\mu_1})\gamma^0\gamma^2(-1)\gamma^2\gamma^0\right] \times \prod_j \left(\frac{\mathrm{i}}{p_j^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)\mathrm{d}^4p_j \\
= & \int (-1)\mathrm{tr}\left[(-\not{p}_5+m)(-\gamma^{\mu_5})\cdots(-\not{p}_1+m)(-\gamma^{\mu_1})\right] \times \prod_j \left(\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}^4p_j}{p_j^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right).
\end{aligned}
\tag{6.3.3}
$$

变量替换为 $p_j \to -p_j$ 时, d^4p_j 不变, p_j^2 不变, 我们得到

$$
(\mathrm{b}) = \int (-1)\mathrm{tr}\left[(\not{p}_5+m)(-\gamma^{\mu_5})\cdots(\not{p}_1+m)(-\gamma^{\mu_1})\right] \times \prod_j \left(\frac{\mathrm{i}}{p_j^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)\mathrm{d}^4p_j,
\tag{6.3.4}
$$

所以,

$$
(b) = -(a) \quad \Longrightarrow \quad (a)+(b)=0. \tag{6.3.5}
$$

现在考虑更复杂的图, 比如图 6.3.2.

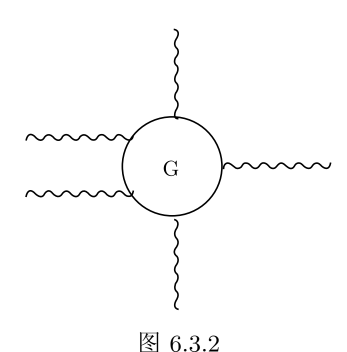


图 6.3.2

由于费米子在 G 中一定以圈的形式出现, 而光子线则是附在费米子圈上, 每个顶角只附一根光子线, 设 G 中有 m 个圈 $l_1,\cdots,l_m$, 每个费米子圈 l_j 上有 n_j 个顶角也即 n_j 根光子线, 令内光子线数为 B_i, 外光子线数为 B_e, 则有

$$
\sum_{j=1}^{m} n_j = 2B_\mathrm{i} + B_\mathrm{e}. \tag{6.3.6}
$$

既然 B_e 为奇数, 则在 n_j 中一定也有奇数, 所以总的贡献由上面的证明也是为 0.

■

6.4 关于费米子圈的规范不变性

考虑一个四根光子外线的费米子圈, 顶点 μ_1、μ_2、μ_3、μ_4 处由光子线注入的外动量分别为 k_1、k_2、k_3、k_4, 如图 6.4.1 所示.

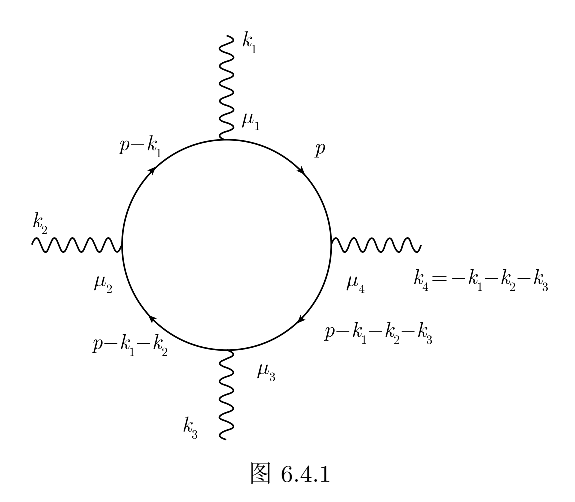


图 6.4.1

它相应的费恩曼积分是

$$
\begin{aligned}
&J_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1,k_2,k_3,k_4)\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{i}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_1}\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_2}\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-\not k_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_3}\\
&\times\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-\not k_2-\not k_3-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_4}\}\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4).
\end{aligned}
\tag{6.4.1}
$$

考虑

$$
\begin{aligned}
&k_{1\mu_1}J_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}[(\not p-m+\mathrm{i}\epsilon)-(\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon)]\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\\
&\times\gamma^{\mu_2}\times\cdots\}\times\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)\\
=&\,\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_2}\times\cdots\}\times\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)
\end{aligned}
$$

$$-\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_2}\times\cdots\}\times\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4),\quad(6.4.2)$$

即

$$k_{1\mu_1}J_1^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}=\mathrm{i}A_1-\mathrm{i}B_1.\quad(6.4.3)$$

不难看出 A(和 B) 正比于图 6.4.1 中将费米线 $\mu_1\mu_4$ 段 ($\mu_2\mu_1$ 段) 缩成一点, 将输入动量 k_1 合并到 $k_4(k_2)$, 顶角用 $\mu_4(\mu_2)$ 一起得到的费恩曼图的费恩曼积分如图 6.4.2 和图 6.4.3 所示.

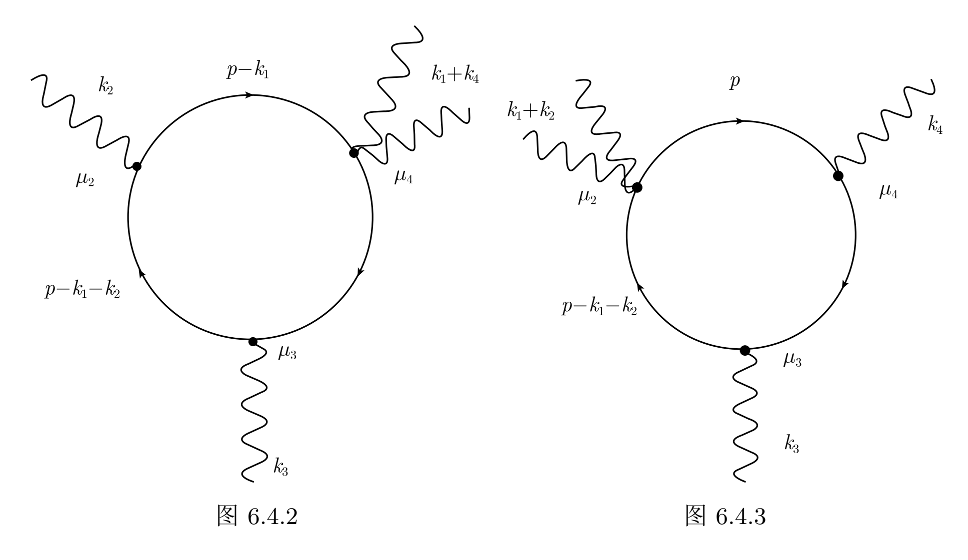


图 6.4.2　　　　图 6.4.3

图 6.4.2 的费恩曼积分为

$$J_{2a}^{\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1k_2k_3k_4)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\{\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_2}\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-\not k_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_3}$$
$$\times\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-\not k_2-\not k_3-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_4}\}=A_1.\quad(6.4.4)$$

图 6.4.3 的费恩曼积分为

$$J_{2b}^{\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1k_2k_3k_4)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_2}\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-\not k_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\right.$$
$$\left.\times\gamma^{\mu_3}\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-\not k_2-\not k_3-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\mu_4}\right\}\delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)=B_1.\quad(6.4.5)$$

我们现在考虑如何确定与 (6.4.3) 式相应的这两个三顶角的费米子圈的正负号. 对于图 6.4.2, 与求和的顶点 μ_1 合并的合并顶点是 μ_4, 顶点 μ_1 和 k_1 是沿着费米子

圈的正方向走, 走到 μ_4 的, 取正号. 而对图 6.4.3, 与求和的顶点 μ_1 合并的合并顶点为 μ_2, μ_1 和 k_1 是逆着缩掉的费米子线合并过来的, 取负号.

我们考虑所有以 $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$ 为顶点的费米子圈, 这样的费恩曼图一共有 6 个 (图 6.4.1 只是其中的一个),

$$J_j^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1k_2k_3k_4), \quad j=1,\cdots,6. \tag{6.4.6}$$

同理, 我们得到

$$k_{1\mu_1}J_j^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1k_2k_3k_4)=\mathrm{i}A_j-\mathrm{i}B_j. \tag{6.4.7}$$

这些 A_j 和 B_j 是由顶点为 $\mu_2\mu_3\mu_4$, 输入 $k_2k_3k_4$, 再在某个顶点合并上 k_1 之后得到的费恩曼图的费恩曼积分. 也就是说对于三顶角图, 各顶角输入动量一共有三种组合: $\{k_1+k_2,k_3,k_4\},\{k_2,k_1+k_3,k_4\},\{k_2,k_3,k_1+k_4\}$, 其相应顶角指标都是 μ_2,μ_3,μ_4, 即 γ 矩阵为 $\gamma^{\mu_2},\gamma^{\mu_3},\gamma^{\mu_4}$. 而对于每一个这样的三顶点费米子圈, 合并顶点都有可能从“正向”和“逆向”合并各一次, 这两项的费恩曼积分正负号相反, 而绝对值相同. 因此, 它们在对 j 求和中正好抵消, 得到

$$k_{1\mu_1}\sum_j J_j^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1k_2k_3k_4)=0. \tag{6.4.8}$$

以上结果对于任何顶点数的费米子圈都成立①.

这个结果是 QED 的规范不变性的一个推论. 我们可以作如下考虑: [Weinberg,《The Quantum Theory of Fields》一书上有更深入的分析]

对于

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle \Psi_\beta^- T\{\mathscr{H}_I(x_1)\mathscr{H}_I(x_2)\cdots\}\Psi_\alpha^\dagger\rangle\\ \sim&\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle \Psi_\beta^- T\{\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu(x_1)\bar\psi\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\cdots\}\Psi_\alpha^\dagger\rangle=M,\end{aligned} \tag{6.4.9}$$

当 $A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\partial_\mu\lambda$ 时有 ($\lambda\ll 1,\lambda$ 为 c 数, 不是算符)

$$\begin{aligned}M\to\ M&+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle \Psi_\beta^- T\{\bar\psi\gamma^\mu\psi\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\lambda(x_1)\bar\psi\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\cdots\}\Psi_\alpha^\dagger\rangle\\ &+\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle \Psi_\beta^- T\{\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu(x_1)\bar\psi\gamma^\nu\psi\frac{\partial}{\partial x_2^\nu}\lambda(x_2)\cdots\}\Psi_\alpha^\dagger\rangle+\cdots,\end{aligned} \tag{6.4.10}$$

其中, $\langle\Psi_\beta|$ 和 $|\Psi_\alpha^\dagger\rangle$ 表示初态与末态.

①这里的推导只是形式上的, 因为相关的积分可能发散. 但是, 当取适当的正常化时, 这些推导也成立.

不失一般性, 我们只算 $\dfrac{\partial}{\partial x_1^\mu}\lambda$ 的项, 而且只考虑到 $A_\nu(x_2)$, 得到

$$
\begin{aligned}
&T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\lambda(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\}\\
=&\theta(x_1^0-x_2^0)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\lambda(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)+\theta(x_2^0-x_1^0)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\lambda(x_1).
\end{aligned}
\tag{6.4.11}
$$

在积分号下, 此式变为

$$
\begin{aligned}
&T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\lambda(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\}\\
=&-\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}T\{\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\overline{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\}\right)\lambda(x_1)\\
=&-\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}(\theta(x_1^0-x_2^0)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1))\right)\lambda(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\\
&-\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}(\theta(x_2^0-x_1^0)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1))\lambda(x_1)\\
=&-\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\theta(x_1^0-x_2^0)\right)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\lambda(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\\
&-\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\theta(x_2^0-x_1^0)\right)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\lambda(x_1)\\
&-\theta(x_1^0-x_2^0)\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1))\right)\lambda(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\\
&-\theta(x_2^0-x_1^0)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\left(\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1))\right)\lambda(x_1).
\end{aligned}
\tag{6.4.12}
$$

由于 $\dfrac{\partial}{\partial x}\theta(x-y)=\delta(x-y)$, $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)=\bar{\psi}\overleftarrow{\not\partial}\psi+\bar{\psi}\overrightarrow{\not\partial}\psi=0$, 因此 (6.4.12) 式后两项为 0, (6.4.12) 式的前两项变为

$$
\begin{aligned}
&-\delta_{\mu0}\delta(x_1^0-x_2^0)[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\lambda(x_1),\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)]\\
=&-\delta(x_1^0-x_2^0)[\bar{\psi}\gamma^0\psi(x_1),\bar{\psi}\gamma^\nu\psi(x_2)]\lambda(x_1)A_\nu(x_2).
\end{aligned}
\tag{6.4.13}
$$

由

$$
[\psi_\alpha(\overrightarrow{x},t),\psi_\beta^\dagger(\overrightarrow{y},t)]_+=\delta^3(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})\delta_{\alpha\beta},\quad [\psi_\alpha(\overrightarrow{x},t),\psi_\beta(\overrightarrow{y},t)]_+=0,\tag{6.4.14}
$$

$$
[\psi_\alpha^\dagger(\vec{x},t),\psi_\beta^\dagger(\vec{y},t)]_+=0\text{以及 }[AB,C]=A[B,C]_+-[A,C]_+B
$$

得

$$[\bar{\psi}\gamma^0\psi(\vec{x}_1,t),\bar{\psi}(\vec{x}_2,t)]=\psi^\dagger[\psi(\vec{x}_1,t),\psi^\dagger(\vec{x}_2,t)]_+\gamma^0=\bar{\psi}(\vec{x}_1,t)\delta^3(\vec{x}_1-\vec{x}_2), \tag{6.4.15}$$

$$\begin{aligned}[\bar{\psi}\gamma^0\psi(\vec{x}_1,t),\psi(\vec{x}_2,t)]&=-[\psi(\vec{x}_2,t),\psi^\dagger\psi(\vec{x}_1,t)]\\&=-[\psi(\vec{x}_2,t),\psi^\dagger(\vec{x}_1,t)]_+\psi(\vec{x}_1,t)=-\delta^3(\vec{x}_1-\vec{x}_2)\psi(\vec{x}_1,t).\end{aligned} \tag{6.4.16}$$

所以有

$$[\bar{\psi}\gamma^0\psi(\vec{x}_1,t),\bar{\psi}\gamma^\nu\psi(\vec{x}_2,t)]=0. \tag{6.4.17}$$

从而 (6.4.12) 式为 0, 因此 M 在规范变换下不变. 又由于 $\lambda(x)$ 是局域的、任意的, 所以从 (6.4.12) 式为 0, 我们可以断定 $\dfrac{\partial}{\partial x_1^\mu}T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu(x_2)\}=0$.

因而有

$$\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle\varPsi_\beta^-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1}\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\cdots\}\varPsi_\alpha^\dagger\rangle=0.$$

在部分积分之后得到

$$\begin{aligned}0&=\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle\Psi_\beta^-(-\frac{\partial}{\partial x_1^\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1}T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\cdots\}\Psi_\alpha^\dagger\rangle\\&=\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{i}k_{1\mu}\langle\varPsi_\beta^-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1}T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\cdots\}\varPsi_\alpha^\dagger\rangle.\end{aligned} \tag{6.4.18}$$

而另一方面, 我们可以证明

$$\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\langle\varPsi_\beta^-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1}T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\cdots\}\varPsi_\alpha^\dagger\rangle\sim\sum_j J_j^{\mu\cdots}(k_1\cdots). \tag{6.4.19}$$

证明　比如

$$\begin{aligned}&\langle 0|\underbrace{a^\mu(k_1)\cdots\int \mathrm{d}^4x_1\cdots T\{\bar{\psi}\gamma^\rho\psi(x_1)A_\rho(x_1)}\cdots\}\varPsi_\alpha^\dagger\rangle\\&=\frac{-1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1}T\{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x_1)\cdots\}\varPsi_\alpha^\dagger\rangle\\&=\frac{-1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}}}\sum_j J_j^{\mu\cdots}(k_1\cdots),\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

所以有

$$k_{1\mu}\sum_j J_j^{\mu\cdots}(k_1\cdots)=0. \tag{6.4.21}$$

将此式对 $k_{1\rho}$ 取偏微商得

$$\sum_j J_j^{\rho\cdots}+k_{1\mu}\frac{\partial}{\partial k_{1\rho}}\sum_j J_j^{\mu}=0. \tag{6.4.22}$$

当

$$\frac{\partial}{\partial k_{1\rho}}J_j^{\mu\cdots}(k_1\cdots)|_{k=0} \tag{6.4.23}$$

非奇异时, 有

$$\sum_j J_j^{\mu\cdots}(k_1\cdots)|_{k=0}=0. \tag{6.4.24}$$

6.5 费恩曼积分的洛伦兹变换性质

一张费恩曼图对应一个费恩曼积分, 我们研究它在洛伦兹变换下的变换性质. 我们有

$$x'^{\mu}=a^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu},\quad \partial'_{\mu}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}=\partial_{\lambda}(a^{-1})^{\lambda}{}_{\mu},$$

$$S(a)\gamma^{\lambda}S^{-1}(a)=a^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu}\Rightarrow S^{-1}\gamma^{\lambda}S=(a^{-1})^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu},$$

$$S^{-1}p_{\lambda}\gamma^{\lambda}S=(a^{-1})^{\lambda}{}_{\mu}\gamma^{\mu}p_{\lambda}=p'{}_{\mu}\gamma^{\mu}\Rightarrow S^{-1}\not{p}S=\not{p}',p'_{\mu}=p_{\lambda}(a^{-1})^{\lambda}\mu.$$

令

$$\gamma^{\mu}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^{\nu}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\cdots\gamma^{\lambda}=F^{\mu\nu\cdots\lambda}(\not{p}_1\not{p}_2\cdots), \tag{6.5.1}$$

$$\begin{aligned}S^{-1}FS&=S^{-1}\gamma^{\mu}SS^{-1}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1-m+\mathrm{i}\epsilon}SS^{-1}\gamma^{\nu}S\cdots S^{-1}\gamma^{\lambda}S\\&=(a^{-1})^{\mu}{}_{\rho}\gamma^{\rho}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_1{}'-m+\mathrm{i}\epsilon}(a^{-1})^{\nu}{}_{\tau}\gamma^{\tau}\frac{\mathrm{i}}{\not{p}_2{}'-m+\mathrm{i}\epsilon}\cdots(a^{-1})^{\lambda}{}_{\sigma}\gamma^{\sigma}\\&=(a^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(a^{-1})^{\nu}{}_{\tau}\cdots(a^{-1})^{\lambda}{}_{\sigma}F^{\rho\tau\cdots\sigma}(\not{p}_1{}'\not{p}_2{}'\cdots).\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

(考虑对应反射的洛伦兹变换 $S=\gamma_0$, 由于 $\gamma_0^{-1}\gamma^j\gamma_0=-\gamma^j,\quad \gamma_0^{-1}\gamma^0\gamma_0=\gamma^0,\quad j=1,2,3$. 因此,

$$\gamma_0^{-1}\not{p}\gamma_0=\gamma_0\not{p}\gamma_0=\not{p}'\text{也符合 }S^{-1}\not{p}S=\not{p}'\text{ 的要求},$$

其中, $p'_0=p_0,p'_j=-p_j$).

对比 $x^{\mu}x^{\nu}\cdots x^{\lambda}$, 在洛伦兹变换下变为: $(a^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(a^{-1})^{\nu}{}_{\tau}\cdots(a^{-1})^{\lambda}{}_{\sigma}x'^{\rho}x'^{\tau}\cdots x'^{\sigma}$, 我们发现 $F^{\mu\nu\cdots\lambda}(\not{p}_1\cdots)$ 是一个旋量张量.

对费米圈考虑

$$\begin{aligned}
&F^{\mu\nu\cdots\lambda}(k_1\cdots,p)\\
&=\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\cdots\gamma^\lambda\right)\\
&=\mathrm{tr}\left(S^{-1}\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}SS^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k_1-m+\mathrm{i}\epsilon}S\cdots S^{-1}\gamma^\lambda S\right)\\
&=\mathrm{tr}(\frac{\mathrm{i}}{\not p'-m+\mathrm{i}\epsilon}(a^{-1})^\mu{}_\rho\gamma^\rho\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not k_1{}'-m+\mathrm{i}\epsilon}\cdots(a^{-1})^\lambda{}_\sigma\gamma^\sigma)\\
&=(a^{-1})^\mu{}_\rho\cdots(a^{-1})^\lambda{}_\sigma\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}}{\not p'-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\rho\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not k_1{}'-m+\mathrm{i}\epsilon}\cdots\gamma^\sigma\right)\\
&=(a^{-1})^\mu{}_\rho\cdots(a^{-1})^\lambda{}_\sigma F^{\rho\cdots\sigma}(k_1',\cdots p'),
\end{aligned}\tag{6.5.3}$$

所以它是张量.

由以上推导, 我们知道所有 $D\geqslant 0$ 的 QED 中的发散图都是洛伦兹张量或旋量张量. 特别是, 真空极化图的费恩曼积分是张量, 又满足 $k_\mu\Pi^{\mu\nu}(k)=0$, (类似 (6.4.8) 式) 因此只能是

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=(k^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}k^2)f(k^2)\tag{6.5.4}$$

的形式.

电子自能图有 $S^{-1}\Sigma(p)S=\Sigma(p')$, 满足这个关系的 4×4 矩阵只能是 $\not p$ 的函数. 顶角修正满足 $S^{-1}\Lambda^\mu(p_1,p_2)S=(a^{-1})^\mu{}_\nu\Lambda^\lambda(p_1',p_2')$, 当取 $p_1=p_2=0$ 时, 有 $S^{-1}\Lambda^\mu(00)S=(a^{-1})^\mu{}_\lambda\Lambda^\lambda(00)$. 满足此关系的 4×4 矩阵 $\Lambda^\mu(00)$ 正比于 γ^μ.

附录 6.5A　$\sum(p)$ 的形式

我们考虑电子自能 $\sum(p)$ 在洛伦兹变换下的性质. $\sum(p)$ 是由 (6.5.1) 式中的洛伦兹旋量张量 $F^{\mu\nu\cdots\lambda}(\not p+\not k_1,\not p+\not k_2,\cdots)$ 由指标进行收缩, 并且对 4–矢量 k_i 进行四维积分 $\dfrac{\mathrm{d}^4k_i}{(2\pi)^4}$ 之后得到的,

$$\sum(p)=\int F^{\mu\nu\cdots\rho\lambda(p,k_i)}g_{\mu\nu}\cdots g_{\rho\lambda}\quad f(\{k_i\})\prod_i\frac{\mathrm{d}^4k_i}{(2\pi)^4}.$$

在洛伦兹变换下, 由 (6.5.2) 式可以得到

$$S^{-1}\sum(p)S=\int F^{\mu\nu\cdots\rho\lambda(p',k_i')}g_{\mu\nu}\cdots g_{\rho\lambda}f(\{k_i\})\frac{\mathrm{d}^4k_i}{(2\pi)^4},$$

其中, $k_{i\mu}'=k_{i\lambda}(a^{-1})^\lambda_\mu$. 在电子自转的构成中, 电子线以外的部分有

$$f(\{k_i'\})=f(\{k_i\}),\quad\left(\text{比如 }\frac{1}{(k_1+k_2)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}=\frac{1}{(k_1'+k_2')^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon},\text{等等}\right)$$

$$\mathrm{d}^4k_i' = \mathrm{d}^4k_i.$$

我们得到

$$S^{-1}\sum(p)S = \int F^{\mu\nu\cdots\lambda}_{(p',k_i')} g_{\mu\nu}\cdots g_{\rho\lambda} f(\{k_i'\}) \frac{\mathrm{d}^4k_i'}{(2\pi)^4} = \sum(p').$$

其中, 4–矢量 $p'_\mu = p_\lambda(a^{-1})^\lambda_\mu$.

我们可以将 $\sum(p)$ 写成

$$\sum(p) = If^0(p) + \gamma^\mu f^1_\mu(p) + \sum_{\mu>\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu f^2_{\mu\nu}(p) + \sum_{\mu<\nu<\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho f^3_{\mu\nu\rho}(p)$$

$$+\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 f^4_{1234}(p), \quad \mu,\nu,\rho = 1,2,3,4; \quad \gamma^4 = \mathrm{i}\gamma^0. \tag{6.5A.1}$$

由于在 S 变换下 $\Sigma(p)$ 的变换性质 (6.5.2) 式, 这些系数 f 函数在洛伦兹变换下是一些洛伦兹张量. 令 $p_4 = -\mathrm{i}p_0$(p_4 纯虚), 则当 $p_1p_2p_3p_4$ 做 4 维欧空微转动 ($so(4)$) 时 (绕第 4 轴的转动角度是纯虚数), f 是四维欧空的张量. 由于 f 是 p 的解析函数, 我们可以在实四维 p 空间来考虑这些张量的变换性质. 这里 S 涉及的变换包括普通洛伦兹变换及反演: $S_0 = \gamma^4$, 它使 $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \to -\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3$ 而使 γ^4 不变.

我们要确定系数 f 应该是什么样的函数. 先考虑 $\mu = 1,2,3$ 子空间下的洛伦兹变换即转动. 由于在欧空, 各向的关系是对称的, 以下结果容易推广到 $\mu = 1,2,4, \mu = 2,3,4, \mu = 1,3,4$ 子空间, 而得到相关结果.

我们可以写出 $\sum(p)$:

$$\sum(p) = If(p) + \gamma^j f_j(p) + \sum_{i<j}\gamma^i\gamma^j f_{ij}(p) + \gamma^1\gamma^2\gamma^3 f_{123}(p), \tag{6.5A.2}$$

其中,

$$f(p) = f^0(p) + \gamma^4 f^1_4(p), \quad f_j(p) = f^1_j(p) + \gamma^4 f^2_{j4}(p), \quad f_{ij}(p) = f^2_{ij}(p) + \gamma^4 f^3_{ij4}(p),$$

$$f_{123}(p) = f^3_{123}(p) + \gamma^4 f^4_{1234}(p). \tag{6.5A.3}$$

我们有 $\gamma^j\gamma^j \sim \sigma^{ij}, i,j = 1,2,3, i<j$.

容易证明 σ^{ij} 之间的对易关系正是角动量 J_x, J_y, J_z 的对易关系, 因此, 在 a 为 123 空间转动 R 时, $S^{-1}_{(a)}\gamma^i\gamma^j S(a) = \gamma'^i\gamma'^j$ 是 $\{\gamma^i\gamma^j\}$ 的线性组合. 另外, $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 与 σ^{ij} 对易, 因此在转动 R 之下, $\gamma'^1\gamma'^2\gamma'^3 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3$. 由 $[\gamma^4, \sigma^{ij}] = 0$. 给出 γ^4 在转动下不变. 换句话说它们在转动下各自形成 $l = 0$ 或 $l = 1$ 的表示.

考虑到 (6.5A.1) 式和 (6.5A.2) 式的分解式是唯一的 (这可以由 γ 矩阵乘积的求迹特性证明). 因此我们断定在 123 空间转动 R 下, $f^2_{ij}(p')$ 是 $\{f^2_{ij}(p)\}$ 的线性组合, $f^3_{ij4}(p')$ 是 $\{f^3_{ij4}(p)\}$ 的线性组合, $f^3_{123}(p')=f^2_{123}(p), f^4_{1234}(p')=f^4_{1234}(p)$. $f^0(p')=f^0(p), f^1_4(p')=f^1_4(p)$. 它们的转动特性构成三维 $\vec{p}$ 空间转动的 $l=0,1$ 的表示. 这些函数都是 $\vec{p}^2$ 的函数 (p 的第 4 分量 p^4 不变) 乘以一个 $\{p^i\}$ 的多项式, 在任何球面 $|\vec{p}|=r$ 上, 它们都可以用球面的球谐函数 $Y^m_l(\theta,\varphi)$ 分解, 由 $\{\gamma^i\},\{\gamma^i\gamma^j|_{i<j}\}\cdots$ 的转动特性, 我们可以给出 $f^1_i, f^2_{ij}\cdots$ 的转动特性, 从而给出如下结果, 在 $|\vec{p}|=$ 任何值时, 都有

$$f^2_{j4}(p)\text{和}f^1_j(p)\propto p_j, \tag{6.5A.4}$$

$$f^3_{ij4}(p)\text{和}f^2_{ij}(p)\propto \epsilon^{ijk}p_k, \tag{6.5A.5}$$

$$\epsilon^{132}=\epsilon^{321}=\epsilon^{213}=-1,$$

$$\epsilon^{123}=\epsilon^{231}=\epsilon^{312}=1,$$

其余为 0.

$$f^0,\ f^3_{123}(p), f^1_4(p), f^4_{1234}(p)\propto 1. \tag{6.5A.6}$$

它们的比例系数是三维转动不变量, 因此是 p_4 和 $|\vec{p}|=\vec{p}^{\,2}$ 的解析函数. 由于 $\sum(p)$ 的表达式在 $p^i=0$ 处对各个 i 通常都是解析的, 不是分支点, 因此这些系数在 $p^i\to -p^i$ 时不变. 又由于在反演 $x\to -x, y\to -y, z\to -z$ 下 $p^i\to -p^i, \gamma'^i\gamma'^j=\gamma^i\gamma^j$. 这就, 要求 f^2_{ij} 和 f^3_{ij4} 不变, 因而由 (6.5A.5) 式他们为 0. 在反演下, 要求 $f^3_{123}\to -f^3_{123}$, 与 (6.5A.6) 式矛盾, 因而 $f^3_{123}=0$. 最后由于在反演下 $\gamma'^1\gamma'^2\gamma'^3\gamma'^4=-\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$, 所以 $f^4_{1234}=0$. 因此我们得到

$$\sum(p)=If^0(p)+\gamma^4 f^1_4(p)+\gamma^j p_j f^1(p)+\gamma^j\gamma^4 p_j f^2_{j4}.$$

考虑四维欧空的对称性, 由 f^2_{ij} 为 0, f^2_{i4} 也应为 0. 我们得到 $\sum(p)=If^0(p^2)+\sum\limits_{\mu=1}^{4}\gamma^\mu p_\mu f^1(p^2)$. 回到闵氏空间, 我们得到

$$\sum(p)=If^0(p^2)+\gamma^\mu p_\mu f^1(p^2)=\sum(\not{p}), \tag{6.5A.7}$$

正是 $\not{p}$ 的函数.

习题 证明 $\gamma^4 f^1_4(p)+\gamma^i f^1_i(p)=\gamma^\mu p_\mu f^1(p^2)$.

6.6 QED 单圈图重整化

重整化的一般想法如下.

发散积分是动量空间的积分, 首先想一个办法修改一下这个积分, 用一种截断的方法使积分变为有限, 这就要引入一个截断参量 Λ. 这样, 当 Λ 是有限时, 任何一张图的积分都是有限的. 这个过程叫正规化或**正常化**. 然而, 当 $\Lambda \to \infty$ 时, 那些发散的积分, 比如 $-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})$ 等, 还是发散的.

其次, 是在 $\mathscr{L}$ 中加进一些新的微扰项, 即修改 $\mathscr{L} \Rightarrow \mathscr{L}' = \mathscr{L} + \Delta\mathscr{L}_I$, 使得在 $\mathscr{L}'$ 的微扰展开中, 直到耦合常数 g 的某个确定的幂次 n, 所有的费恩曼图中原来的发散图正好被有 $\Delta\mathscr{L}_I$ 参加的图抵消而只剩下有限的 (当 $\Lambda \to \infty$ 时) 与截断的具体形式无关的值. 这个过程叫**重整化**. 这种由 $\Delta\mathscr{L}_I$ 产生的新的图称为原来发散图的抵消项 (counter term). 这些用来构成抵消项的 $\Delta\mathscr{L}_I$ 实际上由一些“新引入的顶角”(即 $\Delta\mathscr{H}_I$) 组成.

这些新引入的顶角, 它们的外线 (它无内线) 与需要抵消的发散图的外线类似. 它们的值与截断 Λ 有关 (否则怎么能抵消一个趋于无穷的值呢), 当 $\Lambda \to \infty$ 时, 这些新顶角的值也 $\to \infty$. 当 n 一旦确定时, 所要引入的新顶角就完全确定了. 而由需要的新顶角, 我们就可以确定 $\Delta\mathscr{L}_I$. 在这个过程中, 我们始终认为不管多大的 Λ, 它的效应比之微扰参量 g 还是小很多. 就是说, 重整化是按微扰的阶数进行的, 那么问题在于：如果做第 n 阶重整化时, 前面各阶的重整化时添加的一些新的 $\Delta\mathscr{L}_I$ 会不会在第 n 阶引起矛盾呢? 比如, 在 n 个顶角的图 Γ 上有一个发散的子图 γ, 它的顶角数为 l, 则在做 l 阶重整化时我们引进了一个 $\Delta\mathscr{L}_l^\gamma$ 来抵消它的发散, 那么, 当出现图 Γ 的时候, 只要它有子图 γ, 由于已经在 $\mathscr{L}$ 中加进了 $\Delta\mathscr{L}_l^\gamma$, 则在 S 的展开中一定有一张图 Γ', 它把 Γ 中的 γ 换成了 γ 的抵消项. 因为抵消项的外线与 γ 的外线相同, 根据画费恩曼图时的原则, 只要可能构成图, 就一定会有那张图出现. 子图的值只与它和它的外线连接什么有关, 而与它在哪一级微扰里出现的无关, 这会不会对 Γ 引进抵消项造成麻烦呢? 重整化理论的成功在于, 按照引进抵消项的程序, 可以做到在第 n 阶没有矛盾. 这些由前几阶重整化引进的“新顶角”给出的与 Γ 相关的新图 Γ', 也正是抵消 Γ 的发散困难时所需要的.

但是, 在一般情况下, 光是依靠前几阶的抵消项并不足以抵消所有在 n 阶的发散图的发散, 我们还必须在 n 阶时引进一些新的抵消项 $\Delta\mathscr{L}_n^\gamma$, 它们的系数是 g^n. 一个场论每一阶都要引进新的抵消项. 什么是可以重整化的场论呢? 它们的特点是, 尽管每一级都要引进新的抵消项, 但是这些抵消项的“品种”, 即外线的组合品种是有限的. 比如 QED, 总共 $D \geqslant 0$ 的图就是有限种外线组合. 而后面我们将说明, 重整化中用到的抵消项一定是一些与 $D \geqslant 0$ 的 (表观发散度 $\geqslant 0$) 的图有类似外线

的顶角, 每一张发散图对应有限种抵消项, 有一些场, 比如 QED 总共有 5 种外线组合形式的 $D \geqslant 0$ 的图, 这种场论在任意 n 级重整化后, 它的 $\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}_I$ 中只有有限种外线的抵消项, 也就是只有有限种顶角, 只是系数随 n 而变换罢了. 这种场的重整化, 可以认为是对一个具有有限项的拉格朗日密度的体系, 将其拉格朗日密度的各项系数重新赋值. 这种场论我们称之为可重整化的场论. 根据前面 6.2 节所说的, 这实际上只要 $d_{v_j} \leqslant 0$(对所有各种顶角 j) 就可以了.

对于 QED 的单圈图, 重整化相当于将发散图的被积函数对外动量进行泰勒展开, 展开到该图的表观发散度的那一级为止. 展开得到的多项式部分可以用添加新顶角的办法抵消掉, 而展开的余项就变成重整化之后的被积函数, 由它们可以给出有限的结果.

下面我们分析 QED 的各种发散图的重整化, 按照表 6.2.1, 我们只须分析真空极化图、电子自能图、顶角修正图. 真空图由于 (5.1.8) 式, 对费恩曼积分自己形成一个单独的因子, 这个因子对 S 矩阵可以证明只提供一个常数, 我们可以在 $\Delta\mathscr{L}_I$ 中用添加常数项的办法使它变为纯粹的相因子, 因而毋须计算.

6.6.1　真空极化的单圈图

图 6.6.1 是 QED 中常见的部件. 这个部件中间与图 6.6.1 有关的部分的费恩曼积分是

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{tr}\left[(-\mathrm{i}e\gamma^\mu)\frac{\mathrm{i}}{\not{q}-\not{k}-m+\mathrm{i}\epsilon}(-\mathrm{i}e\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not{q}-m+\mathrm{i}\epsilon}\right]\equiv\Pi^{\mu\nu}(k,m). \tag{6.6.1}$$

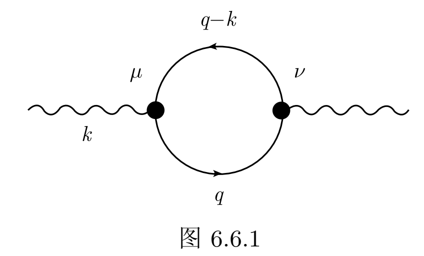


图 6.6.1

它的表观发散度 $D=2$. 首先将此积分正常化, 引入

$$\Pi_R^{\mu\nu}(k)\equiv\Pi^{\mu\nu}(k,m)-\sum_i c_i\Pi^{\mu\nu}(k,M_i), \tag{6.6.2}$$

要求 $\sum\limits_i c_i=1$, 而且 $\sum\limits_i c_iM_i^2=m^2$, $M_i\to\infty$ 时就回到原来的理论. 这种正常化

的优点是能保持洛伦兹协变性和规范条件.

$$\Pi_R^{\mu\nu}(k) = -e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\mathrm{tr}[\gamma^\mu(\not{q} - \not{k} + m)\gamma^\nu(\not{q} + m)]}{((q-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)(q^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)} - \text{regulator term} \right\}, \tag{6.6.3}$$

其中, 括号内部要求 $\sim q^{-5}$ 或更低.

我们用以下技巧来算这个积分.

技巧 1 引入费恩曼参数表示

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} \mathrm{d}x, \tag{6.6.4}$$

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = (n-1)! \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \cdots \mathrm{d}\alpha_n \, \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - 1)}{(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n)^n}. \tag{6.6.5}$$

注意, 这个式子里 $\mathrm{d}\alpha$ 的积分范围是 $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$, 而且 $\sum_i \alpha_i = 1$. 所以前面 $n-1$ 个 α_i 并不是可以自由地从 0 积到 1 的, 比如 $\alpha_1 = 0.8$, 而且 $\alpha_2 = 0.8$ 的点肯定不在积分范围之内.

利用 (6.6.4) 式和 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho) = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda})$ 得到

$$\begin{aligned}
&\Pi_R^{\mu\nu}(k) \\
=& -4e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \left\{ \frac{q^\mu (q-k)^\nu + q^\nu (q-k)^\mu - g^{\mu\nu} q\cdot(q-k) + m^2 g^{\mu\nu}}{[x((q-k)^2 - m^2) + (1-x)(q^2 - m^2) + \mathrm{i}\epsilon]^2} \right. \\
&\left. - \text{regulator term} \right\} \\
=& -4e^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \left\{ \frac{(q - xk + xk)^\mu (q - xk - (1-x)k)^\nu + (\mu \leftrightarrow \nu)}{[(q-xk)^2 + x(1-x)k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon]^2} \right. \\
&\left. + \frac{g^{\mu\nu}(m^2 - (q - xk + xk)\cdot(q - xk - (1-x)k))}{[(q-xk)^2 + x(1-x)k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon]^2} - \text{regulator term} \right\}.
\end{aligned} \tag{6.6.6}$$

引入新变量 (将坐标平移, 这在发散积分是不行的! 现在已经正常化了, 所以是可以的. 只要有足够多的 i 和 M_i, 正常化总是可以做到的)

$$q' = q - xk \tag{6.6.7}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_R^{\mu\nu}(k) = -4e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^4 q'}{(2\pi)^4} &\left\{ \frac{(q' + xk)^\mu (q' - (1-x)k)^\nu + (\mu \leftrightarrow \nu)}{[q'^{\,2} + x(1-x)k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon]^2} \right. \\
&\left. + \frac{g^{\mu\nu}(m^2 - (q' + xk)\cdot(q' - (1-x)k)}{[q'^{\,2} + x(1-x)k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon]^2} - \text{regulator term} \right\}
\end{aligned}$$

$$\overset{q'\to q}{=} \frac{-4e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 \mathrm{d}x\int \mathrm{d}^4q\left\{\frac{2q^\mu q^\nu - 2x(1-x)k^\mu k^\nu + g^{\mu\nu}(m^2-q^2+x(1-x)k^2)}{[q^2+x(1-x)k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon]^2} + \frac{(q\ k\ \text{term})}{\cdots} - \cdots\right\}. \tag{6.6.8}$$

技巧 2　把对 q^0 的积分在复平面上作 Wick 旋转 (图 6.6.2)

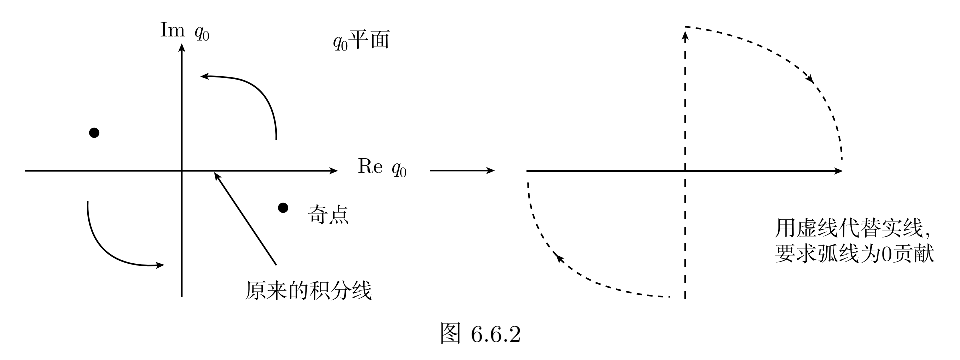


图 6.6.2

令

$$q_0 \to \mathrm{i}q_4,\quad q^2=(\mathrm{i}q_4)^2-q_1^2-q_2^2-q_3^2=-\sum_{i=1}^4 q_i^2=-q_E^2,\quad \mathrm{d}^4q=\mathrm{i}\mathrm{d}q_4\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3=\mathrm{i}\mathrm{d}^4q_E, \tag{6.6.9}$$

则闵氏空间变为欧氏空间.

以下的 q 和 d^4q 都在欧氏空间

$$\Pi_R^{\mu\nu}(k)=\frac{-4\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int \mathrm{d}^4q_E \times\left\{\frac{2q^\mu q^\nu-2x(1-x)k^\mu k^\nu+g^{\mu\nu}(m^2+q_E^2+x(1-x)k^2)+(q\text{奇次项})}{[-q_E^2+x(1-x)k^2-m^2]^2}-\cdots\right\}. \tag{6.6.10}$$

由于被积函数各项在 q_E 空间的对称性, 我们可以看出 q 的奇次项贡献为 0, $q^\mu q^\nu$ 项的积分仅当 $\mu=\nu$ 时非 0. 而当 $\mu=\nu=0$ 时, 该项为 $-(q_E^4 q_E^4)$, 否则为 $(q_E^j q_E^j), j=1,2,3$, 在欧式空间这个积分中它们等价于 $\mp q_E^2/d$, d 为维数. 所以, 合在一起, 该项等价于 $-2g^{\mu\nu}q_E^2/d$. 于是上式改写为 $(d=4)$

$$\Pi_R^{\mu\nu}(k) \overset{d=4}{=} -4\mathrm{i}e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^dq_E}{(2\pi)^d}$$

$$
\times\left\{\frac{g^{\mu\nu}q_E^2(1-\dfrac{2}{d})-2x(1-x)k^\mu k^\nu+g^{\mu\nu}(m^2+x(1-x)k^2)}{[q_E^2-x(1-x)k^2+m^2]^2}-\cdots\right\}
$$

$$
=\frac{-4\mathrm{i}e^2}{(2\pi)^4}\Omega_d\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}q_E^{d-1}\mathrm{d}q_E
$$

$$
\times\left\{\frac{g^{\mu\nu}q_E^2(1-\dfrac{2}{d})-2x(1-x)k^\mu k^\nu+g^{\mu\nu}(m^2+x(1-x)k^2)}{[q_E^2-x(1-x)k^2+m^2]^2}-\cdots\right\}
$$

$$
\overset{q_E\to q}{=}\frac{-\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}q^2\mathrm{d}q^2
$$

$$
\times\left\{\frac{\dfrac{1}{2}g^{\mu\nu}q^2-2x(1-x)k^\mu k^\nu+g^{\mu\nu}(m^2+x(1-x)k^2)}{[q^2-x(1-x)k^2+m^2]^2}-\cdots\right\},\quad(6.6.11)
$$

其中, Ω_d 是 d 维单位球面积,

$$
\Omega_d=2\pi^{(d/2)}/\Gamma(d/2),\quad \Omega_4=2\pi^2,\quad \alpha=\frac{e^2}{4\pi}.\tag{6.6.12}
$$

利用

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\Lambda\frac{q^4\mathrm{d}(q^2)}{(q^2+C^2)^2}\cong\Lambda^2-2C^2\ln\frac{\Lambda^2}{C^2}+C^2,\\
&\int_0^\Lambda\frac{q^2\mathrm{d}(q^2)}{(q^2+C^2)^2}\cong\ln\frac{\Lambda^2}{C^2}-1,
\end{aligned}\tag{6.6.13}
$$

并令

$$
\begin{aligned}
C^2&=m^2-x(1-x)k^2,\\
B&=-2x(1-x)k^\mu k^\nu+g^{\mu\nu}(m^2+x(1-x)k^2),\\
A&=\frac{1}{2}g^{\mu\nu},
\end{aligned}\tag{6.6.14}
$$

上述积分变为

$$
\begin{aligned}
\Pi_R^{\mu\nu}(k)&\sim\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^\infty\mathrm{d}(q^2)q^2\times\left\{\frac{Aq^2+B}{(q^2+C^2)^2}-\text{regulator term}\right\}\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^\infty\mathrm{d}(q^2)\times\left\{\frac{Aq^4+Bq^2}{(q^2+C^2)^2}-\text{regulator term}\right\}\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\lim_{\Lambda\to\infty}\left[A\left(\Lambda^2-2C^2\ln\frac{\Lambda^2}{C^2}+C^2\right)+B\left(\ln\frac{\Lambda^2}{C^2}-1\right)-\text{regulator term}\right]\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\lim_{\Lambda\to\infty}\left[a_0\Lambda^2+(b_0+c_0m^2)\ln\Lambda^2+\text{有限项}-\text{regulator term}\right].
\end{aligned}\tag{6.6.15}
$$

只要调整 regulator term 的 c_iM^i, 使 Λ^2 项及 $\ln\Lambda^2$ 项消去就可以了.

(1) 由于 $\sum c_i = 1$, 所有与 m 无关的项包括 Λ^2 项和 $b_0\ln\Lambda^2$ 就消去.

(2) 由于

$$\sum_i c_iM_i^2 = m^2 \tag{6.6.16}$$

所有 m^2 的一次项都消去, 特别是 $c_0\ln\Lambda^2$ 项也消去, 余下的项在 $\Lambda^2\to\infty$ 时是有限的.

我们得到

$$\begin{aligned}
&\Pi_R^{\mu\nu}(k)\\
=&-\frac{\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{g^{\mu\nu}(-m^2+x(1-x)k^2)\ln\frac{1}{m^2-x(1-x)k^2}\right.\\
&+(-2x(1-x)k^\mu k^\nu+m^2g^{\mu\nu}+g^{\mu\nu}x(1-x)k^2)\\
&\left.\times\ln\frac{1}{m^2-x(1-x)k^2}-\sum_i c_i(m\to M_i)\right\}\\
=&(k^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}k^2)\frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\\
&\times\left\{\ln\frac{1}{m^2-x(1-x)k^2}-\sum_i c_i\ln\frac{1}{M_i^2-x(1-x)k^2}\right\}\\
\equiv&(k^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}k^2)\Pi_R(k^2).
\end{aligned}\tag{6.6.17}$$

正如前面分析的那样, 它满足规范条件 $k_\mu\Pi^{\mu\nu}=\Pi^{\mu\nu}k_\nu=0$. (6.6.17) 式给出的真空极化图有这种形式, 是它同时满足规范条件和洛伦兹协变性的必然结果, 是一切真空极化图的共同性质, 这种正常化是保持规范条件以及洛伦兹协变的方法. 在 (6.6.17) 式中有

$$\Pi_R(k^2)=\frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\left\{\ln\frac{1}{m^2-x(1-x)k^2}-\sum_i c_i\ln\frac{1}{M_i^2-x(1-x)k^2}\right\}. \tag{6.6.18}$$

这个积分收敛. 也就是, 只要 $\sum\limits_i c_i=1,\sum\limits_i c_iM_i^2=m^2$, 积分 (6.6.15) 式便收敛, 正常化手续完成. 现在的理论是有 M_i 的理论, 并非原来的理论, 当 $M_i\to\infty$ 时, 可以看出, $\Pi_R(k^2)$ 还是要 $\to\infty$ 的. 改写一下：

$$\Pi_R(k^2)=\frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\left\{\ln\frac{m^2}{m^2-x(1-x)k^2}-\sum_i c_i\ln\frac{m^2}{M_i^2-x(1-x)k^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x\left\{\ln\frac{m^2}{m^2-x(1-x)k^2}-\sum_i c_i\ln\frac{M_i^2\cdot\dfrac{m^2}{M_i^2}}{M_i^2-x(1-x)k^2}\right\} \\
&= \frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \\
&\quad\times\left\{-\ln(1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2})-\sum_i c_i(m\to M_i)+\sum_i c_i\ln\frac{M_i^2}{m^2})\right\}.
\end{aligned} \tag{6.6.19}
$$

令 $\sum\limits_i c_i\ln\dfrac{M_i^2}{m^2}\equiv\ln\dfrac{M^2}{m^2}$, 上式变为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi}\left\{\ln\frac{M^2}{m^2}-6\int_0^1\mathrm{d}xx(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right]\right. \\
&\left.+6\sum_i c_i\int_0^1\mathrm{d}xx(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{M_i^2}\right]\right\}
\end{aligned} \tag{6.6.20}
$$

最后一项 $\sim O\left(\dfrac{1}{M^2}\right)$, M 称为 cutoff mass. 当 $M^2\to\infty$ 时, $\Pi_R(k^2)$ 还是发散的, 但正常化手续已完成. 这种引入有质量的新场量来正常化的方法称为泡利–维拉斯正常化方法.

我们现在可以引入一个抵消项, 令

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}_R(k^2) &= \Pi_R(k^2)-\Pi_R(0)=\Pi_R(k^2)-\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi}\left[\ln\frac{M^2}{m^2}\right] \\
&= -\frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}xx(1-x)\left[\ln\left(1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right)\right. \\
&\quad\left.-\sum_i c_i\ln\left(1-x(1-x)\frac{k^2}{M_i^2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{6.6.21}
$$

则 $\widetilde{\Pi}_R(k^2)$ 在 $M_i\to\infty$ 时有极限

$$
\lim_{M_i\to\infty}\widetilde{\Pi}_R(k^2)=-\frac{2\mathrm{i}\alpha}{\pi}\int_0^1\mathrm{d}xx(1-x)\ln\left[1-x(1-x)\frac{k^2}{m^2}\right]. \tag{6.6.22}
$$

相应地有

$$
\widetilde{\Pi}_R^{\mu\nu}(k)=(k^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}k^2)\widetilde{\Pi}_R(k^2). \tag{6.6.23}
$$

当 $M_i \to \infty$ 时, $\widetilde{\Pi}_R^{\mu\nu}(k) \to \widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)$ 有限, 就是重整化后的值. 如果定义 $t_k^{(2)}$ 表示对一个 k_μ 的函数的二阶泰勒展开, 则

$$\widetilde{\Pi}_R^{\mu\nu}(k) = (1 - t_k^{(2)})\Pi_R^{\mu\nu}(k), \tag{6.6.24}$$

其中①

$$t_k^{(2)} f(k) = f(0) + k_\mu \frac{\partial}{\partial k_\mu} f(k)\bigg|_{k=0} + \frac{1}{2} k_\mu k_\nu \frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{\partial}{\partial k_\nu} f(k)\bigg|_{k=0}. \tag{6.6.25}$$

在本式中泰勒展开的展开点在 $k_\mu = 0$. 从 (6.6.24) 式可以看出, 为了抵消发散, 所需要的抵消项就是 $-t_k^{(2)}\Pi_R^{\mu\nu}(k) = \left(-\dfrac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi}\ln\dfrac{M^2}{m^2}\right)(k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2)$, 它的产生可以用在微扰论中添加一个 $\Delta\mathscr{H}_I$ 来实现, 对照表 6.6.1 和表 6.6.2 以及微扰论中 $n = 1$ 的公式, 对应的需要新添在相互作用哈密顿量中的算子是

$$-\mathrm{i}\Delta\mathscr{H}_I(x) = +\underbrace{\frac{\mathrm{i}\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}}_{-\mathrm{i}Z_0}((\partial^\mu\partial^\nu A_\mu)A_\nu - (\partial^\lambda\partial_\lambda A_\mu)A_\nu g^{\mu\nu}), \tag{6.6.26}$$

对应的拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}_I(x) &= -\Delta\mathscr{H}_I(x) \overset{\text{积分下}}{=} -Z_0(\partial_\lambda A^\nu\partial^\lambda A_\nu - (\partial_\mu A^\mu)^2)\\ &= -\frac{Z_0}{4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}).\end{aligned} \tag{6.6.27}$$

这个式子的证明要用到 (4.2.40) 式. 这是一个新添的 "顶角", 它的微扰级别 $\sim \alpha \sim e^2$. 当截断参量 $M \to \infty$ 时, $Z_0 = \dfrac{-\alpha}{3\pi}\ln\dfrac{M^2}{m^2} \to -\infty$, 但在任何微扰论运算中, 它总要认为是个有限量, 绝对值比 1 小得多. 事实上, 由于 $\alpha = \dfrac{1}{137}$, 而且截断参量 M 是在 ln 之后, 只有当 M 很大时, $|Z_0|$ 才会大于 1.

(6.6.27) 式对于其他真空极化图也是成立的, 这是因为它们都具有 (6.5.4) 式的形式, 只是 Z_0 的表达式不同而已.

表 6.6.1 给出 QED 中场算子与费恩曼图的对应.

表 6.6.2 给出添加的各种顶角 (QED).

---

① 由 (6.6.21) 式, $\Pi_R^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2)\Pi_R(k^2)$, 可知 $t_k^{(2)}$ 中的 $f(0) = \Pi_R^{\mu\nu}(k^2)\big|_{k=0} = 0$, 以及 $\dfrac{\partial}{\partial k_\mu}f(k)\bigg|_{k=0} \sim [(k\text{的一次式})\cdot\Pi_R(k^2) + (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2)\Pi_R(k^2)]\big|_{k=0} = 0$.

表 6.6.1

算子	坐标空间图	动量空间
$A_\mu(x)$	μ, x	μ
$\overline{\psi}_\alpha(x)$	α, x	α
$\psi_\alpha(x)$	α, x	α
$A_\mu(x)A_\nu(x')$ (contracted)	μ ν, x x' $\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(x-x')$	μ k ν $\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(k)$
$\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(x')$ (contracted)	α β, x x' $\mathrm{i}S_{F\alpha\beta}(x-x')$	α p β $\mathrm{i}S_{F\alpha\beta}(p)$
∂_μ	$\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$	$\pm\mathrm{i}k_\mu$ 或 $\pm\mathrm{i}p_\mu$
常数 $(g^{\mu\nu},\gamma^\nu_{\alpha\beta})$	常数	常数

表 6.6.2

算子	坐标空间图	动量空间图
$:A_\mu(x)A_\nu(x):$	μ ν	μ ν
$:\partial_\mu A_\nu(x)A_\lambda(x):$	ν λ, ∂_μ	ν λ, $-\mathrm{i}k_\mu$
$:A_\nu(x)\partial_\mu A_\lambda(x):$	ν λ, ∂_μ	ν λ, $-\mathrm{i}k_\mu$
$:A_\mu(x)\partial^\mu\partial^\nu A_\nu(x):$	μ $\partial^\mu\partial^\nu$ ν, x	μ $-k^\mu k^\nu$ ν
$:A_\mu(x)g^{\mu\nu}A_\nu(x):$	μ $g^{\mu\nu}$ ν, x	μ $g^{\mu\nu}$ ν
$:A_\mu(x)g^{\mu\nu}\partial^2 A_\nu(x):$	μ $g^{\mu\nu}\partial^2$ ν, x	μ $-g^{\mu\nu}k^2$ ν
$:\overline{\psi}m\psi(x):$	m, x	m
$:\overline{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi(x):$	$\mathrm{i}\partial\!\!\!/$, x	$p\!\!\!/$
$:\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(x):$	γ^μ, x	γ^μ
$:\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu:$	γ^μ μ, x	γ^μ μ

6.6.2 电子自能的单圈图

现在考虑电子自能最低项, 它的费恩曼图是图 6.6.3.

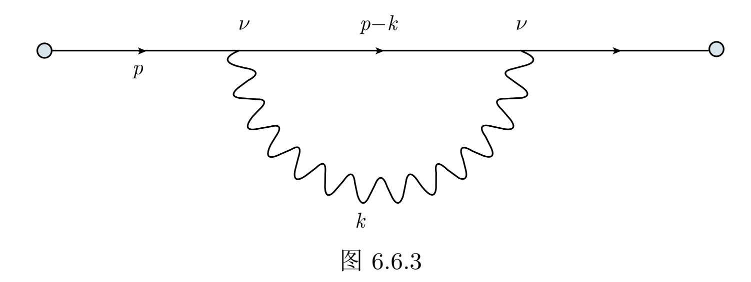


图 6.6.3

它的表观发散度 $D=4-3=1$. 为了正常化, 我们假设光子质量为 λ, 电子自能单圈图的费恩曼积分为

$$-\mathrm{i}\Sigma(\not p)=(-\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu\right], \tag{6.6.28}$$

$$-\mathrm{i}\Sigma(\not p)=\frac{-\mathrm{e}^2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\frac{1}{(k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon)}\frac{\gamma^\nu(\not p-\not k+m)\gamma_\nu}{[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon]}. \tag{6.6.29}$$

观察此费恩曼积分, 会发现对 k 的积分次数为 4 次, 而被积函数是 k 的负 3 次. 因此当 $k\to\infty$ 时是发散的, 这种发散称为紫外发散. 另一方面, 计算表明如果让光子质量 $\lambda\to 0$, 对 k 的积分在 $k=0$ 时也是发散的, 这种发散称为红外发散. 重整化理论是处理紫外发散的理论. 由 (6.6.4) 式的费恩曼参数表示, 得到

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\Sigma(\not p)=&\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\\&\times\frac{\gamma^\nu(\not p-\not k+m)\gamma_\nu}{[(1-x)(k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon)+x(p^2+k^2-2p\cdot k-m^2+\mathrm{i}\epsilon)]^2}\\=&\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\gamma^\nu(\not p-\not k+m)\gamma_\nu}{[k^2-2xp\cdot k+xp^2-xm^2-(1-x)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^2},\end{aligned} \tag{6.6.30}$$

其中, λ 是光子质量. 如果将 (6.6.28) 式中的传播子 $\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}$ 改为 $\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}-\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda_M^2+\mathrm{i}\epsilon}$ 得到

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\Sigma_R(\not p)=&\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\int_0^1\mathrm{d}x\\&\times\left\{\frac{\gamma^\nu(\not p-\not k+m)\gamma_\nu}{[k^2-2xp\cdot k+xp^2-xm^2-(1-x)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}.\end{aligned} \tag{6.6.31}$$

这个积分当 λ_M 有限时是收敛的, 这便是泡利 — 维拉斯正常化. 由

$$\begin{aligned}\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu &= -2\gamma^\mu,\\ \gamma^\nu(\not p-\not k)\gamma_\nu &= -2(\not p-\not k),\\ \gamma^\nu m\gamma_\nu &= 4m,\end{aligned} \tag{6.6.32}$$

得到

$$\begin{aligned}&-\mathrm{i}\Sigma_R(\not p)\\ &=\frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\left\{\frac{[(-2)(\not p-\not k)+4m]}{[k^2-2xp\cdot k+xp^2-xm^2-(1-x)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\ &=\frac{2e^2}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\left\{\frac{[\not p-\not k-2m]}{[(k-xp)^2-(x^2-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}.\end{aligned} \tag{6.6.33}$$

令四维矢量 $k'=k-xp, k=k'+xp$, 给出

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\Sigma_R(\not p)&=\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k'\left\{\frac{[(1-x)\not p-\overbrace{\not k'}^{\text{奇次项, 可去掉}}-2m]}{[k'^2+\underbrace{x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}_{-C}]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\ &=\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k'\left\{\frac{\overbrace{[(1-x)\not p-2m]}^{B}}{[k'^2-C]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}.\end{aligned} \tag{6.6.34}$$

注意：C 是 λ 的函数, 而 B 不是.

在 Wick 转动后, 变为 $(\mathrm{d}^4k'\to\mathrm{id}^4k_E, k'^2\to -k_E^2)$

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\Sigma_R(\not p)&=\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{B\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}^4\,k_E}{[k_E^2+C]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\\ &=\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int B\,\mathrm{i}\,k_E^2\,\mathrm{d}^2k_E\,\frac{\Omega_4}{2}\left\{\frac{1}{[k_E^2+C]^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\ &\overset{y=k_E^2+C}{=}\lim_{\xi\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\Omega_4}{2}\int_C^{\xi+C}\frac{\mathrm{i}B(y-C)\mathrm{d}y}{y^2}\\ &\overset{\Omega_4=2\pi^2}{=}\lim_{\xi\to\infty}\frac{e^2}{8\pi^4}(\mathrm{i}\pi^2)\int_0^1\mathrm{d}xB\left\{[\ln y+\frac{C}{y}]_{y=C}^{y=\xi+C}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\ &=\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}xB\lim_{\xi\to\infty}\{\ln\frac{\xi+C(\lambda)}{\xi+C(\lambda_M)}-\ln C(\lambda)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ln C(\lambda_M)+\frac{C(\lambda)}{\xi+C(\lambda)}-\frac{C(\lambda_M)}{\xi+C(\lambda_M)}\}\\
=&\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}xB[-\ln C(\lambda)+\ln C(\lambda_M)]\\
=&-\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\Bigg\{\Bigg[(1-x)\not{p}-2m\Bigg]\\
&\times\Bigg[\ln(-x(1-x)p^2+xm^2+(1-x)\lambda^2)-(\lambda\to\lambda_M)\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{6.6.35}
$$

这就完成了正常化手续. 当 $\lambda_M\to\infty$ 时, 回到原来的发散积分, 由于 $p^2=\not{p}^2$, 方阵 $\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p})$ 是 $\not{p}$ 的函数, 所以上述量可以用 $\not{p}-m$ 作泰勒展开. 令

$$
-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p})=a_R+b_R(\not{p}-m)-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p})
\tag{6.6.36}
$$

使得

$$
\tilde{\Sigma}_R(\not{p})|_{\not{p}=m}=\frac{\partial}{\partial\not{p}}\tilde{\Sigma}_R(\not{p})|_{\not{p}=m}=0,
$$

则有

$$
\begin{aligned}
a_R=&-\mathrm{i}\ \Sigma_R(\not{p})|_{\not{p}=m}\\
=&\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1+x)m\Big\{(-)\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]+\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda_M^2]\Big\},
\end{aligned}
\tag{6.6.37}
$$

$$
\begin{aligned}
b_R=&\frac{\partial}{\partial\not{p}}(-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p}))\Big|_{\not{p}=m}\\
=&\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\Big\{\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]-\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda_M^2]\Big\}\\
&-\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1+x)m\Big\{\frac{(-)(-)x(1-x)2m}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}-\frac{x(1-x)2m}{x^2m^2+(1-x)\lambda_M^2}\Big\}\\
=&\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\Big\{\frac{2x(1+x)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}+\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\Big\}\\
=&\alpha+\beta+\gamma,
\end{aligned}
\tag{6.6.38}
$$

其中, $\alpha=\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda_M^2]$, 当 $\lambda_M^2\to\infty$ 时发散, 这叫紫外发散. $\beta=$ 有限数, $\gamma=-\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\frac{2x(1-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}$, 这项当 $\lambda^2\to0$ 时发散, 这种发散叫红外发散. 我们得到

$$
-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p})=-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p})-a_R-b_R(\not{p}-m).
\tag{6.6.39}
$$

其中, $-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p})$ 是 $(\not{p}-m)$ 的二次以上函数, 它是 $-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p})$ 在 $\not{p}=m$ 点泰勒展开到一次项之后的余项：

$$-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p}) = -\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p}) - t_p^{(1)}\left(-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p})\right)\big|_{\not{p}=m} = (1-t_p^{(1)})(-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p})). \tag{6.6.40}$$

当截断 $\lambda_M^2\to\infty$ 时, 我们看到, 系数 a、b 都是发散的, 但 $-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p})$ 有极限.

我们令重整化后单圈自能图的值为

$$-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}(\not{p}) = \lim_{\lambda_M^2\to\infty} -\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p}) = \lim(-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p}) - a_R - b_R(\not{p}-m)), \tag{6.6.41}$$

其中, a_R、b_R 是发散常数, 对 e 的次数是 e^2 级.

由 $(ax+b)f(x)-(am+b)f(m)-[af(m)+(am+b)f'(m)](x-m) = (ax+b)[f(x)-f(m)]-(am+b)f'(m)(x-m)$ 得此极限为

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not{p}) \to -\mathrm{i}\tilde{\Sigma}(\not{p}) = &\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\Bigg\{[(1-x)\not{p}-2m](-)\\
&\times\ln\left[\frac{-x(1-x)p^2+xm^2+(1-x)\lambda^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}\right]\\
&+\frac{2x(1-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}(\not{p}-m)\Bigg\}\\
=&(-\mathrm{i})[c_2(\not{p}-m)^2+c_3(\not{p}-m)^3+\cdots]\\
\equiv&(-\mathrm{i})F(\not{p}-m).
\end{aligned} \tag{6.6.42}$$

它是 $(\not{p}-m)$ 的二次以上函数.

要在相互作用项的 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中添加什么算符才能使得在 e^2 的水平上自动出现这个抵消项呢? 由之前总结的表 6.6.2 可见, 我们需要 $-\mathrm{i}\Delta\mathscr{H}_I \xrightarrow{\text{动量空间}} -a_R-b_R(\not{p}-m)$, 这就要求：

$$\Delta\mathscr{L}_I = (\mathrm{i})[a_R\bar{\psi}(x)\psi(x)+b_R\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi(x)] = Z_1\bar{\psi}\psi+Z_2\bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi, \tag{6.6.43}$$

其中

$$Z_1 = \mathrm{i}a_R \sim \frac{e^2}{8\pi^2}\times\frac{3}{2}m\ln\lambda_M^2,$$

$$\begin{aligned}
Z_2 = \mathrm{i}b_R = &\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\\
&\times\left\{\frac{2x(1+x)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}+\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\right\}\\
\sim&-\frac{e^2}{16\pi^2}\ln\lambda_M^2.
\end{aligned} \tag{6.6.44}$$

由于 λ_M^2 是在 ln 之后, 与 Z_0 一样, 也仅当截断参量很大时, Z_1 和 Z_2 的绝对值才会大于 1. 在今后的运算中, 我们总认为它们的绝对值远小于 1, 因此可用公式 $\Delta\mathscr{L}_I=-\Delta\mathscr{H}_I$.

当取正常化时, a_R,b_R 均有限, 当 $\lambda_M^2\to\infty$ 时, 它们都发散. 大家注意到这些系数 a_R 和 b_R 都 $\sim e^2$, 因而在以 e 的幂级数展开时一定会与 $-\mathrm{i}\Sigma(\not p)$ 一起出现, 从而到这一级, 微扰展开结果是有限的. $\Delta\mathscr{L}_I$ 的项的形式是在 $\mathscr{L}$ 中原来就有的, 只是系数是发散的而已.

(6.6.36) 式和 (6.6.43) 式对于其他电子自能图也适用, 只是发散常数 a_R,b_R,Z_1,Z_2 不同而已, 这是由于 $\Sigma(p)=\Sigma(\not p)$ 的公式普遍适用, 因此总可以对 $\not p$ 在 m 点作泰勒展开.

6.6.3　顶角修正的单圈图

最低阶的顶角修正的费恩曼图如图 6.6.4.

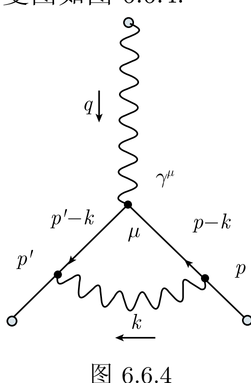


图 6.6.4

相应的费恩曼积分为 (顶角部分只写 γ^μ 而不写成 $-\mathrm{i}e\gamma^\mu$)

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu(p',p)&=(-\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not p\,'-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu\\&=(-\mathrm{i}e^2)\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\ \frac{\gamma^\nu(\not p\,'-\not k+m)\gamma^\mu(\not p-\not k+m)\gamma_\nu}{(k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon)((p'-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)((p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)}.\end{aligned}\tag{6.6.45}$$

由 (6.6.45) 式给出

$$\begin{aligned}(p'-p)_\mu\Lambda^\mu(p',p)=(-\mathrm{i}e)^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{k^2-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\\ \times[(\not p'-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon)-(\not p-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon)]\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not k-m+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\nu \\
&\quad - (-\mathrm{i}e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not{p}' - \not{k} - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\nu .
\end{aligned}
$$

对比 (6.6.28) 式得到

$$
(p' - p)_\mu \Lambda^\mu (p', p) = \sum(p) - \sum(p') \tag{6.6.46}
$$

这是 Ward 恒等式的最低阶形式①. 将 (6.6.46) 两边对 p_μ 取偏微商并令 $p' = p$ 得

$$
\Lambda^\mu (p, p) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \sum(p). \tag{6.6.47}
$$

我们考虑分母部分. 由 (6.6.5) 式得

$$
\frac{1}{ABC} = 2! \int_0^1 \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2 \mathrm{d}\alpha_3 \frac{\delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)}{(\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C)^3}. \tag{6.6.48}
$$

令

$$
\alpha_1 = xy, \quad \alpha_2 = x(1-y), \quad \alpha_3 = 1 - x,
$$

我们可以证明

$$
\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 x \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{[xyA + x(1-y)B + (1-x)C]^3}, \tag{6.6.49}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{((p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)((p'-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon)(k^2 - \lambda^2 + \mathrm{i}\epsilon)} \\
&= 2 \int_0^1 x \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \\
&\quad \times \frac{1}{[xy((p-k)^2 - m^2) + x(1-y)((p'-k)^2 - m^2) + (1-x)(k^2 - \lambda^2) + \mathrm{i}\epsilon]^3} \\
&\equiv 2 \int_0^1 x \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{(D + \mathrm{i}\epsilon)^3}.
\end{aligned} \tag{6.6.50}
$$

在 (6.6.50) 式被积函数的分母中 D 为

$$
\begin{aligned}
D &= k^2 - 2k \cdot [xyp + x(1-y)p'] + [xyp^2 + x(1-y)p'^2 - xm^2 - (1-x)\lambda^2] \\
&= [k - xyp - x(1-y)p']^2 - [xyp + x(1-y)p']^2 \\
&\quad + [xyp^2 + x(1-y)p'^2 - xm^2 - (1-x)\lambda^2] \\
&\equiv k'^2 - \rho.
\end{aligned} \tag{6.6.51}
$$

①这里的推导只是形式上的, 因为 Λ^μ 和 Σ 都是发散积分. 但是如果采用将被积函数减去 $(\lambda \to \lambda_M)$ 的函数作为正常化后的被积函数, 这些推导仍然成立.

在 (6.6.51) 式中, 我们定义

$$k' = k - xyp - x(1-y)p', \tag{6.6.52}$$

$$\begin{aligned}\rho =& xm^2 + (1-x)\lambda^2 - (xy - x^2y^2)p^2 - (x - x^2 - xy + 2x^2y - x^2y^2)p'^2 \\ &+ 2x^2y(1-y)p\cdot p' \\ =& xm^2 + (1-x)\lambda^2 - (x-x^2)(yp^2 + (1-y)p'^2) - x^2y(1-y)q^2,\end{aligned} \tag{6.6.53}$$

其中, $q = p' - p$. 当 $p^2 = p'^2 = m^2$ 时, 可以把 ρ 写成

$$\rho = x^2m^2 - x^2y(1-y)q^2 + (1-x)\lambda^2 \equiv \tilde{\rho}. \tag{6.6.54}$$

注意：ρ 和 $\widetilde{\rho}$ 都是光子质量 λ 的函数：$\rho = \rho_\lambda, \widetilde{\rho} = \widetilde{\rho_\lambda}$.

下面再计算分子. 利用附录 6.6D 中的公式, 可以证明

$$\gamma^\nu(\not{a} + m)\gamma^\mu(\not{b} + m)\gamma_\nu = -2\not{b}\gamma^\mu\not{a} + 2m[(\not{a} + \not{b})\gamma^\mu + \gamma^\mu(\not{a} + \not{b})] - 2m^2\gamma^\mu. \tag{6.6.55}$$

我们令[1]

$$\begin{aligned} a =& p' - k = p' - k' - xyp - x(1-y)p' = (1 - x + xy)p' - xyp - k' \equiv \alpha - k', \\ b =& p - k = p - k' - xyp - x(1-y)p' = (1-xy)p - x(1-y)p' - k' \equiv \beta - k'. \end{aligned} \tag{6.6.56}$$

对 (6.6.45) 式先进行正常化 (减去将 λ^2 换成 λ_M^2 的项), 再平移, 得到

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu(p', p) =& (-\mathrm{i}e^2)\int \frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4} 2\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \\ &\times \left\{\gamma^\nu(\not{\alpha} - \not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{\beta} - \not{k}' + m)\gamma_\nu/(k'^2 - \rho + \mathrm{i}\epsilon)^3 - \text{regulator term}\right\}.\end{aligned} \tag{6.6.57}$$

其中, regulator term 是将 ρ_λ 换成 ρ_{λ_M} 得到的项.

我们进一步对 k' 进行 Wick 转动：$\mathrm{d}^4k' \to \mathrm{i}\mathrm{d}^4k_E$, $k'^2 \to -k_E^2$, 去掉 k_E^μ 的奇次项, 得

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu =& 2e^2\int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int \frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4} \\ &\times \left\{\gamma^\nu(\not{\alpha} - \not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{\beta} - \not{k}' + m)\gamma_\nu/[-(k_E^2 + \rho)^3] - \text{regulator term}\right\}.\end{aligned} \tag{6.6.58}$$

由 (6.6.55) 式有 $\gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu\not{k}'\gamma_\nu = -2\not{k}'\gamma^\mu\not{k}' = 2k'^2\gamma^\mu - 4\not{k}'k'^\mu$.

在积分 $\int \mathrm{d}^4k_E$ 下, $\not{k}'k'^\mu$ 中只有 $k'_\mu\gamma^\mu k'^\mu$ 项有贡献, 当 $\mu = 0$, 它相当于 $k_0^2\gamma^\mu = -k_{0E}^2\gamma^\mu$, 当 $\mu = j$, 它等于 $-k_j^2\gamma^\mu$, 所以总是等于 $-(k_E^\mu)^2\gamma^\mu$. 而 $(k_E^\mu)^2$ 在 $\int \mathrm{d}^4k_E$ 中

[1] 当 $p = p' = 0$ 时, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = k'$.

给值 $=\dfrac{k_E^2}{4}$. 因此 $\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu \not{k}' \gamma_\nu = 2k'^2\gamma^\mu - 4\not{k}' k^\mu$ 等价于 $(-k_E^2\gamma^\mu)$. 令 $\Omega^4 = 2\pi^2$ 为四维欧空的总立体角, 由 $\int \mathrm{d}^4 k_E = \dfrac{1}{2}\int k_E^2 \mathrm{d}k_E^2 \int \mathrm{d}\Omega$ 得到

$$\Lambda^\mu = 2e^2 \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{\Omega_4/2}{(2\pi)^4} \int_0^\eta k_E^2 \mathrm{d}k_E^2 \left\{ \frac{g_1 + g_2 k_E^2}{-(k_E^2+\rho)^3} - \text{regulator term} \right\}, \quad (6.6.59)$$

其中根据 (6.6.55) 式有

$$g_1 = -2\not{\beta}\gamma^\mu \not{\alpha} + 2m[\gamma^\mu(\not{\alpha}+\not{\beta}) + (\not{\alpha}+\not{\beta})\gamma^\mu] - 2m^2\gamma^\mu \quad (6.6.60)$$

$$g_2 = -\gamma^\mu. \quad (6.6.61)$$

考虑以下积分

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta z\mathrm{d}z \frac{1}{-(z+\rho)^3} &= \int_\rho^{\eta+\rho} (u-\rho)\mathrm{d}u \frac{1}{-u^3} \\
&= \int_\rho^{\eta+\rho} \left(-\frac{1}{u^2} + \frac{\rho}{u^3}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{1}{u} - \frac{\rho}{2}\frac{1}{u^2}\right)_\rho^{\eta+\rho} \\
&= -\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{\eta+\rho} - \frac{\rho}{2}\frac{1}{(\eta+\rho)^2} \xrightarrow{\eta\to\infty} -\frac{1}{2\rho},
\end{aligned} \quad (6.6.62)$$

这一项不带来发散.

$$\begin{aligned}
\int_0^\eta z^2\mathrm{d}z \frac{1}{-(z+\rho)^3} &= -\int_\rho^{\eta+\rho} (u-\rho)^2 \mathrm{d}u \frac{1}{u^3} \\
&= -\int_\rho^{\eta+\rho} \frac{(u^2 - 2u\rho + \rho^2)}{u^3}\mathrm{d}u \\
&= (-\ln u - \frac{2\rho}{u} + \frac{\rho^2}{2u^2})\Big|_\rho^{\eta+\rho} \\
&= -\ln\frac{\eta+\rho}{\rho} - \frac{2\rho}{\eta+\rho} + \frac{2\rho}{\rho} + \frac{\rho^2}{2(\eta+\rho)^2} - \frac{\rho^2}{2\rho^2} \\
&\xrightarrow{\eta\to\infty} -\ln\frac{\eta+\rho}{\rho} + \frac{3}{2},
\end{aligned} \quad (6.6.63)$$

这一项当 $\eta\to\infty$ 时有对数发散.

对 λ^2 取正常化项之后, (注意 g_1、g_2 与 λ 无关), 当 $\eta\to\infty$ 时有

$$-\left[\ln\frac{\eta+\rho_\lambda}{\rho_\lambda} - \ln\frac{\eta+\rho_{\lambda_M}}{\rho_{\lambda_M}}\right] = -\ln\left[\frac{\eta+\rho_\lambda}{\rho_\lambda}\frac{\rho_{\lambda_M}}{\eta+\rho_{\lambda_M}}\right] \xrightarrow{\eta\to\infty} -\ln\frac{\rho_{\lambda_M}}{\rho_\lambda} = \ln\rho_\lambda - \ln\rho_{\lambda_M}, \quad (6.6.64)$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
\Lambda_R^\mu &= \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\left\{-\frac{g_1}{2\rho_\lambda}+g_2\ln\rho_\lambda-(\rho_\lambda\to\rho_{\lambda_M})\right\} \\
&= \frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\left\{\frac{g_1}{2\rho_\lambda}-g_2\ln\rho_\lambda-\frac{g_1}{2\rho_{\lambda_M}}+g_2\ln\rho_{\lambda_M}\right\}.
\end{aligned} \tag{6.6.65}
$$

这个式子, 当 λ_M 有限时是有限的, 这就完成了正规化. 然而从 (6.6.53) 式可以看出, 当 $\lambda_M\to\infty$ 时还是发散的, 所以需要引进抵消项. 这就是重整化. 在 (6.6.65) 式中, g_1 和 g_2 由 (6.6.60) 式和 (6.6.61) 式给出

$$
g_1=-2\not\beta\gamma^\mu\not\alpha+2m[\gamma^\mu(\not\alpha+\not\beta)+(\not\alpha+\not\beta)\gamma^\mu]-2m^2\gamma^\mu \tag{6.6.66}
$$

$g_2=-\gamma^\mu$, 其中 α、β 是 4-矢量, 由定义式 (6.6.56) 确定

$$
\alpha=(1-x+xy)p'-xyp,\quad \beta=-x(1-y)p'+(1-xy)p. \tag{6.6.67}
$$

(1) $p=p'=0$ 时， $\alpha=\beta=0$,

$$
g_1=-2m^2\gamma^\mu. \tag{6.6.68}
$$

为了考察 Λ^μ 费米子线接外线 (p' 和 p' 在能壳上) 的情形. 我们将 $\not p'$ 移到最左边, 将 $\not p$ 移到最右边, 将其余部分用 $\not q$ 表出, 这样得到 (6.6.69) 式.

(2) 一般情形：

$$
\begin{aligned}
g_1 =&-2\{(1-x)^2\not p'\gamma^\mu\not p-(1-xy)(1-x)\not q\gamma^\mu\not p+(1-x)(1-x+xy)\not p'\gamma^\mu\not q \\
&-(1-xy)(1-x+xy)\not q\gamma^\mu\not q\} \\
&+2m[2(1-x)\not p'-(1-2xy)\not q]\gamma^\mu+2m\gamma^\mu[2(1-x)\not p \\
&+(1-2x+2xy)\not q]-2m^2\gamma^\mu.
\end{aligned} \tag{6.6.69}
$$

(3) 当取 $p^2=p'^2=m^2$ 时, 由于分母 $\rho=\tilde\rho$ 对于 $y\longrightarrow 1-y$ 对称, $g_1(y)$ 可取为 $\dfrac{1}{2}[g_1(y)+g_1(1-y)]=\tilde g_1$.

$$
\begin{aligned}
\tilde g_1 =&-2(1-x)^2\not p'\gamma^\mu\not p+(1-x)(2-x)(\not q\gamma^\mu\not p-\not p'\gamma^\mu\not q) \\
&+2(1-x+x^2y(1-y))(\not q\gamma^\mu\not q) \\
&+4m(1-x)(\not p'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not p)-2m(1-x)[\not q\gamma^\mu-\gamma^\mu\not q]-2m^2\gamma^\mu,
\end{aligned} \tag{6.6.70}
$$

其中, $q=p'-p$. 详细推导请参看附录 6.6B.

(6.6.70) 式形式复杂. 为了应用方便, 我们计算 $\bar u(\vec{p'},s')\tilde g_1 u(\vec p,s)$, (在以下推导中我们略去 $\bar u$ 和 u 中的自旋指标), 利用 $\bar u(\vec{p'})\not p'=\bar u(\vec{p'})m$, $\not p u(\vec p)=mu(\vec p)$, (由 (3.1.30)

式并利用 (3.3.27) 式得到关于 $\bar{u}$ 的式子. 注意这时 p' 和 p 在能壳上, 由 $\vec{p'}$ 和 $\vec{p}$ 就能定出 p'_0 和 p_0), 将 (6.6.70) 中的 $\not{q}\gamma^\mu\not{q}$ 写成 $\not{q}(-\not{q}\gamma^\mu+[\gamma^\mu,\not{q}]_+)=-q^2\gamma^\mu+2\not{q}q^\mu$, 再由 $\bar{u}(\vec{p'})\not{q}u(\not{p})=0$ 得

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p'})\tilde{g}_1u(\vec{p})=&\bar{u}(\vec{p'})\gamma^\mu u(\vec{p})[m^2(-2(1-x)^2-2+8(1-x))-2q^2(1-x+x^2y(1-y))]\\&+\bar{u}(\vec{p'})(\not{q}\gamma^\mu-\gamma^\mu\not{q})u(\vec{p})[m(1-x)(2-x)-2m(1-x)]+0\\=&\bar{u}(\vec{p'})\gamma^\mu u(\vec{p})[m^2(4-4x-2x^2)-2q^2(1-x+x^2y(1-y))]\\&+\bar{u}(\vec{p'})(\not{q}\gamma^\mu-\gamma^\mu\not{q})u(\vec{p})[-mx(1-x)].\end{aligned}\tag{6.6.71}$$

下面我们考虑发散的抵消项. 从 (6.6.53) 式

$$\rho_\lambda=xm^2+(1-x)\lambda^2-(x-x^2)(yp^2+(1-y)p'^2)-x^2y(1-y)q^2$$

可以看出 (6.6.65) 式中的发散项 $=\dfrac{\mathrm{e}^2}{8\pi^2}\gamma^\mu\displaystyle\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\ln\rho_{\lambda_M}\propto\gamma^\mu$.

因此, 我们需要引进一个与 γ^μ 成正比的抵消项 $C\gamma^\mu$. 最简单的办法是将抵消项定为 $-\Lambda_R^\mu(0,0)\sim\gamma^\mu$. 但是传统的做法是当 $p^2=m^2$ 时要求抵消项 $Z'_2\gamma^\mu$ 满足

$$\bar{u}(\vec{p})(\Lambda_R^\mu(p,p)+Z'_2\gamma^\mu)u(\vec{p})\equiv\bar{u}(\vec{p})\tilde{\Lambda}_R^\mu(p,p)u(\vec{p})=0.\tag{6.6.72}$$

在添加了这样的抵消项之后, 只要在出现顶角修正图的地方就会同时出现抵消项, 使得有圈图修正的顶角 $\Gamma^\mu(p',p)\equiv\gamma^\mu+\tilde{\Lambda}^\mu(p',p)$ 满足

$$\lim_{\vec{p'}\to\vec{p}}\bar{u}(\vec{p'})\Gamma^\mu u(\vec{p})=\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p})$$

这里 $p'^2=p^2=m^2$. 也就是说当在能壳上的电子在受到一个光子的很小作用时 (q 很小) 顶角 Γ^μ 的作用与 γ^μ 一样.

注意: 这正是实际测量电子电荷 e 的时候设定的条件, 因为我们认为电子形成的电流是 $J^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, 这一点正好能满足 (详见附录 6.7B 中“注意”项).

下面我们推导 Z'_2 与截断参量 λ_M 的关系. 由 (6.6.69) 式

当 $p^2=m^2$, $p'=p$ 时我们有 $q=0$, 得

$$\bar{u}(\vec{p})g_1(p,p)u(\vec{p})=\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p})m^2(4-4x-2x^2).\tag{6.6.73}$$

当 $p^2=m^2$,$p'=p$,$\rho_\lambda=x^2m^2+(1-x)\lambda^2$, 由 (6.6.65) 式得

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{p})\Lambda_R^\mu(p,p)u(\vec{p})=&\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p})\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1x\mathrm{d}x\left\{\frac{(2-2x-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}\right.\\&\left.+\ln(x^2m^2+(1-x)\lambda^2)\right\}-(\lambda^2\to\lambda_M^2).\end{aligned}\tag{6.6.74}$$

因此, Z_2' 为

$$
\begin{aligned}
Z_2' = & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\left\{\frac{(2-2x-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}+\ln(x^2m^2+(1-x)\lambda^2)\right\}-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\\
&\sim -\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\ln(x^2+(1-x)\frac{\lambda_M^2}{m^2})\sim -\frac{e^2}{16\pi^2}\ln\lambda_M^2.
\end{aligned}
\tag{6.6.75}
$$

我们注意到, Z_2' 是与 p 的选择无关的, 也与顶角指标 μ 无关. 与 (6.6.44) 式

$$
\begin{aligned}
Z_2 = & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x(1-x)\left\{\frac{2x(1+x)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}+\ln(x^2m^2+(1-x)\lambda^2)\right\}\\
&-(\lambda^2\to\lambda_M^2)
\end{aligned}
\tag{6.6.76}
$$

相比, 通过分部积分我们发现 $Z_2'=Z_2$, 证明如下. 令 $\mu^2=\dfrac{\lambda^2}{m^2}$, 得

$$
\begin{aligned}
Z_2'-Z_2 = & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\{\frac{(2x-2x^2-x^3)-2x(1-x^2)}{x^2+(1-x)\mu^2}\\
&+\ln(x^2+(1-x)\mu^2)(2x-1)\}-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\\
= & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\left\{\mathrm{d}x\frac{(2x-2x^2-x^3)-2x(1-x^2)}{x^2+(1-x)\mu^2}\right.\\
&\left.+\mathrm{d}(x^2-x)\ln(x^2+(1-x)\mu^2)\right\}-(\lambda^2\to\lambda_M^2).
\end{aligned}
\tag{6.6.77}
$$

第二部分积分为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}(x^2-x)\ln(x^2+(1-x)\mu^2)\\
&=(x^2-x)\ln(x+(1-x)\mu^2)|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x(x^2-x)\frac{2x-\mu^2}{x^2+(1-x)\mu^2},
\end{aligned}
\tag{6.6.78}
$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
Z_2'-Z_2 = & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{\frac{-2x^2+x^3-2x^3+2x^2+(x^2-x)\mu^2}{x^2+(1-x)\mu^2}\right\}-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\\
= & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{\frac{-x^3+(x^2-x)\mu^2}{x^2+(1-x)\mu^2}\right\}-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\\
= & \frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(-x)-(\lambda^2\to\lambda_M^2)=0.
\end{aligned}
\tag{6.6.79}
$$

由于在 $\Lambda_R^\mu(p',p)$ 中的紫外发散部分 $\sim\dfrac{\gamma^\mu e^2}{16\pi^2}\ln\lambda_M^2$. 原来的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 中顶角是 $-e\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu$, 现在要增添的顶角是它的 $(+Z_2')$ 倍. 在 $\Delta\mathscr{L}_I$ (或 $-\Delta\mathscr{H}_I$) 中要添加的算子是

$$
\Delta\mathscr{L}_I=-eZ_2'\bar\psi\gamma^\mu\psi A_\mu. \tag{6.6.80}
$$

对于 (6.6.72) 式重整化条件 (即传统的 QED 的顶角修正的重整化条件), 由 (6.6.65) 式、(6.6.54) 式、(6.6.71) 式、(6.6.61) 式及 (6.6.75) 式, 顶角修正为

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda}_R^\mu(p',p) =& \Lambda_R^\mu(p',p) + Z_2'\gamma^\mu \\
=& \frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\left\{\frac{g_1(x,y)_{p',p}}{2[x^2m^2 - x^2y(1-y)q^2 + (1-x)\lambda^2]}\right. \\
& \left. -\gamma^\mu\frac{(2-2x-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2} + \gamma^\mu \ln\left(\frac{x^2m^2 - x^2y(1-y)q^2 + (1-x)\lambda^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}\right)\right\} \\
& - \underbrace{(\lambda^2 \to \lambda_M^2)}_{\text{当}\lambda_M^2\to\infty\text{时, 此项}\to 0}.
\end{aligned} \tag{6.6.81}
$$

顶角修正 $\lim_{\lambda_M\to\infty}\widetilde{\Lambda}_R^\mu(p',p) = \widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)$ 是有限值, 与截断参量 λ_M 无关. 在此, 我们不细算其结果 (可以用积分表达).

下面考虑在 $p'^2 = p^2 = m^2$ 时关于 $\bar{u}(\vec{p}\,')\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)u(\vec{p})$ 的计算. 我们有 $\bar{u}(\vec{p'})\not{p}\,' = m\bar{u}(\vec{p'})$, $\not{p}u(\vec{p}) = mu(\vec{p}), p'^2 = p^2 = m^2$. 对于满足 (6.6.72) 式的重整化条件的 $\widetilde{\Lambda}^\mu$, 由 (6.6.70) 式和 (6.6.71) 式, 并注意到 $\not{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{q} = [q_\nu\gamma^\nu, \gamma^\mu] = 2\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, 由 (6.6.71) 式, 我们得到, 当 $p'^2 = p^2 = m^2$ 时,

$$
\begin{aligned}
& \bar{u}(\vec{p'})g_1u(\vec{p}) \\
=& \bar{u}(\vec{p'})\tilde{g}_1u(\vec{p}) \\
=& \bar{u}(\vec{p'})\gamma^\mu u(\vec{p})\{m^2(4-4x-2x^2) - 2q^2[1-x+x^2y(1-y)]\} \\
& + m\bar{u}(\vec{p'})(\not{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{q})u(\vec{p})\big[-mx(1-x)\big] + 0 \\
=& \bar{u}(\vec{p'})\gamma^\mu u(\vec{p})\{4m^2(1-x-x^2/2) - 2q^2[1-x+x^2y(1-y)]\} \\
& - mx(1-x)\bar{u}(\vec{p'})(2\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu})u(\vec{p})q_\nu,
\end{aligned} \tag{6.6.82}
$$

由 (6.6.81) 式给出

$$
\begin{aligned}
& \bar{u}(\vec{p'})\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)u(\vec{p}) \\
=& \frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\left\{\frac{2m^2(1-x-\frac{x^2}{2}) - q^2[1-x+x^2y(1-y)]}{x^2m^2 - x^2y(1-y)q^2 + (1-x)\lambda^2}\right. \\
& \left. -\frac{2m^2(1-x-\frac{x^2}{2})}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2} + \ln\left(\frac{x^2m^2 - x^2y(1-y)q^2 + (1-x)\lambda^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}\right)\right\}\bar{u}(\vec{p'})\gamma^\mu u(\vec{p})
\end{aligned}
$$

$$+\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\left\{\frac{(\mathrm{i}m)x(1-x)q_\nu}{x^2m^2-x^2y(1-y)q^2+(1-x)\lambda^2}\right\}\bar{u}(\vec{p'})\sigma^{\mu\nu}u(\vec{p})$$
$$-\underbrace{(\lambda^2\to\lambda_M^2)}_{\text{当}\lambda_M^2\to\infty\text{时, 此项}\to 0}$$
$$\equiv \bar{u}(\vec{p'})[\gamma^\mu(F_1(q^2)-1)+\frac{\mathrm{i}\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)]u(\vec{p})-(\lambda^2\to\lambda_M^2). \tag{6.6.83}$$

当 $q\to 0$ 时, 第二项为 (取 $\lambda^2\to 0$)

$$\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}y\frac{2(1-x)}{1-y(1-y)q^2/m^2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2m}\right)\bar{u}(\vec{p'})\sigma^{\mu\nu}u(\vec{p})q_\nu$$
$$=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}y\frac{1}{1-y(1-y)q^2/m^2}\left[\frac{\mathrm{i}}{2m}\bar{u}(\vec{p'})\sigma^{\mu\nu}u(\vec{p})q_\nu\right] \tag{6.6.84}$$
$$\stackrel{q\to 0}{\to}\frac{e^2}{8\pi^2}\left[\frac{\mathrm{i}}{2m}\bar{u}(\vec{p'})\sigma^{\mu\nu}u(\vec{p})q_\nu\right]\Rightarrow\frac{\alpha}{2\pi}\frac{1}{2m}\partial_\nu(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi).$$

其中, $\psi=u(\vec{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$, $\bar{\psi}=\bar{u}(\vec{p'})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'x}$, $\alpha=\dfrac{\mathrm{e}^2}{4\pi}$. (6.6.84) 式给电子的自旋引起的电磁矩带来修正, 说明如下.

考虑电子的流 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. 由 Dirac 方程 $(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-eA\!\!\!/-m)\psi=0$, $\bar{\psi}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}-eA\!\!\!/-m)=0$, 我们得到

$$\psi=\frac{1}{m}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-eA\!\!\!/)\psi,\quad \bar{\psi}=\bar{\psi}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}-eA\!\!\!/)\frac{1}{m}, \tag{6.6.85}$$

$$j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi=\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-eA\!\!\!/)\psi+\bar{\psi}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial\!\!\!/}-eA\!\!\!/)\gamma^\mu\psi\right\}$$
$$=\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}(\gamma^\mu\mathrm{i}\gamma^\nu\partial_\nu-e\gamma^\mu\gamma^\nu A_\nu)\psi+\bar{\psi}(-\mathrm{i}\gamma^\nu\overleftarrow{\partial_\nu}\gamma^\mu-e\gamma^\nu A_\nu\gamma^\mu)\psi\right\}$$
$$=\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}g^{\mu\nu}(\mathrm{i}\partial_\nu-eA_\nu)\psi+\bar{\psi}g^{\mu\nu}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial_\nu}-eA_\nu)\psi\right\}$$
$$+\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\nu-\frac{e}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)A_\nu\right]\psi\right.$$
$$\left.+\bar{\psi}\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)\overleftarrow{\partial}_\nu+\frac{e}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu)A_\nu\right]\psi\right\}$$
$$=\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial^\mu-eA^\mu)\psi+\bar{\psi}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial^\mu}-eA^\mu)\psi\right\}+\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}(\overleftarrow{\partial}_\nu+\overrightarrow{\partial}_\nu)\psi\right\}$$
$$=\frac{1}{2m}\left\{\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial^\mu-eA^\mu)\psi+\bar{\psi}(-\mathrm{i}\overleftarrow{\partial^\mu}-eA^\mu)\psi\right\}+\frac{1}{2m}\partial_\nu\left(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\right). \tag{6.6.86}$$

第一项 $\sim \rho v^{\mu}$ 是一般自旋为 0 的粒子的流, 而第二项是由自旋带来的流, 代表由电子的磁矩和电矩引起的项. 由前面所计算的量子修正, 修正项为 $\frac{1}{2m}\frac{\alpha}{2\pi}$, 总共是 $\frac{1}{2m}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$. 因而电子的电磁矩常数为 $\mu=1+\frac{\alpha}{2\pi}$. 修正项称为 Schwinger 修正, 这是单圈图修正.

下面列出由多圈图给出的电子和 μ 粒子的 $\mu-1$ 的理论值与实验值比较, 实验值为

$$
\begin{gathered}
(\mu-1)^{e^-}_{\text{exp}}=1159652200(\pm 40)\times 10^{-12}, \quad (\mu-1)^{e^+}_{\text{exp}}=1159652222(\pm 50)\times 10^{-12}, \\
(\mu-1)^{\mu^-}_{\text{exp}}=11659370(\pm 120)\times 10^{-10}, \quad (\mu-1)^{\mu^+}_{\text{exp}}=11659110(\pm 110)\times 10^{-10}, \\
\alpha^{-1}_{\text{exp}}=137.035963(\pm 13) \qquad (\text{由 Josephson 结的实验测定}),
\end{gathered}
\tag{6.6.87}
$$

而理论值为

$$
\begin{aligned}
(\mu-1)^{e^\pm}_{\text{th}} &= 0.5\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)-0.328478966\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2+1.1765(\pm 13)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3+(-0.8\pm 2.5)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \\
&= 1159652460(\underbrace{\pm 127}_{\text{由于}\alpha}\quad\underbrace{\pm 75}_{\text{计算误差}})\times 10^{-12}, \\
(\mu-1)^{\mu^\pm}_{th} &= 11659202(\pm 20)\times 10^{-10}.
\end{aligned}
\tag{6.6.88}
$$

量子场论的结果 $\mu-1$ 与实验符合程度在电子达到 7 位有效数字, 如果考虑到 μ 原来的值, $\mu=(\mu-1)+1$, 则为 9 位有效数字!

在实际测量中, 方法是把电子放在 z 方向的磁场 B_z 中与经典图像一样, 电子有轨道角动量 l_z. 测定电子的轨道角动量 l_z 以及自旋角动量 s_z 给出的磁矩与 B_z 相互作用的能量, 它们给出一些能级. 当 Schwinger 的量子辐射修正不考虑时, 按狄拉克的理论, 磁矩 $\mu_z=\frac{e}{2m}(l_z+2s_z)$, 因此有许多能级对 l_z 以及 s_z 是简并的. 比如 $l_z=2,\ s_z=-\frac{1}{2}$ 和 $l_z=0,\ s_z=\frac{1}{2}$ 时磁矩 μ_z 相等, 因此能量应该相同. 而在量子辐射修正考虑进去之后, 这两种态能量就不相等了. 测量正是测出这个差别, 因此相对精密度很高. 虽然 m 和 e 的相对精密度只能达到 10^{-8}, 测出的 $\mu-1$ 的相对精密度为 10^{-7}, 所以 μ 的精密度为 10^{-9}, 比 m 和 e 的精密度都高.

6.6.4 单圈图重整化总结

总结以上单圈图的重整化, 我们列出表 6.6.3.

在这张图表中 Z_0、Z_1、Z_2、Z_2' 都是 e^2 量级, 原来的拉格朗日量密度是 (4.1.3) 式, 取 $\alpha=-\frac{1}{2}$,

表 6.6.3

图	符号	添加 $\Delta\mathscr{L}_I$ 项
(真空极化图: μ, ν, k)	$\Pi^{\mu\nu}(k)$	$-Z_0(A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu - A_\mu g^{\mu\nu}\partial^2 A_\nu)\overset{\text{积分下}}{\sim}(-Z_0/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$
(电子自能图: p)	$-\mathrm{i}\Sigma(\not p)$	$Z_1\overline{\psi}(x)\psi(x) + Z_2\overline{\psi}(x)(\mathrm{i}\not\partial - m)\psi(x)$
(顶角图: p', γ^μ, μ, x, p)	$\Lambda^\mu(p', p)$	$-eZ_2'\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$

$$\mathscr{L}_0 = \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(\mathrm{i}\not\partial - m)\psi}_{\mathscr{L}_0} + \underbrace{\bar{\psi}(-e\not A)\psi}_{\mathscr{L}_I} - \frac{1}{2}\underbrace{(\partial^\mu A_\mu)^2}_{\mathscr{L}_{gf}}, \tag{6.6.89}$$

在加上抵消项 $\Delta\mathscr{L}_I$ 后变为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I + \mathscr{L}_{gf} + \Delta\mathscr{L}_I \\ &= -\frac{1}{4}(1+Z_0)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (1+Z_2)\bar{\psi}(\mathrm{i}\not\partial - m)\psi \\ &\quad + Z_1\bar{\psi}\psi + (-e)(1+Z_2')\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(x) - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2.\end{aligned} \tag{6.6.90}$$

注意: 在这个式子中, 我们要特别强调的是, 虽然 Z_i 在数学上是一些依赖于截断参量的发散量 (当 $\Lambda\to\infty$ 时, $Z_i\to\infty$), 但是从物理的角度来看, 由于物理上一定存在一个截断机制, 只是我们还不太清楚, 而且当截断时能量不太大时, Z_i 实际上是一些小量, 它们远小于 1. 因此, 在今后计算中, 我们总是把它们当做小量看待, 与其说它们是发散的不如说它们是数值不清楚的小量, 重整化理论所追求的是与这些量的具体值无关的结果.

我们改写符号, 令 $1+Z_0 = Z_A$, $1+Z_2 = 1+Z_2' = Z_\psi$, $m(1+Z_2) - Z_1 = Z_m$ 得到

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}Z_A F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + Z_\psi\bar{\psi}(\mathrm{i}\not\partial - e\not A)\psi - Z_m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2. \tag{6.6.91}$$

虽然这是由单圈图重整化得到的, 从下面的证明中我们会看到, 这个形式对多圈图重整化同样适用. 在形式上 (6.6.90) 式与 (6.6.89) 式相同, 只是系数改变了. 它的系数包含 e^2 量级的“发散”项. 这个拉格朗日量, 它的二阶以下微扰都是有限的, 我们可以将它与实验比较, 发现与实验符合得很好.

证明: 由于 (6.5.4) 式是真空极化图的普遍形式, 当取重整化条件 (6.6.21) 式, 即 (6.6.24) 式时总是给出抵消项 (6.6.27) 式, (6.5A.8) 式是电子自能图的普遍形式, 当取重整化条件 (6.6.36) 式, 即 (6.6.40) 式时总是给出 (6.6.43) 式形式的抵消项. 当

顶角修正图规定条件 (6.6.72) 式为重整化条件时, 我们就得到 (6.6.80) 式. 这也是对顶角修正图普遍适用的. 再由于 Ward 恒等式给出的 (6.7.20) 式, 使 $Z_2 = Z_2'$ 普遍成立. 从而对于多圈图的重整化, (6.6.91) 式也普遍成立. 类似地, 由于有 (6.7.22) 式, 因而对于以 $p' = p = 0$ 为重整化点的方案, 同样有 $Z_2 = Z_2'$, 所以上述结论也成立.

由 (6.6.79) 式可以看出：电子自能项的抵消常数 Z_2 和顶角修正中的抵消常数 Z_2' 的紫外发散项相同：$Z_2 \sim Z_2' \sim \dfrac{-e^2}{16\pi^2}(\ln \lambda_M^2)$, 这是 Ward 恒等式的一个结果.

在引入拉格朗日密度 $\mathscr{L}_0$ 时, 我们要求它的形式能给出自由光子场和自由电子场的运动方程. 它的系数的确定则要求由它导出的哈密顿密度 $\mathscr{H}_0$ 与能量密度一致, 并且在量子化之后给出正确的振子叠加形式. 因此 $\mathscr{L}_0$ 中的 A_μ, ψ_α 是测量到的物理场. 在考虑相互作用后, 自然会出现发散困难. 因此要用正常化手续把动量积分截断或者其他方法使费恩曼积分做一些修正, 使积分变为有限 (这在物理中肯定会出现截断机制的, 只是我们不会知道它的具体方式而已). 然而当截断参量趋于无穷时费恩曼积分还是发散的. 我们接着采取在拉格朗日密度中添加微扰项, 即抵消项的方法使费恩曼积分变得有限, 这就是重整化. 抵消项的系数是与截断参量有关的. 当截断参量趋于无穷时, 这些抵消项的系数也趋于无穷. 计算表明, 在动量截断不是特别大的范围之内, 抵消项系数还是很小的, 因此可以在重整化计算中当作小量来处理, 只是我们不知道它们的具体数值而已.

在重整化之后, 拉格朗日密度就变为

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{1}{4} Z_A F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_\psi \bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/)\psi - Z_m \bar{\psi}\psi - \frac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 \\
&\equiv -\frac{1}{4} Z_A F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_\psi \bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m' - e'\sqrt{Z_A}A\!\!\!/)\psi - \frac{\lambda'}{2}(\partial^\mu \sqrt{Z_A} A_\mu)^2. \qquad (6.6.92)
\end{aligned}
$$

在 (6.6.92) 式中, $m' = \dfrac{Z_m}{Z_\psi}$, $e' = \dfrac{e}{\sqrt{Z_A}}$. 这个式子的规范固定项为 $-\dfrac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$, 相当于 (4.1.3) 式中 $\alpha = -\dfrac{\lambda}{2}$[而在 (6.6.90) 式取 $\lambda = 1$]. 这样会使光子的费恩曼传播子变为 (见附录 6.7C)

$$
D_{F\mu\nu}(k,\lambda) = \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu} + \dfrac{\mathrm{i}(\lambda-1)}{\lambda} k_\mu k_\nu/(k^2 + \mathrm{i}\epsilon)}{k^2 + \mathrm{i}\epsilon},
$$

在重整化后又会使 λ 变为 λ', 由于规范不变性, 这个改变对散射振幅 (S 矩阵元) 没有影响. 另外, 在这个式子中, Z_A, Z_ψ 在处理中都认为是很接近于 1 的, 虽然它们都是发散量. 我们可以认为这个形式是量子电动力学拉格朗日密度的原始形式. 这个形式在用重整化条件 (6.6.24) 式、(6.6.36) 式、(6.6.72) 适当地划分为自由部分与相互作用部分之后, 由微扰计算就可以得到我们的结果.

换句话说, 如果我们用原始参量 m', e' 并且用拉格朗日量 (6.6.92) 式做微扰论计算, 就会使得到的结果与用 m, e 作参量并引入抵消项的 (重整化后的) 结果相一致.

再令 $\psi' = \sqrt{Z_A}\psi$, $A'_\mu = \sqrt{Z_A}A_\mu$, 进一步得到

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \bar{\psi}'(\mathrm{i}\not{\partial} - m' - e'\not{A}')\psi' - \frac{\lambda'}{2}(\partial^\mu A'_\mu)^2. \tag{6.6.93}$$

这个形式就与引进抵消项以前的形式一样了. (6.6.93) 式给出的结果与 (6.6.90) 式、(6.6.91) 式的结果由于 Z_A、Z_ψ 的存在会造成传播子和多点函数系数上的 (scale 上的) 差别, 因此两种拉格朗日量密度的结果会有与这两个发散量有关的系数的差别, 所以我们还是认定 ψ, A_μ 才是物理上可测的场.

在物理上, 我们作这样的解释. 场量 A'_μ, ψ'_α 称为原始场量或裸场量, 是不可测量的. m', e' 称为原始质量和电荷或称为裸质量与裸电荷, 也是不可测量的. 这些不可测量的量与可测量的量之间的关系与截断参量有关. 而 A_μ, ψ_α, $e = \sqrt{Z_A}e'$, $m = m' + \delta m$ 则是与实际测量结果相关的物理量. 其中根据计算

$$\delta m = \frac{Z_1}{Z_\psi} = \frac{Z_1}{1+Z_2},$$

我们通过重整化手续得到可以实测的有限量 $\tilde{\pi}^{\mu\nu}$, $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Lambda}^\mu$, 它们是相关动量以及 m 和 e 的函数. 在 6.6.3 节和附录 6.7B 的“注意”中, 我们说明了这些 m 和 e 对于给定的重整化条件

$$\tilde{\Sigma}_R(\not{p})|_{\not{p}=m} = \frac{\partial}{\partial\not{p}}\tilde{\Sigma}_R(\not{p})|_{\not{p}=m} = 0$$

以及

$$\bar{u}(\vec{p})\Gamma^\mu(p,p)u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu(p,p)u(\vec{p}), \quad m^2 = p^2,$$

就是实际测得的电子质量和电荷.

以上结果对多圈图重整化也正确.

附录 6.6A　光子 $\Delta\mathscr{L}_I$ 的计算

我们有

$$k^2 = k_\mu k^\mu = k^\mu k^\nu g_{\mu\nu},$$

$$
\begin{aligned}
& k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu} \\
& = k^\mu k^\nu - k^{\mu'} k^{\nu'} g_{\mu'\nu'} g^{\mu\nu} \\
& \Rightarrow -(\partial^\mu \partial^\nu A_\mu) A_\nu + (\partial^\lambda \partial_\lambda A_\mu) A_\nu g^{\mu\nu} \quad (\text{对 } \mu\nu \text{ 不求和}) \\
\text{在积分下} & \Rightarrow : \partial^\nu A_\mu \partial^\mu A_\nu : - : \partial^\lambda A_\mu \partial_\lambda A_\nu g^{\mu\nu} : \quad (\text{对 } \mu\nu \text{ 不求和}) \\
& \equiv \varphi^{\mu\nu} = \varphi^{\nu\mu},
\end{aligned} \tag{6.6A.1}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = & (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
= & \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu \\
& - (\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu) \\
= & 2(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu) - 2(\partial^\nu A_\mu \partial^\mu A_\nu) \quad (\text{对 } \mu\nu \text{ 求和}).
\end{aligned} \tag{6.6A.2}
$$

以上推导, 用到

$$
\alpha^\nu \beta_\nu = \alpha_\nu \beta^\nu \quad (\text{不求和}):
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu<\nu} \varphi^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_\mu \varphi^{\mu\mu} = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\mu<\nu} 2\varphi^{\mu\nu} + \sum_\mu \varphi^{\mu\mu} \right\} \\
= & \frac{1}{2} \{ 2\varphi^{01} + 2\varphi^{02} + 2\varphi^{03} + 2\varphi^{12} + 2\varphi^{13} \\
& + 2\varphi^{23} + \varphi^{00} + \varphi^{11} + \varphi^{22} + \varphi^{33} \} \\
= & \frac{1}{2} \{ \varphi^{01} + \varphi^{10} + \varphi^{02} + \varphi^{20} + \ldots + \varphi^{00} + \ldots \} \\
= & \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu},
\end{aligned}
$$

($\varphi^{\mu\mu}$ 项前面有系数 $\frac{1}{2}$, 是因为这个顶角的两根外线是等价的, 在费恩曼图中一般地会出现 2! 因子, 正像 ϕ^4 理论中出现的 4! 因子一样)

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} = & \sum_{\mu\nu} \{ \partial^\nu A_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial^\lambda A_\mu \partial_\lambda A^\mu \} \\
= & -\frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},
\end{aligned}
$$

$$
\Delta\mathscr{L}_I(x) = +Z_0 \left(\sum_{\mu<\nu} \varphi^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_\mu \varphi^{\mu\mu} \right) = \frac{Z_0}{2} \sum_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} = -\frac{Z_0}{4} \sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{6.6A.3}
$$

考虑到 (6.5.4) 式, 我们发现这是任意阶真空极化图的一般形式, 一般地

$$
\Delta\mathscr{L}_I(x)_{\text{真空极化}} = -\frac{1}{4} Z_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{6.6A.4}
$$

附录 6.6B　g_1 的计算过程

由

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}\,\mathrm{II}, \tag{6.6B.1}$$

(6.6.60) 式给出

$$g_1 = -2\not{\beta}\gamma^\mu\not{\alpha} + 2m[(\not{\alpha}+\not{\beta})\gamma^\mu + \gamma^\mu(\not{\alpha}+\not{\beta})] - 2m^2\gamma^\mu. \tag{6.6B.2}$$

公式 $\alpha = (1-x+xy)p' - xyp, \quad \beta = -x(1-y)p' + (1-xy)p$ 可以写成

$$\begin{aligned}\alpha &= (1-x+xy)(q+p) - xyp = (1-x)p + (1-x+xy)q,\\ \beta &= -x(1-y)p' + (1-xy)(p'-q) = (1-x)p' - (1-xy)q,\end{aligned}$$

并有

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= (1-x+xy-x+xy)p' + (1-xy-xy)p\\ &= (1-2x+2xy)p' + (1-2xy)p\\ &= 2(1-x)p' - (1-2xy)q\\ &= 2(1-x)p + (1-2x+2xy)q,\end{aligned}$$

从而得到 (使 γ^μ 左边为 p' 与 q 的线性组合, 右边为 p 与 q 的线性组合)

$$\begin{aligned}g_1 = &-2\{(1-x)^2\not{p}'\gamma^\mu\not{p} - (1-xy)(1-x)\not{q}\gamma^\mu\not{p} + (1-x)(1-x+xy)\not{p}'\gamma^\mu\not{q}\\ &-(1-xy)(1-x+xy)\not{q}\gamma^\mu\not{q}\} + 2m[2(1-x)\not{p}' - (1-2xy)\not{q}]\gamma^\mu\\ &+2m\gamma^\mu[2(1-x)\not{p} + (1-2x+2xy)\not{q}] - 2m^2\gamma^\mu.\end{aligned} \tag{6.6B.3}$$

当 $p'^2 = p^2 = m^2$ 时, 由于分母中的 ρ 对于 $y \to 1-y$ 是不变的, 因而可以取 $\tilde{g}_1 = \dfrac{g_1(y)+g_1(1-y)}{2}$ 而使积分 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \frac{\tilde{g}_1}{(k'^2-\rho+\mathrm{i}\epsilon)^3} = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{g_1}{(k'^2-\rho+\mathrm{i}\epsilon)^3}$, 其中

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1 = &-2(1-x)^2\not{p}'\gamma^\mu\not{p} + (1-x)(2-x)(\not{q}\gamma^\mu\not{p} - \not{p}'\gamma^\mu\not{q})\\ &+2(1-x+x^2y(1-y))(\not{q}\gamma^\mu\not{q})\\ &+4m(1-x)(\not{p}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{p}) - 2m(1-x)[\not{q}\gamma^\mu - \gamma^\mu\not{q}] - 2m^2\gamma^\mu\end{aligned} \tag{6.6B.4}$$

附录 6.6C　另一种抵消方案

(6.6.65) 式中 $\ln\rho_{\lambda_M}\sim\ln(\cdots(1-x)\lambda_M^2)$ 是紫外发散的, 要消去发散的 $\ln(\cdots(1-x)\lambda_M^2)$ 项, 可以用某两个固定的 p_0'、p_0 来取抵消项 $-\Lambda_R^\mu(p_0',p_0)$, 其中 p_0'、p_0 是确定的点. 最简单是取 $p_0'=p_0=0$.

令

$$\widetilde{\Lambda}_R^\mu=\Lambda_R^\mu(p',p)-\Lambda_R^\mu(\not p=\not p\,'=0)=(1-t_{p,p'}^{(0)})\Lambda_R^\mu(p',p), \tag{6.6C.1}$$

$t^{(0)}$ 是零级泰勒展开, 展开点是 $\not p=\not p\,'=0$, 此点是洛伦兹不变的. 可以证明, 当 $\lambda_M^2\to\infty$ 时, 发散项正好消去. 这时 $\rho_\lambda=xm^2+(1-x)\lambda^2, g_1=-2m^2\gamma^\mu$, 抵消项为

$$\begin{aligned}\Lambda_R^\mu(p'=p=0)=&\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\left\{\left[\frac{-m^2}{xm^2+(1-x)\lambda^2}+\ln\left(xm^2+(1-x)\lambda^2\right)\right]\right.\\&\left.-[(\lambda\to\lambda_M)]\right\}\gamma^\mu\\=&\frac{e^2}{8\pi^2}[\frac{1}{2}\ln\lambda_M^2+\text{有限数}]\gamma^\mu\\=&-Z_2'\gamma^\mu.\end{aligned} \tag{6.6C.2}$$

对于用 $p'=p=0$ 点为重整化点的计算, 当 $p'^2=p^2=m^2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Lambda}_R^\mu(p',p)\\=&\Lambda_R^\mu(p',p)+Z_2'\gamma^\mu\\=&\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\left\{\frac{\tilde{g}_1(x,y)_{p,p'}}{2(x^2m^2-x^2y(1-y)q^2+(1-x)\lambda^2)}-\frac{-m^2\gamma^\mu}{(xm^2+(1-x)\lambda^2)}\right.\\&\left.+\gamma^\mu\ln\frac{x^2m^2-x^2y(1-y)q^2+(1-x)\lambda^2}{xm^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda^2\to\lambda_M^2)\right\}.\end{aligned} \tag{6.6C.3}$$

注意, (6.6C.2) 式给出的 Z_2' 与 (6.6.75) 式给出的不同, 因为它们是由不同的重整化条件给出的. 对于以 $-\Lambda^\mu(0,0)$ 为抵消项的 $\widetilde{\Lambda}^\mu$, 由 (6.6C.3) 式和 (6.6.82) 式, 当 $\lambda_M^2\to\infty$ 时, (6.6C.3) 式中对应 λ_M^2 的项 $\to0$, 给出

$$
\begin{aligned}
&\bar{u}(\vec{p'})[\Lambda^\mu(p',p)-\Lambda^\mu(0,0)]u(\vec{p})\\
=&\bar{u}(\vec{p'})\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)u(\vec{p})\\
=&\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\left\{\left[\frac{2m^2(1-x-\dfrac{x^2}{2})-q^2(1-x+x^2y(1-y))}{x^2m^2-x^2y(1-y)q^2+(1-x)\lambda^2}\right.\right.\\
&\left.-\frac{(-m^2)}{xm^2+(1-x)\lambda^2}+\ln\frac{x^2m^2-x^2y(1-y)q^2+(1-x)\lambda^2}{xm^2+(1-x)\lambda^2}\right]\bar{u}(\vec{p'})\gamma^\mu u(\vec{p})\\
&\left.+\frac{(-\mathrm{i}m)x(1-x)\bar{u}(\vec{p'})\sigma^{\mu\nu}u(\vec{p})q_\nu}{x^2m^2-x^2y(1-y)q^2+(1-x)\lambda^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{6.6C.4}
$$

注意最后一项, 即 $\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}u(p)$ 项, 形式上这项对于两种抵消方案是相同的. 但是由于这个方案中的 m 和原来方案的 m 与实测电子质量的关系不同, 所以到这级微扰为止, 两者还是有区别的. 特别是当 $p'^2=p^2=m^2$, $p'=p$ 时, $\bar{u}(\vec{p'})\Lambda^\mu(p',p)u(p)\neq 0$, 这就决定了用这个方案, 参量 e 与实测电荷不相等. 我们可以对电子自能 $-\mathrm{i}\sum(\not{p})$ 进行以 $p=0$ 为重整化点的计算. 令

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})=&-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})|_{\not{p}=0}+\frac{\partial}{\partial\not{p}}[-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})]|_{\not{p}=0}\not{p}+[-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}_R(\not{p})]\\
\equiv& a_R+b_R\not{p}+[-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}_R(\not{p})],
\end{aligned}
\tag{6.6C.5}
$$

其中, $-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}_R(\not{p})$ 为重整化之后的电子自能, 而且有 Ward 恒等式 $\mathrm{i}b_R=Z_2=Z_2'$.

附录 6.6D　关于 γ–矩阵的计算与公式

关于 γ–矩阵的公式 (请证明它们).

(1)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(1)=4,\\
&\mathrm{tr}(\text{奇数个 }\gamma\text{ 矩阵})=0,\\
&\mathrm{tr}(\gamma_5)=\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_5)=\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5)=\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_5)=0,\\
&\mathrm{tr}(\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d})=4(a\cdot b\,c\cdot d\cdot-a\cdot c\,b\cdot d+a\cdot d\,c\cdot b),\\
&\mathrm{tr}(\gamma_5\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\,\not{d})=4\mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu=-2\not{a},\\
&\gamma_\mu\not{a}\,\not{b}\gamma^\mu=4a\cdot b\mathbb{I}=2(\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a}),\\
&\gamma_\mu\not{a}\,\not{b}\,\not{c}\gamma^\mu=-2\not{c}\,\not{b}\,\not{a},\\
&\gamma^\mu\not{a}=\gamma^\mu\gamma^\lambda a_\lambda=(-\gamma^\lambda\gamma^\mu+2g^{\lambda\mu})a_\lambda=-\not{a}\gamma^\mu+2a^\mu\mathbb{1},\\
&\not{a}\not{b}+\not{b}\not{a}=2a\cdot b\mathbb{1}.
\end{aligned}
$$

其中, $\mathbb{1}$为 4×4 单位矩阵.

(3)

$$\gamma^0=\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \gamma^i=-\gamma_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix},$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=[\gamma^\mu,\gamma^\nu]_+=2g^{\mu\nu}\mathbb{1}.$$

(4)

$\mathbb{1}$ γ^μ $\sigma^{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ $\gamma_5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$	$\gamma_5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma_5$	$\gamma_5^2=\mathbb{1}$

共 16 个线性独立矩阵.

附录 6.6E　当取重整化点为 $p=p'=0$ 的 Z_2 和 Z_2' 的比较

在取 $-\mathrm{i}\Sigma(\not p)$ 的抵消项时, 重整化点不一定要取在 $\not p=m$. 最简单的是取 $p=0$. 该点是洛伦兹不变的. 这时, Ward 恒等式给出的关系对于电子自能的发散常数 Z_2 和顶角修正的发散常数 Z_2' 的关系最清楚. 以下是相关的推导. 由 (6.6.35) 式, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Sigma_R(\not p)}{\partial\not p}=&\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x[(1-x)]\Big[\ln(-x(1-x)p^2+xm^2+(1-x)\lambda^2\Big]\\&+\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x[(1-x)\not p-2m]\left[\frac{(-)2x(1-x)\not p}{-x(1-x)p^2+xm^2+(1-x)\lambda^2}\right]\\&-(\lambda\to\lambda_M),\end{aligned}\tag{6.6E.1}$$

$$\begin{aligned}Z_2=\left.\frac{\partial\Sigma_R(\not p)}{\partial\not p}\right|_{\not p=0}&=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\Big[\ln(xm^2+(1-x)\lambda^2\Big]-(\lambda\to\lambda_M)\\&=\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\ln(x+(1-x)\frac{\lambda^2}{m^2})\\&\quad-\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\ln(x+(1-x)\frac{\lambda_M^2}{m^2}).\end{aligned}\tag{6.6E.2}$$

注意 (6.6E.2) 式给出的 Z_2 与 (6.6.44) 式不同, 因为它们是由不同的重整化条件给出的. 考虑

$$U=\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\ln(x+(1-x)\tau),\tag{6.6E.3}$$

$$Z_2 = \frac{e^2}{8\pi^2}[U(\lambda) - U(\lambda_M)].$$

另一方面, 由 (6.6C.2) 式

$$\begin{aligned}\lambda_R^\mu(p' = p = 0) = &\frac{-e^2}{8\pi^2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\bigg\{\bigg[\frac{-m^2}{xm^2 + (1-x)\lambda^2} + \ln(xm^2 + (1-x)\lambda^2)\bigg] \\ &-[(\lambda \to \lambda_M)]\bigg\}\gamma^\mu \\ = &-Z_2'\gamma^\mu.\end{aligned} \tag{6.6E.4}$$

考虑

$$V = \int_0^1 x\mathrm{d}x\bigg\{\frac{-1}{x + (1-x)\tau} + \ln(x + (1-x)\tau)\bigg\}, \tag{6.6E.5}$$

则 $Z_2' = \dfrac{e^2}{8\pi^2}[V(\lambda) - V(\lambda_M)]$. 得到

$$U - V = \int_0^1 \mathrm{d}x(1-2x)\ln(x + (1-x)\tau) + \int_0^1 \mathrm{d}x\frac{x}{x + (1-x)\tau} \equiv A + B,$$

其中, $A = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}(x - x^2)\ln(x + (1-x)\tau)$, 分部积分得

$$A = -\int_0^1 \mathrm{d}x\frac{(1-\tau)(x-x^2)}{x + (1-x)\tau} + \underbrace{(x - x^2)\ln(x + (1-x)\tau)}_{=0}\bigg|_0^1.$$

我们得到

$$A + B = U - V = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad \text{是常数, 与}\lambda^2\text{或者}\lambda_M^2\text{无关.} \tag{6.6E.6}$$

因此, 有 $U(\lambda) - U(\lambda_M) = V(\lambda) - V(\lambda_M)$,

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}}(\Sigma_R(\not{p}))\bigg|_{\not{p}=0} \cdot \gamma^\mu = -\Lambda_R^\mu(p' = p = 0). \tag{6.6E.7}$$

这个结果是由于以下事实. 考虑单圈图的顶角修正 (6.6.45) 式和电子自能单圈图 (6.6.28) 式, 可以证明

$$(p'_\mu - p_\mu)\Lambda_R^\mu(p', p) = \mathrm{i}\Big\{-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p}) - [-\mathrm{i}\Sigma_R(\not{p}\,')]\Big\}. \tag{6.6E.8}$$

将上式两边在 $p' = p = 0$ 点对 p'_μ 取偏微商, 给出

$$\Lambda_R^\mu(p' = p = 0) = -\frac{\partial}{\partial p'_\mu}\Sigma_R(\not{p}\,')\bigg|_{p'=0} \tag{6.6E.9}$$

由 (6.5A.7) 式

$$\Sigma_R(\not{p}') = \not{p}' f^1(p'^2) + I f^0(p'^2) = \gamma^\mu p'_\mu f^1(p'^2) + f^0(p'^2), \tag{6.6E.10}$$

得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p'_\mu}\Sigma_R(\not{p}')\Big|_{p'=0} &= \gamma^\mu f^1(0) + \not{p}' f^{1'}(0)(2p'^\mu)\Big|_{p'=0} + I f^{0'}(0)2p'^\mu\Big|_{p'=0}, \\ &= \gamma^\mu f^1(0) = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \not{p}'}\Sigma_R(\not{p}')\Big|_{p'=0},\end{aligned} \tag{6.6E.11}$$

所以 (6.6E.7) 式必须成立. (6.6E.8) 式是 Ward 恒等式的一种最简单形式.

从附录 6.6C, 附录 6.6E 我们看到, 以 $\not{p} = 0$ 为重整化点进行单圈自能图和顶角修正图的重整化也是可行的, 它们也满足 Ward 恒等式. 但是这种方案中的参量 e, m 不能代表测量得到的电子电荷和电子质量. 它们的 ψ 和 A_μ 也与实测的场差一个有限数值因子. 因此, 传统上不采用这种方案.

附录 6.6F　电子自能和顶角修正的一般形式

考虑一根开放的电子线, 入射动量为 p. 其上有顶角 $\gamma^{\mu_1}, \cdots$, 一些顶角是开放的 (即其上的光子线是外线), 另一些顶角连接一些费米子圈, 费米子圈又可以连接另一些费米子圈, 费米子圈上也有些是开放的顶角, $\gamma^{\nu_1}, \cdots$. 注意, 只有一根开放的电子线, 其余电子线都形成费米子圈. 它们互相连接为一张正规图 (见图 6.6F.1).

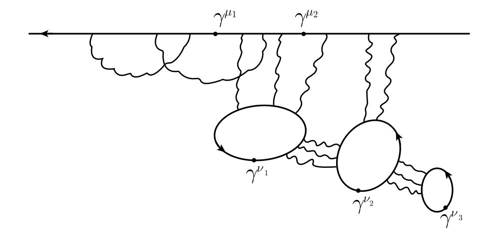


图 6.6F.1

我们假定开放顶角上的输入外动量都为零.

我们用费恩曼参数化公式计算这张图相应的费恩曼积分. 分母可以对各个 k(积分参量) 进行正交化, 使之成为

$$(a_1 k_1^2 + a_2 k_2^2 + \cdots + p \cdot (k_i\text{的线性组合}) + c)^m.$$

而积分变元变为 $\int \prod_i \mathrm{d}^4 k_i$. 这对于线性变换总是可能的. 经过 wick 转动之后, 分子成为 $\not{k}_i, \not{p}$ 以及 $\gamma^{\mu_1}, \cdots$ 的连乘积的多项式, 再乘以它们以及 $\gamma^{\nu_1}, \cdots$ 形成的多项式在费米圈中给出的 trace.

我们先求这些 tr. 用 γ 矩阵乘积的 trace 公式 [在 (见附录 8.5C, 源自 Weinberg 书, 373 页)] 奇数个 γ 矩阵的 tr 为 0, 偶数个 γ 矩阵的 tr 是各种可能的两两配对对应的 $g^{\mu\nu}$ 之乘积的代数和.

$$\mathrm{tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n}}\}=4\sum_{\text{配对方式}}(-1)^p\prod_{\text{配对}}(g^{\mu\nu}).$$

因此, 对费米圈的求迹给出 k_i, p, 以及它们与 e^ν(对应于 γ^ν) 作两两内积之后的求和. 其中 k_i, p, q_i 之间配对形成内积, 比如 $k_1\cdot k_2, k_1\cdot k_3, k_2\cdot p, \cdots .k_i\cdot p$, 与 γ^ν 之间配对形成该动量的 γ 分量, 比如 k_1^ν, 等等.

求迹完毕之后, 凡是费米圈之间光子线相连的顶角都在求迹中形成内积比如 $k_1^\nu k_{2\nu}=k_1\cdot k_2$, 凡是费米圈上的顶角与开放电子线上的顶角连接时给出比如 $k_{1\mu}\gamma^\mu=\not k_1$, 出现在开放电子线的分子的旋量 $\not k_i\cdots$ 中间, 把 γ^{μ_i} 变为 $\not k_1$.

最后得到一个多项式, 其中每项都由上述动量的内积, 动量与 γ^{ν_i} 配对后对应的 $k_i\cdots$ 的 ν 分量 $k_{i\nu},\cdots$, 以及这些动量的旋量 $\not k_i$ 和主干线 (开放电子线) 上的开放的 γ^{μ_i} 矩阵的乘积. 由于 $k_{i\nu}=\dfrac{1}{2}(\gamma_\nu\not k_i+\not k_j\gamma_\nu)$. 因此最终写成所有电子线上开放的 γ 矩阵 (γ^{μ_i}及γ^{ν_i}) 及各个动量对应的动量 $\not p,\not k_i$ 的连乘积, (它们不能交换) 以及动量间的内积的乘积 (它们可以交换) 相乘得到的单项式的和. 现在光子线只有主干线上不同点之间成对地相连了, 我们用 $\gamma^\mu\not a=-\not a\gamma^\mu+2a^\mu$ 的公式, 一步步地将它们挪近, a^μ 与光子线另一端的 γ_μ 合在一起变为 $\not a$, 这样光子线最终连接相邻的 $\gamma^\mu\gamma_\mu$ 给出 4. 最后, 主干线上只余下原图的开放顶角 $\gamma^{\mu_i},\gamma^{\nu_i}$, 我们用 $\not A\not B=-\not B\not A+2A\cdot BI$ 将它们移到最右端. 在移动中留下 $k_i^{\mu_i},k_i^{\nu_i},p^{\mu_i},p^{\nu_i}$ 还有 $g^{\mu_i\mu_j},g^{\nu_i\nu_j}$ 等等, 当它们出现时相应的 γ 矩阵消失. 再将其余旋量按 $\not p,\not k_1,\cdots,\not k_n$ 的次序排在一起, 乘以一个标重积的因子. 由于 $\not p\not p=p^2I$, $\not k_i^2=k_i^2I$, 最后旋量中只余下一个 $\not p$ 或没有 $\not p$, 一个 $\not k_i$ 或没有 $\not k_i$.

下一步是对 k_i 积分. 在四维欧氏空间, 对 k_1 有 $\not k_1$(或没有), $(k_1^2)^l,(k_i\cdot p)^{l_0}$, 还有 k_1 与其余 k_i 的内积的幂次. 我们有一个定理 *

$$\int \mathrm{d}^4k f(k^2)\prod_{j=1}^{2m}(k\cdot a_j)\quad (\text{当 } j \text{ 的数目为奇数时为 } 0)$$

* 在上述积分中

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^4k f(k^2)k^{\mu_1}k^{\mu_2}\cdots k^{\mu_{2m}}\\=&\int \mathrm{d}^Dk f(k^2)\frac{\Gamma(D/2)}{2^m\Gamma(m+D/2)}\underbrace{(g^{\mu_1\mu_2}\cdots g^{\mu_{2m-1}\mu_{2m}}+\cdots)}_{(2n-1)!!\text{项}}(k^2)^m\end{aligned}$$

(由此可推出这个定理附录 8.5D 源自 R. Ticciati, Quantwn Field Theory for Mathematicians, 547 页).

在收敛时等价于

$$c\int \mathrm{d}^4 k f(k^2)[\text{把 } a_j \text{ 配成对 } (m \text{ 对}) \text{ 之后各对 } (a_i\cdot a_j) \text{ 连乘积,}$$
$$\text{然后对各种可能的配对方式求和}]\times(k^2)^m$$

对 $\not{k}$, 我们可以形式地将它写为 $\gamma\cdot k$, $(\gamma\cdot k)(k\cdot a)$ 配对得 $\gamma\cdot a=\not{a}$. 利用这条定理, 我们在 k_1 积完之后得到其余动量 $(p,k_2,\cdots)$ 之内积及它们形成的旋量. 顺次积分到最后, 剩下是 $\not{p}$ 的 n 次, 与 γ^{μ_i}, $\gamma^{\nu_i}, p^{\mu_i}, p^{\nu_i}, g^{\mu_i\nu_j}, g^{\nu_i\nu_j}$, $g^{\mu_i\mu_j}$ 的乘积. 因此得到的结果是 $\not{p}$ 的函数乘以由 $p^\mu, g^{\mu\nu}, \gamma^\mu$, γ^ν 给出的张量.

当没有开放顶角时, 给出 $\sum(p)=\sum(\not{p})$, 当有一个顶角 γ^μ 时给出

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu(p,p)&=f_1(\not{p})p^\mu+f_2(\not{p})\gamma^\mu\\&=f_3(\not{p})\gamma^\mu\not{p}+f_4(\not{p})\gamma^\mu\end{aligned}$$

当 p 在能壳上时有 $\bar{u}(\vec{p})\Lambda^\mu(p,p)u(\vec{p})=[mf_3(m)+f_4(m)]\bar{u}(\vec{p})\gamma^\mu u(\vec{p})$.

6.7 QED 中的一个 Ward 恒等式

在本节我们给出 QED 中由电荷守恒导出的 Ward 恒等式的具体形式, 由此我们可以证明上一小节中电子自能和顶角修正中的两个发散常数相等: $Z_2=Z_2'$ 对多圈图同样成立. 在 QED 中拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)+\bar{\psi}[\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu+\mathrm{i}eA_\mu)-m]\psi, \tag{6.7.1}$$

考虑场量的变更

$$\delta\bar{\psi}=\mathrm{i}\epsilon\bar{\psi},\quad \delta\psi=-\mathrm{i}\epsilon\psi, \tag{6.7.2}$$

ϵ 是实无穷小量, 与 x 无关, 则 $\delta\mathscr{L}=0$, 而且 d^4x 不变, $\delta\mathscr{D}\bar{\psi}=\delta\mathscr{D}\psi=0$. 根据 Ward 恒等式 (2.4.5 式):

$$\mathrm{i}\oint_{\partial V}\mathrm{d}\sigma_\mu\left\langle T\left\{\left(j^\mu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\mu}\delta_0\phi\right)A_1\cdots A_n\right\}\right\rangle+\langle\delta T\{A_1A_2\cdots A_n\}\rangle=0 \tag{6.7.3}$$

考虑到现在 $j^\mu=0(\partial_\mu j^\mu=\delta_0\mathscr{L}=0)$: 我们令 $A_1=\psi(y)$, $A_2=\bar{\psi}(z)$, 得

$$\mathrm{i}\oint_{\partial V}\mathrm{d}\sigma_\mu\left\langle T\left\{\left(-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{\beta\mu}}\delta\psi_\beta-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}_{\alpha\mu}}\delta\bar{\psi}_\alpha\right)\psi(y)\bar{\psi}(z)\right\}\right\rangle+\langle\delta T\{\psi(y)\bar{\psi}(z)\}\rangle=0. \tag{6.7.4}$$

由于 (6.7.1) 式 $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{\beta\mu}} = \mathrm{i}\bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}$, $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_{\alpha\mu}} = 0$, 我们得到

$$\mathrm{i}\epsilon \oint_{\partial V(x\text{变化})} \mathrm{d}\sigma_\mu \langle -T\{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)\}\rangle + \mathrm{i}\epsilon C\langle T\{\psi(y)\bar{\psi}(z)\}\rangle = 0, \tag{6.7.5}$$

其中

$$C = \begin{cases} -1, & \text{如果四维面 } \partial V \text{ 包含 } y \text{ 而不包含 } z; \\ +1, & \text{如果四维面 } \partial V \text{ 包含 } z \text{ 而不包含 } y; \\ 0, & \text{其他情形.} \end{cases} \tag{6.7.6}$$

由

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}\sigma_\mu A^\mu = \int_V \mathrm{d}^4 x \partial_\mu A^\mu \tag{6.7.7}$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle T\{(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)\}\rangle + [\delta^4(x-y) - \delta^4(x-z)]\langle T\{\psi(y)\bar{\psi}(z)\}\rangle = 0. \tag{6.7.8}$$

考虑对同一点 x 的场函数 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ 取正规积, 将方程两边左乘 $\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}$, 我们得到

$$\begin{aligned} &-\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} \langle \frac{\partial}{\partial x^\mu} T\{:\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x):\psi_a(y)\bar{\psi}_b(z)\}\rangle \\ =& \int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}[\delta^4(x-y) - \delta^4(x-z)]\langle T\{\psi_a(y)\bar{\psi}_b(z)\}\rangle \\ =& (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ly} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}lz})\langle T\{\psi_a(y)\bar{\psi}_b(z)\}\rangle \end{aligned} \tag{6.7.9}$$

我们在附录 6.7A 中证明方程 (6.7.9) 的左边的有效部分为

$$\begin{aligned} \text{左} =& -\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} \frac{\partial}{\partial x^\mu}[\mathrm{i}S'_F(y-x_1)_{a\alpha}(\Lambda'^\mu_{\alpha\beta}(x_1 x x_2))\mathrm{i}S'_F(x_2-z)_{\beta b}] \\ & -\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} \frac{\partial}{\partial x^\mu}[\mathrm{i}S'_F(y-x)_{a\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\mathrm{i}S'_F(x-z)_{\beta b}] \end{aligned} \tag{6.7.10}$$

在 (6.7.10) 式中, $\Lambda'^\mu_{\alpha\beta}(x_1 x x_2)$ 是全部顶角修正, 也就是图 6.7.1 所示的一些过程的总和.

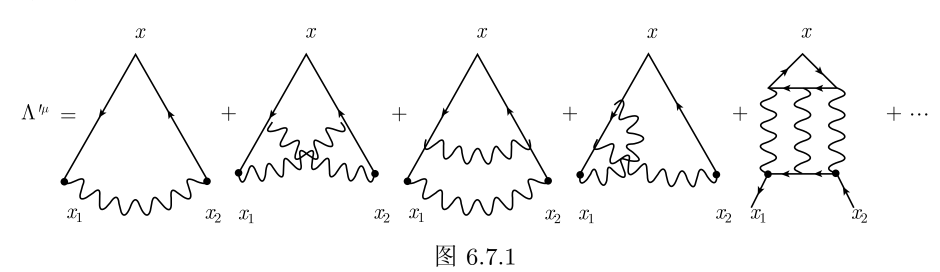


图 6.7.1

它的最低阶是

$$\mathrm{i}D_{F\nu\lambda}(x_1-x_2)\gamma^\nu \mathrm{i}S_F(x_1-x)\gamma^\mu \mathrm{i}S_F(x-x_2)\gamma^\lambda(-\mathrm{i}e)^2.$$

$\mathrm{i}S'_F(y-x_1)$ 是全电子传播子, 即如图 6.7.2 所示.

$\mathrm{i}S'_F(y-x_1) = $ [diagrams: y — x_1] $+ \cdots$

图 6.7.2

在费恩曼积分的推导中, 我们注意到, 如果保留某些顶角的坐标 x_j 不积分, 则费恩曼积分的求值中只需将相应顶角 x_j 贡献的 $(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p_i)$ 改为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_j\Sigma p_i}$ 即可, 对动量积分不变. (当然对称因子计算中不能认为这些顶点之间可以交换而给出同一个费恩曼积分值了) 我们得到 (对 d^4x 分部积分)

$$\begin{aligned}
左=&\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{i}l_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-x_1)}\mathrm{i}S'_F(\not{p})_{a\alpha}\\
&\times\int\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1x_1}{\Lambda'}^{\mu}_{\alpha\beta}(p_1,p_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p_2-p_1)x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_2x_2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x_2-z)}\mathrm{i}S'_F(\not{k})_{\beta b}\\
&+\int \mathrm{d}^4x\mathrm{i}l_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-x)}\mathrm{i}S'_F(\not{p})_{a\alpha}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-z)}\mathrm{i}S'_F(\not{k})_{\beta b}
\end{aligned}\tag{6.7.11}$$

其中, p_1 是从 ${\Lambda'}^\mu$ 中流进 x_1 点的各动量之和, p_2 是 ${\Lambda'}^\mu$ 中流出 x_2 点的各动量之和. 由于动量在各个 ${\Lambda'}^\mu$ 内线上是守恒的, 因而在 ${\Lambda'}^\mu$ 中流入 x 点的动量为 p_2-p_1. 我们得到

$$\begin{aligned}
左=&\mathrm{i}l_\mu\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(l+p_1-p_2)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1(-p_1+p)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2(-k+p_2)}\times\cdots+\cdots\\
=&\mathrm{i}l_\mu\int(2\pi)^4\delta^4(l+p_1-p_2)(2\pi)^4\delta^4(p-p_1)(2\pi)^4\delta^4(k-p_2)\frac{\mathrm{d}^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\\
&\times[\mathrm{i}S'_F(\not{p}){\Lambda'}^\mu(p_1p_2)\mathrm{i}S'_F(\not{k})]_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}kz}\\
&+\mathrm{i}l_\mu\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}(2\pi)^4\delta^4(p-k+l)[\mathrm{i}S'_F(\not{p})\gamma^\mu\mathrm{i}S'_F(\not{k})]_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}kz}\\
=&\frac{\mathrm{i}l_\mu}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4k[\mathrm{i}S'_F(\not{p})({\Lambda'}^\mu(p,k)+\gamma^\mu)\mathrm{i}S'_F(\not{k})]_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}kz}\delta^4(l+p-k)\\
\equiv&\mathrm{i}l_\mu\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}[\mathrm{i}S'_F(\not{p}){\Gamma'}^\mu(p,p+l)\mathrm{i}S'_F(\not{p}+\not{l})]_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}(p+l)z}
\end{aligned}\tag{6.7.12}$$

(6.7.9) 式右边的值是

$$
\begin{aligned}
右 &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ly} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}lz})\mathrm{i}S'_F(y-z)_{ab} \\
&= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ly} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}lz})\int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(\mathrm{i}S'_F(\not{p}))_{ab}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(y-z)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-l)y+\mathrm{i}pz}(\mathrm{i}S'_F(\not{p}))_{ab} - \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}(p+l)z}(\mathrm{i}S'_F(\not{p}))_{ab} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}(p+l)z}(\mathrm{i}S'_F(\not{p}+\not{l}))_{ab} - \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}py+\mathrm{i}(p+l)z}(\mathrm{i}S'_F(\not{p}))_{ab}
\end{aligned}
\tag{6.7.13}
$$

考虑到 y、z 是任意的, 得到

$$
\mathrm{i}l_\mu(\mathrm{i}S'_F(\not{p})\Gamma'^{\mu}(p,p+l)\mathrm{i}S'_F(\not{p}+\not{l})) = \mathrm{i}S'_F(\not{p}+\not{l}) - \mathrm{i}S'_F(\not{p}), \tag{6.7.14}
$$

$$
-l_\mu\Gamma'^{\mu}(p,p+l) = S'^{-1}_F(\not{p}) - S'^{-1}_F(\not{p}+\not{l}). \tag{6.7.15}
$$

由 (6.7.15) 式两边取 $\partial/\partial l_\nu$ 得

$$
\Gamma'^{\nu}(p,p+l)\Big|_{l=0} = \frac{\partial}{\partial l_\nu}S'^{-1}_F(\not{p}+\not{l})\Big|_{l=0} = \frac{\partial}{\partial p_\nu}S'^{-1}_F(\not{p}) = \Gamma'^{\nu}(p,p). \tag{6.7.16}
$$

由附录 6.7B 中 (6.7B.1) 式, 得

$$
\begin{aligned}
S'^{-1}_F(\not{p}) &= \mathrm{i}[(\mathrm{i}S_0)^{-1} + \mathrm{i}\Sigma_1 + \mathrm{i}\Sigma_2 + \cdots] \\
&\equiv \not{p} - m - \Sigma_1 - \Sigma_2 \cdots \equiv \not{p} - m - \Sigma'.
\end{aligned}
\tag{6.7.17}
$$

由于各级电子自能 $\Sigma_1, \Sigma_2 \cdots$ 都是 $\not{p}$ 的幂级数, Σ' 是它们的和, 满足

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_\nu}\Sigma'(\not{p}) &= \frac{\partial}{\partial p_\nu}\sum\nolimits_n C_n\not{p}^n = \sum\nolimits_n C_n\frac{\partial}{\partial p_\nu}\not{p}^n \\
&= \sum\nolimits_n C_n(\gamma^\nu\not{p}^{n-1} + \not{p}\gamma^\nu\not{p}^{n-2} + \not{p}^2\gamma^\nu\not{p}^{n-3} + \cdots),
\end{aligned}
\tag{6.7.18}
$$

给出

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\vec{p})\frac{\partial}{\partial p_\nu}\Sigma'(\not{p})u(\vec{p}) &= \sum\nolimits_n C_n n m^{n-1}\bar{u}(\vec{p})\gamma^\nu u(\vec{p}) \\
&= \frac{\partial}{\partial\not{p}}\Sigma'(\not{p})\Big|_{\not{p}=m}\bar{u}(\vec{p})\gamma^\nu u(\vec{p}).
\end{aligned}
\tag{6.7.19}
$$

因而有

$$
\bar{u}(\vec{p})\Lambda'^{\nu}(p,p)u(\vec{p}) = -\bar{u}(\vec{p})\gamma^\nu u(\vec{p})\frac{\partial}{\partial\not{p}}(\Sigma_1(\not{p}) + \Sigma_2(\not{p}) + \cdots)\Big|_{\not{p}=m}. \tag{6.7.20}
$$

(6.6.72) 式中给出的 Z_2', 与 (6.6.43) 中的 Z_2 相等, 是这个式子的最低级给出的结果.

另一方面, 考虑以 $p'=p=0$ 为重整化的点的情形, 我们由 (6.6E.11) 式有 (这个式子对一切 $\Sigma(\not p)$ 都适用)

$$\frac{\partial}{\partial p_\nu}\Sigma'(\not p)\Big|_{\not p=0}=\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial\not p}\Sigma'(\not p)\Big|_{\not p=0}, \tag{6.7.21}$$

因而有

$$\Lambda'^{\nu}(0,0)=-\gamma^\nu\frac{\partial}{\partial\not p}(\Sigma_1(\not p)+\Sigma_2(\not p)+\cdots)\Big|_{\not p=0}. \tag{6.7.22}$$

(6.6E.9) 式是此式的特例.

从以上分析可见, 对本文用的两种重整化条件, 到任何微扰级都满足

$$Z_2'=Z_2. \tag{6.7.23}$$

由于不同级的 Σ_k, 对 e 的幂次是不同的, 又由于对于 $\Sigma_k(\not p)$ 的重整化常数, Z_2 是与在能壳上的 p(即 $p^2=m^2$) 的选择无关的, 因此满足 (6.6.72) 式的顶角修正的同级顶角修正 Λ_i^μ 的 Z_{2i}' 之和 $\Sigma_i Z_{2i}'=Z_2'$ 也与 p 无关, 且与顶角指标 μ 无关.

附录 6.7A　(6.7.10) 式的推导

令

$$G=\langle B_0|T\{:\bar\psi_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x):\psi_a(y)\bar\psi_b(z)\}|B_0\rangle$$

其中, $\bar\psi(x)\cdots\psi_a(y)$ 等是海森伯绘景中的算子, $\langle B|,|B\rangle$ 是边界态矢量. 由费恩曼路径积分得

$$G=N^{-1}\int_B\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar\psi\mathscr{D}A\bar\psi_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)\psi_a(y)\bar\psi_b(z)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x'(\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_I)},$$

边界条件 B 是由 $\langle B|$ 和 $|B\rangle$ 确定的. 我们展开 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x'\mathscr{L}_I}$, 将 G 写成

$$\begin{aligned}G=N^{-1}\int_B\cdots\times\Big[1+(-\mathrm{i})\int\mathrm{d}^4x'\mathscr{H}_I(x')+\frac{(-\mathrm{i})^2}{2}\int\mathrm{d}^4x_1'\\ \times\int\mathrm{d}^4x_2'\mathscr{H}_I(x_1')\mathscr{H}_I(x_2')+\cdots\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x'\mathscr{L}_0}\end{aligned} \tag{6.7A.1}$$

其中, $\mathscr{H}_I=-\mathscr{L}_I$, 它们由场量随时空的变化确定.

根据费恩曼路径积分公式, G 可以写成算子表达式 ($\mathscr{H}_I = -\mathscr{L}_I$ 中不包含 $\dot{\psi}, \dot{\bar{\psi}}, \dot{A}$, 因而可以放心地这样做)

$$
\begin{aligned}
G &= N^{-1}\langle B|T\{:\bar{\psi}_\alpha(x)\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta(x):\psi_a(y)\bar{\psi}_b(z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}[\int \mathrm{d}^4x'\mathscr{H}_I(x')]^n\}|B\rangle \\
&= N^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\langle B|T\{:\bar{\psi}_\alpha(x)\cdots\bar{\psi}_b(z)(\int \mathrm{d}^4x'\mathscr{H}_I(x'))^n\}|B\rangle,
\end{aligned}
$$

这正是熟悉的微扰展开. 考虑 G_0 为

$$
G_0 = \left\langle B|T\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\left[\int \mathrm{d}^4x'\mathscr{H}_I(x')\right]^n\right\}|B\right\rangle = N^{-1}\int_B \mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x'(\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_I)}.
$$

当取边界条件为 H_0 的真空态 $\langle 0|$, $|0\rangle$ 时, G_0 表示真空图之和, 而 G/G_0 表示没有真空图的图的和*

它的有关算子用费恩曼图表示如图 6.7A.1 所示.

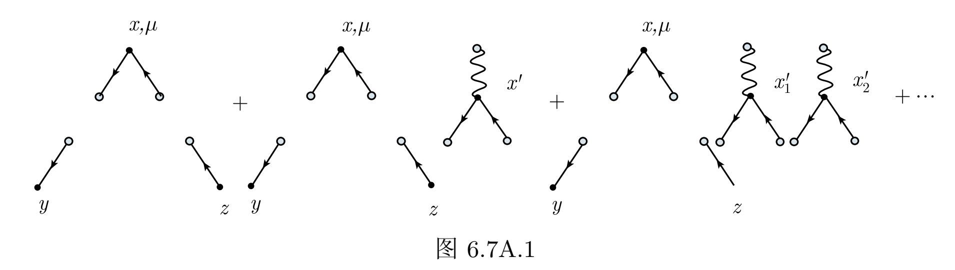


图 6.7A.1

在此图中, 只要把空圈配对完成, 就给出一个非零项. 由于费米子线只能形成圈或者由 z 出发到 y 终止, 所以由 z 出发到 y 终止的那根费米子线有两种可能：

(A) 这根线与通过 x 点的线有连接 (包括由光子线连接).

(B) 这根线与 x 点没有任何线连接.

因此得

$$
G = (A) + (B). \tag{6.7A.2}
$$

我们先讨论 (A). (A) 也包括两种情形, 一种 (A_1) 是由 z 出发的电子线通过 x. 对这种情形也有两种可能, 一种是在 x 点切断电子线, 就可把 y 和 z 分开 (没有任何线连接它们), 这就没有顶角修正图, 最多只包含电子自能图, 否则即含顶角修正图. 另一种 (A_2) 是 z 到 y 的电子线由光子线间接与 x 相连. 当只有一根光子线, 由此电子线出发, 就形成一个真空极化图 ΔA. 对其余情形, 即含顶角修正. 对有顶

∗ 我们在 (6.7.9) 式右边也作同样的考虑, 因此在算 S'_F 的 (6.7.13) 式中也不考虑真空图, 因而 (6.7.9) 式在没有真空图的层面上是严格相等的.

角修正图的, 我们总可以在电子线 zy 上找到 x_1 和 x_2 满足如下条件: 将 x_1 定为这样一点, (从电子线前进方向看) 在它之后切断费米子线, 就能隔开 y 和 x 点, 而在它之前切断费米子线并不隔开 y 和 x 点. 将 x_2 定为这样一点, 在它之前切断费米子线, 就能隔开 z 和 x, 而在它之后切断, 并不隔开 z 和 x (即 z 和 x 之间可沿费恩曼图由一点到达另一点), 如图 6.7A.2 所示.

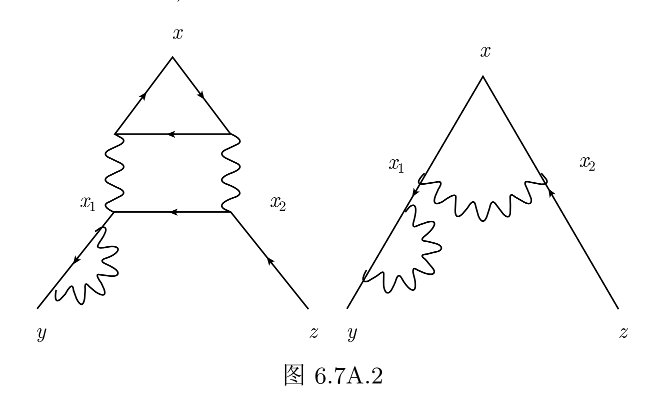


图 6.7A.2

x_1xx_2 就给出 Λ'^{μ} 的图 *, yx_1, zx_2 就构成费恩曼传播子 $\mathrm{i}S'_F$. 这就是

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}) = &\mathrm{i}S'_F(y-x_1)\Lambda'^{\mu}(x_1xx_2)\mathrm{i}S'_F(x_2-z)\\ &+\mathrm{i}S'_F(y-x)\gamma_i^{\mu}SF'(x-z)+\Delta A\end{aligned} \tag{6.7A.3}$$

其中, 第一项给出 (6.7.10) 式左边的项, 第二项是不含顶角修正的图的贡献, ΔA 是包括一个光子的完全传播子 $\Pi'^{\mu\lambda}(x,\cdots)$ 的图.

再讨论 (B), 在这种情形 y 和 z 之间形成传播子, 而经 x 点的费米子线形成费米子圈.

$$(\mathrm{B}) = \mathrm{i}S'_F(y-x)\times F^{\mu}(x) \tag{6.7A.4}$$

由于 $\Pi'^{\mu\lambda}(x,\cdots)$ 和 $F(x)$ 是包括经过 x 的费米子圈的, 由第 6.4 节关于费米子圈的规范不变性知道 (见 (6.4.8) 式)

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}F^{\mu}(x)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Pi'^{\mu\lambda}(x,\cdots)=0. \tag{6.7A.5}$$

* 总之 Λ'^{μ} 是一张有三根外线的连接图, 其中两根是电子线 (一进一出), 一根是光子线 (标号为 μ), 这张连接图中任意切断一根内线时, 仍然是一张连接图 (这种任意切断一根内线时仍然是连接图的图称为正规图).

因此, ΔA 和 (B) 对 (6.7.9) 式左边无贡献.

在第 6.7 节的公式和附录 6.7A 的公式中, $\mathrm{i}S'_F(y-x)$ 是全费恩曼传播子 (参见附录 6.7B), 它包括费恩曼传播子和相关的电子自能 (图 6.7A.3), 也就是

图 6.7A.3

符号 $\mathrm{i}\Sigma'$ 和 Λ'^{μ} 也分别代表全电子自能和全顶角修正.

附录 6.7B　电子的全费恩曼传播子

由图 6.7A.3 $\left(令\mathrm{i}S_0=\dfrac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\right)$, 我们可以写出电子的全费恩曼传播子在动量空间的式子

$$\begin{aligned}\mathrm{i}S'_F(p)=&\,\mathrm{i}S_0+\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_1)\mathrm{i}S_0+\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_1)\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_1)\mathrm{i}S_0+\cdots+\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_2)\mathrm{i}S_0\\&+\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_2)\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_1)\mathrm{i}S_0\\&+\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_1)\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_2)\mathrm{i}S_0+\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_2)\mathrm{i}S_0(-\mathrm{i}\Sigma_2)\mathrm{i}S_0+\cdots\\=&\,\frac{1}{(\mathrm{i}S_0)^{-1}+\mathrm{i}\Sigma_1+\mathrm{i}\Sigma_2+\cdots},\end{aligned}\tag{6.7B.1}$$

等号是由于

$$\frac{1}{A-B}=A^{-1}+A^{-1}BA^{-1}+A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}+\cdots,$$

这个式子称为 Dyson 等式.

(6.7B.1) 式中 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots$ 是一些连接的自能图, 而且切断任何一根内线, 仍然是一张连接图, 这称为正规图.

注意到当添加电子自能的抵消项之后, 这些抵消项给出的贡献也要出现在总的传播子 S'_F 中. 由 (6.6.36) 式

$$-\mathrm{i}\Sigma_R(\not p)=a_R+b_R(\not p-m)-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}_R(\not p),$$

出现在 S'_F 中的应该是

$$\begin{aligned}&S'_F(p)\\&=\frac{1}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon+[\mathrm{i}\Sigma_{R_1}-a_{R_1}-b_{R_1}(\not p-m)]+[\mathrm{i}\Sigma_{R_2}-a_{R_2}-b_{R_2}(\not p-m)]+\cdots}\\&=\frac{1}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon+\mathrm{i}\Sigma'_R-a'_R-b'_R(\not p-m)}\\&=\frac{1}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon+\mathrm{i}\tilde{\Sigma}'_R},\end{aligned}\tag{6.7B.2}$$

其中, $\mathrm{i}\tilde{\Sigma}'_R$ 是 $(\not p-m)$ 的二次以上幂次. 由于 $\mathrm{i}\tilde{\Sigma}'_R(\not p)u(\vec{p})=0$, $S'_F(p)^{-1}u(\vec{p})\to 0$, 因此, $S'_F(p)$ 以 $\not p\to m$ 为极点. 也就是当 $p^2\to m^2$ 时, 矩阵 $\not p-m+\mathrm{i}\epsilon+\mathrm{i}\tilde{\Sigma}'_R$ 没有逆元素.

注意: 在物理测量中, 这极点就是实测的电子质量. 从这一点我们可以看到, 当取 $\not p=m$ 为重整化点时, $\tilde{\Sigma}'_R$ 是由实测的 m 表达的. 在单圈图重整化中我们详细作了推导, 在多圈图中也一样.

从测量过程来考虑. 测量电子质量和电荷总是用静电磁场对自由电子作测量, 涉及的是如图 6.7B.1 所示的费恩曼图, 其中 A_{ext} 是测量用的外电磁场.

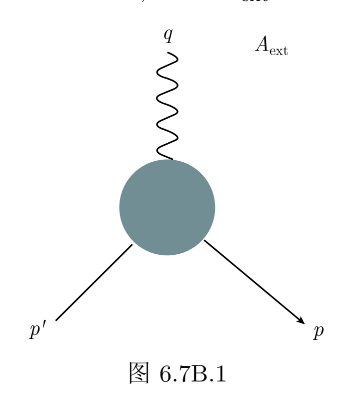


图 6.7B.1

这是一张顶角的图形, 它与测量有关的, 可能顶角上还有光子和电子的传播子的圈图修正 (见图 6.7B.2), 由于 $-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}(\not p)u(p)=0$, $\bar{u}(p)(-\mathrm{i})\tilde{\Sigma}(\not p)=0$, 电子自能图可以忽略.

如前所述, 对于电子外线为自由电子时, 光子部分的修正, 对重整化的 $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}$, 误差的数量级为 (从单圈图的结果估计, 见 (6.6.22) 式)

$$\widetilde{\Pi}(k^2)\sim\frac{k^2}{m^2}\frac{\alpha}{\pi},\quad \text{这在实际测量中数量级} \ll 10^{-8}.$$

顶角部分是一个复杂的结构, 也就是一个 γ 矩阵加上顶角修正. 这部分之中的 $p'\to p$ 的贡献由重整化条件 (6.6.72 式), 即

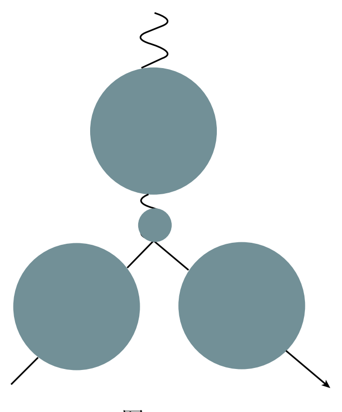


图 6.7B.2

$$\bar{u}(\vec{p})\tilde{\Lambda}_R^\mu u(\vec{p}) = 0 \tag{6.7B.3}$$

保证这个顶角总是相当于一个 γ^μ 矩阵, 这结果与圈数无关.

另一部分是 p' 与 p 不等价造成的偏差 (见图 6.7B.3). 这一部分从单圈图的结果分析, (6.6.84) 式第二项

$$\sim \frac{e^2}{8\pi^2}\frac{q}{m} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{q}{m} \ll 10^{-8},$$

第一项更小, $\sim \dfrac{e^2}{8\pi^2}\dfrac{q^2}{m^2}$, 因此可以忽略.

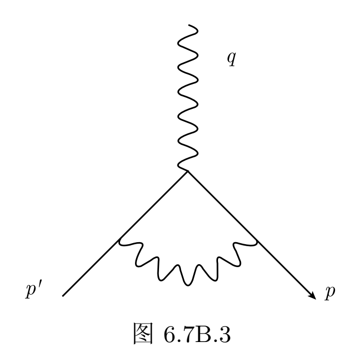


图 6.7B.3

对于其他不能归结到顶角的图, 由量纲分析能标就会出现 $\dfrac{q}{m}$ 或更高次, 因此当 $q \to 0$ 时, 也可忽略. 比如, 图 6.7B.4(它是收敛的)

$$\begin{aligned} F = (-\mathrm{i}e)^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\gamma^\mu \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - \not{k} - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - \not{k} - \not{q}_1 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^\lambda \\ \times \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - \not{k} - \not{q}_1 - \not{q}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu \times \frac{-\mathrm{i}}{k^2 - \lambda^2 + \mathrm{i}\epsilon} \end{aligned} \tag{6.7B.4}$$

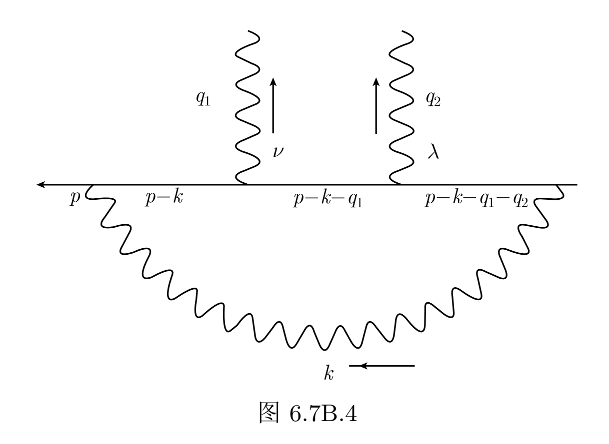


图 6.7B.4

唯一的标度是 m,

$$
\begin{aligned}
F=&\frac{(-\mathrm{i}e)^4}{m^5}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\frac{\mathrm{i}}{\dfrac{\not p}{m}-\dfrac{\not k}{m}-1+\mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu\frac{\mathrm{i}}{\dfrac{\not p}{m}-\dfrac{\not k}{m}-\dfrac{\not q_1}{m}-1+\mathrm{i}\epsilon}\cdots\\
&\times\frac{-\mathrm{i}}{\dfrac{k^2}{m^2}-\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu=\frac{(-\mathrm{i}e)^4}{m^5}f\left(\frac{\not p}{m},\frac{q_1}{m},\frac{q_2}{m}\right),
\end{aligned}
\tag{6.7B.5}
$$

它与 q 相关的部分 $\sim\dfrac{q}{m}$, (与 q 不相关部分应该与测量无关) , 在理想情形, 即测量用的外场 $q\to 0$ 时, 这些都可以忽略.

注意: 对于自由电子在测量电子电荷时, 测得的电子电荷与参量 e 的差别就是 $\bar\psi\Gamma'^\mu\psi$ 和 $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ 的差别. 由 (6.7B.3) 式, 当 $p'=p$ 时两者是没有差别的. 另一方面, 当 $p'\neq p$ 时由于被测电子得到的静电场的动量 $p'-p=q$ 很小, 对 $p'\neq p$ 给 $\Gamma'^\mu(p',p)$ 带来的误差可以忽略 (与这一点相比较, 在附录 6.6C, 另一种重整化点给出的顶角修正就不满足这个条件, 因而在那里参量 e 就不等于实测电荷). 综上所述, 我们可以认为参量 m 就是实测的电子质量, 参量 e 就是实测的电子电荷, 至少是在理想条件下测得的电荷. 这就是我们为什么要把重整化点取在 $p'^2=p^2=m^2$, 且对 Σ,Λ^μ 用传统方案取抵消项的原因.

附录 6.7C　光子的全费恩曼传播子

考虑真空极化图 6.7C.1,

$$
A_{\mu_1\mu_6}=\mathrm{i}D_{F\mu_1\mu_2}(k)\Pi_1^{\mu_2\mu_3}(k)\mathrm{i}D_{F\mu_3\mu_4}(k)\Pi_2^{\mu_4\mu_5}(k)\mathrm{i}D_{F\mu_5\mu_6}(k).
$$

其中, $\Pi^{\mu\mu}$ 和 $\Pi_1^{\mu\mu}$ 是正规图. 我们可以把它写成矩阵形式,

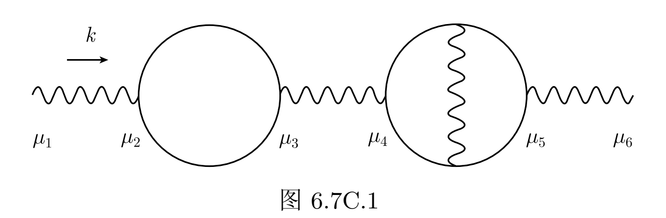


图 6.7C.1

$$(A)_{\mu_1\mu_6} = (\mathrm{i}D_F\Pi_1\mathrm{i}D_F\Pi_2\mathrm{i}D_F)_{\mu_1\mu_6}$$

这个结果可以推广到多个真空极化情形. 对于光子的全传播子 $D'_{F\mu\nu}(k)$, 与电子的完全传播子类似可以得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}D'_{F\mu\nu}(k)\\
=&\{\mathrm{i}D_F + \mathrm{i}D_F(\Pi_1+\Pi_2+\cdots)\mathrm{i}D_F + \mathrm{i}D_F(\Pi_1+\Pi_2+\cdots)\\
&\times\mathrm{i}D_F(\Pi_1+\Pi_2+\cdots)\mathrm{i}D_F+\cdots\}_{\mu\nu}\\
=&\left[\frac{1}{(\mathrm{i}D_F)^{-1}-(\Pi_1+\cdots)}\right]_{\mu\nu} \equiv \left[\frac{1}{(\mathrm{i}D_F)^{-1}-\Pi}\right]_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

$$\left(\text{由}\frac{1}{A-B}=\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A}+\cdots\right).$$

在这里 Π 是所有真空极化正规图 (即连接图并且切断任何一根内线, 仍然连接) 的和. 考虑到重整化中添加的抵消项有真空极化图 $\Pi_i(k)$ 就有相应的抵消项 $-\Pi_{i0}=-t_k^{(2)}\Pi_i(k)$, 给出重整化后的传播子

$$\tilde{D}'_{F\mu\nu}(k) = \left[\frac{1}{(\mathrm{i}D_F)^{-1}-\tilde{\Pi}}\right]_{\mu\nu}, \tag{6.7C.1}$$

其中

$$(\mathrm{i}D_F)^{-1}_{\mu\nu} = \left(\frac{-\mathrm{i}g}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}\right)^{-1}_{\mu\nu} = [\mathrm{i}g(k^2+\mathrm{i}\epsilon)]_{\mu\nu}.$$

$\tilde{\Pi}$ 的一般形式为

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = (k^\mu k^\nu - g^{\mu\nu}k^2)f(k),$$

其中, $f(k)$ 当 $k\to 0$ 时也趋于 0 . 因此有

$$\text{当}k\to 0\text{时}, \tilde{D}'_F(k)\to D_F(k). \tag{6.7C.2}$$

为求逆矩阵, 考虑方程

$$(\alpha g_{\mu\nu}+\beta k_\mu k_\nu)(ag^{\nu\rho}+bk^\nu k^\rho) = g_\mu^\rho = \delta_\mu^\rho,$$

得到 $\alpha = \dfrac{1}{a}$, $\beta = \dfrac{-b}{a(a+bk^2)}$, $k^2 = k^\mu k_\mu$. 由

$$[(\mathrm{i}D_F)^{-1} - \tilde{\Pi}]^{\mu\nu} = \underbrace{[\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon) + k^2 f(k)]}_{a} g^{\mu\nu} \underbrace{-f(k)}_{b} k^\mu k^\nu,$$

可以得到

$$\mathrm{i}D'_{F\mu\nu}(k) = \frac{1}{\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)+k^2 f(k)}\left[g_{\mu\nu} + \frac{f(k)}{\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)}k_\mu k_\nu\right]. \tag{6.7C.3}$$

这就是重整化后的光子全费恩曼传播子. 现在考虑一般规范固定项 $-\dfrac{\lambda}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2$ 时的光子传播子, 这相当于加一个微扰项. 如果在推导中把 Π 换成微扰 $\Delta\mathscr{L} = -\left(\dfrac{\lambda-1}{2}\right)(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu)$, 在 k 空间对应为 $\mathrm{i}(\lambda-1)k^\mu k^\nu$. i 是由于微扰展开式中的 $-\mathrm{i}\mathscr{H}_I = \mathrm{i}\Delta\mathscr{L}$, 去掉 $\dfrac{1}{2}$ 是因为微扰是平方项, 会多出 2! 因子. 代入得到 $a = \mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)$, $b = \mathrm{i}(\lambda-1)$, $\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)}$, $\beta = \dfrac{-\mathrm{i}(\lambda-1)}{\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)+\mathrm{i}(\lambda-1)k^2} \times \dfrac{1}{\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)}$, 给出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}D_{F\mu\nu}(k,\lambda) &= \frac{1}{\mathrm{i}(k^2+\mathrm{i}\epsilon)}[g_{\mu\nu} - \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}] \\ &= \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu} + \mathrm{i}\dfrac{\lambda-1}{\lambda}\dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}\end{aligned} \tag{6.7C.4}$$

这就是一般规范固定项时的光子费恩曼传播子 (重整化前).

6.8 关于红外发散

在电子自旋和顶角修正的计算中, 涉及到光子传播子 $D_{F\mu\nu}(k)$ 在 k 空间的积分. 这个积分当 $k\to\infty$ 时的发散称为紫外发散, 我们用重整化的方法解决它. 由于 $D_{F\mu\nu}(k) = \dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$ 当 $k\to 0$ 时有奇异. 因此对 k 空间的积分在 $k\to 0$ 时发散, 这当然会导致散射概率的发散, 这种发散称为红外发散. 当时我们引进一个小的正参量 $\lambda>0$, 也就是认为电子有一个小质量, 把 $D_{F\mu\nu}(k)$ 修正为

$$D_{F\mu\nu}(k) = \frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon}.$$

然而, 在最后的结果中会出现一个正比于 $\ln\lambda$ 的项. 这就是红外发散项. 在费恩曼积分计算中上述对 k 的积分是把 k_0, k_1, k_2, k_3 都从 $-\infty$ 积分到 $+\infty$, 就是说并不要求 k 满足条件 $k_0^2 = \vec{k}^2$(光子不在能壳上), 这种光子称为虚光子.

由虚光子参加而产生的红外发散困难是如何解决的呢? 人们发现当有相互作用时, 在作用前和作用后电子还可能放出实的光子, 这种实光子的能量可以非常小, 一直到趋向于零. 如果计算这种包含实光子发射的过程, 散射概率对发射光子动量的积分当 $k \to 0$ 时也是对数发散的. 而且这种实光子的红外发散与上面虚光子的红外发散正好抵消. 所以如果计算散射概率时同时考虑到有虚光子参加的部分 (即圈图部分) 和有实光子出射的部分, 则总的散射概率没有红外发散.

关于电子自能部分, 由于重整化条件的设定, 使它在连接电子外线时有 $\bar{u}(p)\mathrm{i}S'_F(p) = \bar{u}(p)\mathrm{i}S_F(p) = \bar{u}(p)\dfrac{1}{p-m+\mathrm{i}\epsilon}$, 这个结果把红外发散部分消除掉了, 我们要解决的只是与顶角修正有关的红外发散. 以下我们就包含顶角修正最低阶的红外发散消除做些分析. 考虑电子与电子的散射, 它的原始图是图 6.8.1. 散射振幅表示为费恩曼图 A_1 和 A_2 的函数 $S_0 = f(A_1) + f(A_2)$.

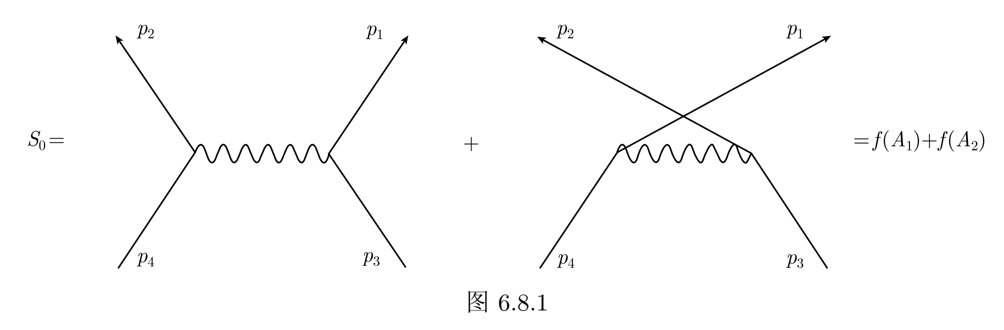


图 6.8.1

包含实的出射光子的最低阶修正是在 $A_1 + A_2$ 上的外线部分生出一个出射光子 (图 6.8.2)：

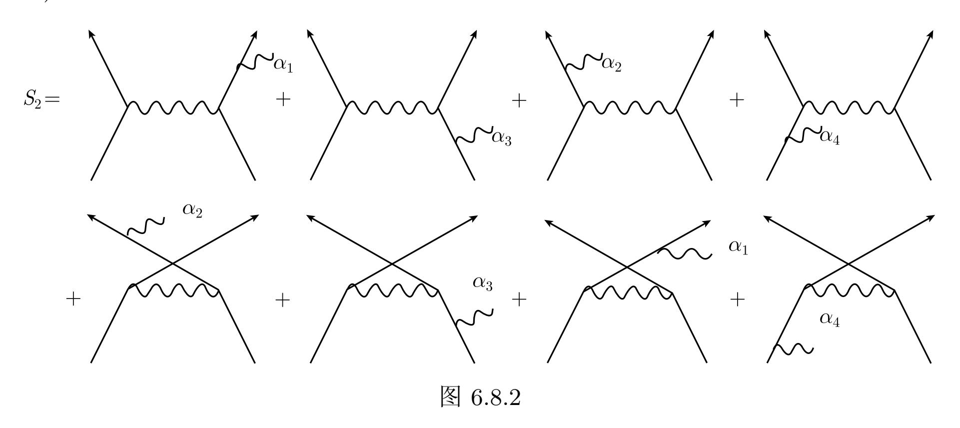


图 6.8.2

我们把图 6.8.1 中的四根费米子外线分别标为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 则可以把图 6.8.2

中的八项写成

$$F_2=(A_1+A_2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\equiv(\sum_{l=1}^{2}A_l)(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i), \tag{6.8.1}$$

对应的散射振幅 S_2 可以分为八项.

另一方面, 包含虚光子的最低阶修正的散射费恩曼图可以写成

$$\begin{aligned}F=&(A_1+A_2)[1+\frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_1\alpha_4\\&+2\alpha_2\alpha_3+2\alpha_2\alpha_4+2\alpha_3\alpha_4)]\\\equiv&(\sum_{l=1}^{2}A_l)(1+\sum_{m,n=1}^{4}\alpha_m\alpha_n)\equiv F_0+F_1,\end{aligned} \tag{6.8.2}$$

其中, F_1 表示有一根虚光子线的图, α_1^2 表示在第一根费米子外线上有两个点, 中间连接一根虚光子线, $\alpha_1\alpha_2$ 表示在第一根 α_1 与第二根费米子线 α_2 上各有一个点, 中间连接一根虚光子线, 如此等等. 这里的系数只是为下文做准备, 在这里没有意义. 对应于 F_0 和 F_1 的散射振幅 S_0 和 S_1 分别有 2 和 20 项, 其中 F_1 一共包含 20 张费恩曼图. 图 6.8.3 对应的是 $A_1\alpha_1\alpha_3, A_2\alpha_1\alpha_3, \frac{1}{2}A_2\alpha_3\alpha_3, A_1\alpha_1\alpha_2$. 它们是 S_1 中的一部分费恩曼图. 如果我们能够证明由 F_2 对应的光子出射, 其动量 k 很小的部分 (称为软光子) 它的散射概率 $\sim\int|S_2|^2\mathrm{d}^3\vec{k}$(注意 $|S_2|^2$ 总是涉及 F_2 中的两张图) 正好能抵消 S 中 (对应于 F_2 中那两张图的) 虚光子的红外发散部分, (这部分在对 k_0 积分之后最后也归结为对三维的 $\vec{k}$ 的积分) 则在最低阶情形下的红外发散困难就可以解决了. 下面我们就分步证明. 首先我们证明, 当出射软光子时, 散射矩阵 S_1 和 S_2 的各项可以因式化, 各条费米子外线分别对应 $\sqrt{\dfrac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\bar{u}(p')$ (对出射费米子线), 动量为 $p'=p_m=p_1,p_2$, 或者 $\sqrt{\dfrac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u(p)$ (对入射费米子线), 动量为 $p=p_m=p_3,p_4$.

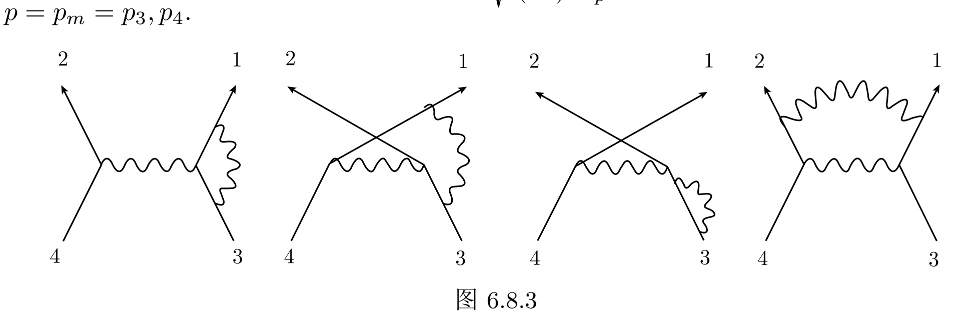


图 6.8.3

我们先研究出射软光子. 考虑图 6.8.4.

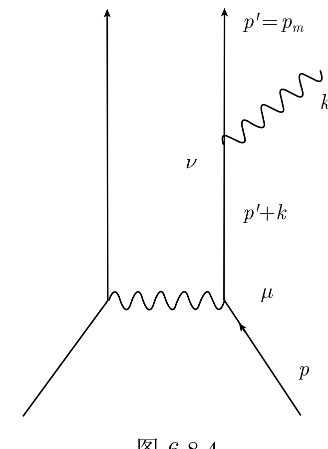


图 6.8.4

Δ 对于 S_2 而言, 出射线上多一个软光子出射点, 散射振幅有如下改变,

$$\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\bar{u}(p') \to \sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\bar{u}(p')\gamma_\nu\frac{(-\mathrm{i}e)(\mathrm{i})(\not{p}'+\not{k}+m)}{(p'+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}. \tag{6.8.3}$$

当 p' 在能壳上时有

$$(p'+k)^2-m^2 = p'^2+2p'k+k^2-m^2 = 2p'k+\lambda, \quad p'k = p'_\mu k^\mu.$$

为方便起见, 我们可以略去不相干的因子 $\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_{p'}}}$, 当 $k \ll p'$ 时可以略去分子上的 $\not{k}$, 上述项变为

$$\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\bar{u}(p')\gamma_\nu\frac{\mathrm{i}(\not{p}'+m)}{2p'k+\lambda+\mathrm{i}\epsilon} \tag{6.8.4}$$

又由

$$\gamma_\nu(\mathrm{i})(\not{p}'+m) = \mathrm{i}(-\not{p}'+m)\gamma_\nu + 2\mathrm{i}p'_\nu, \quad \bar{u}(p')(-\not{p}'+m) = 0, \tag{6.8.5}$$

得到

$$\bar{u}(p') \to \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\bar{u}(p')\frac{2ep'_\nu}{2p'k+\lambda+\mathrm{i}\epsilon} = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\bar{u}(p')\frac{\eta e p'_\nu}{p'k+\eta\left(\frac{\lambda}{2}+\mathrm{i}\epsilon\right)}, \tag{6.8.6}$$

这里 $\eta = 1$. 类似地我们可以推导入射电子线上的出射软光子 (见图 6.8.5)

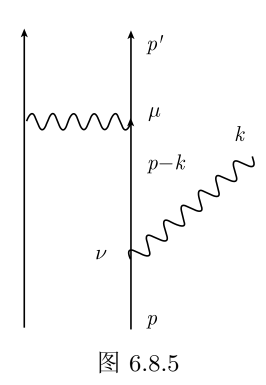


图 6.8.5

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}u(p) &\to \frac{(-\mathrm{i}e)(\mathrm{i})((\not{p}-\not{k})+m)\gamma_\nu}{(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}u(p)\\ &\cong \frac{(-\mathrm{i}e)(\mathrm{i})(\not{p}+m)\gamma_\nu}{-2pk+\lambda+\mathrm{i}\epsilon}\sqrt{\frac{m}{(2\pi)^3\omega_p}}\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}u(p).\end{aligned} \tag{6.8.7}$$

由

$$\mathrm{i}(\not{p}+m)\gamma_\nu = \mathrm{i}\gamma_\nu(-\not{p}+m)+2\mathrm{i}p_\nu, \quad (-\not{p}+m)u(p)=0, \tag{6.8.8}$$

给出

$$u(p)\to\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\frac{2ep_\nu}{-2pk+\lambda+\mathrm{i}\epsilon}u(p)=\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}u(p)\frac{\eta e p_\nu}{pk+\eta\left(\dfrac{\lambda}{2}+\mathrm{i}\epsilon\right)}, \quad \eta=-1. \tag{6.8.9}$$

因此, 对于软光子出射, 不管从入射电子线上出射还是出射电子线上出射, 总是在原来的散射振幅上乘一个 $\sqrt{\dfrac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\dfrac{\eta_m e p_m}{p_m k+\eta_m\left(\dfrac{\lambda}{2}+\mathrm{i}\epsilon\right)}$ 因子, 对于入射电子线, $\eta=-1$, 对于出射电子线, $\eta=1$.

对于软光子出射, 我们得到

$$S_{2\nu}(k)=(\sum_{l=1}^{2}f(A_l))(\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}}\sum_m f_\nu(\alpha_m(k))),$$

其中

$$f_\nu(\alpha_m(k))=\frac{\eta_m e p_{m\nu}}{p_m k+\eta_m(\dfrac{\lambda}{2}+\mathrm{i}\epsilon)}. \tag{6.8.10}$$

$f(A_l)$ 是与图 A_l 相关的散射振幅, $p_{m\nu}$ 是 p_m 的 ν 分量, 在这里 k 是出射电子, 在能壳上, 因此 $k_0=\omega_k=\sqrt{\vec{k}^2+\lambda}$.

对于软光子出射, 出射的元概率是①

$$\mathrm{d}\sigma_2 = \sum_{\nu} S_{2\nu}(k) S_2^{\nu}(k) \mathrm{d}^3 k, \tag{6.8.11}$$

考虑到因子 $\dfrac{\eta_m e p_\nu}{pk + \mathrm{i}\eta_m \epsilon}$, 当分母非零时是实数, 我们发现对软光子出射, 其散射概率是没有软光子出射时的概率乘一个因子,

$$\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_0 \int \mathrm{d}^3 k \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_m f_\nu(\alpha_m(k)) \left[\sum_m f^\nu(\alpha_m(k))\right]. \tag{6.8.12}$$

△ 下面考虑虚光子. 对于图 6.8.6 所示的虚光子, 在出射电子一端有 (虚光子出射)

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \to & \ \bar{u}(p')(-\mathrm{i}e)\gamma_\nu \frac{\mathrm{i}[(\not{p}' + \not{k}) + m]}{(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\ & = \bar{u}(p') \frac{(-\mathrm{i}e) 2\mathrm{i} p'_\nu}{(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \frac{(-\mathrm{i}e)\bar{u}(p')\gamma_\nu(\mathrm{i}\not{k})}{(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\ & = \bar{u}(p') \frac{2ep'_\nu}{(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} + \frac{e\bar{u}(p')\gamma_\nu \not{k}}{(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}, \end{aligned} \tag{6.8.13}$$

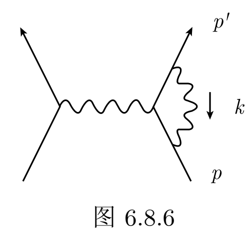


图 6.8.6

在入射电子一端有 (这时虚光子方向仍取出射)

$$\begin{aligned} u(p) \to & \ \frac{\mathrm{i}[(\not{p} - \not{k}) + m]}{(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} (-\mathrm{i}e)\gamma_{\nu'} u(p) \\ & = \frac{2ep_{\nu'}}{(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(p) + \frac{-e\not{k}\gamma_{\nu'}}{(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon} u(p). \end{aligned}$$

因此, 我们对于两根电子外线上用虚光子连接时, 只要把原来的矩阵元乘以因子 $\dfrac{2ep'_\nu + O(k)}{(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ 或 $\dfrac{2ep_\nu + O(k)}{(p-k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$, 然后乘以光子的传播子 $\dfrac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2 - \lambda + \mathrm{i}\epsilon}$ 对四维 k 积分. 这时要注意, 光子线的两端一定有一端出射, 另一端入射, 因此要把因

①我们在本问题的处理中将光子分为四类：标量光子和三个空间方向的光子. 求和时用洛伦兹不变式, 对 ν 求和, 根据 G-B 方法, 这与用极化矢量方法的结果一致.

子中的 k 反号. 也就是我们要计算, 比如对于出射电子线与入射电子线上用虚光子连接 (入射电子线上的光子 k 要反号), 就要计算

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{1}{(p'+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\\&\times(ep'_\nu+O(k))(ep^\nu+O(k))\varPhi(\vec{k})\\=&\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}k_0}{(2\pi)}\frac{1}{(k_0-\omega_k+\mathrm{i}\epsilon)(k_0+\omega_k-\mathrm{i}\epsilon)}\frac{1}{(k_0-k_{01})(k_0-k_{02})}\\&\times\frac{1}{(k_0-k'_{01})(k_0-k'_{02})}\times\cdots,\end{aligned}\tag{6.8.14}$$

其中, $\varPhi(\vec{k})$ 在 $k=0$ 时无奇异. 以下分析表明, 对于虚光子只有 $\dfrac{1}{k^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon}$ 的极点对红外发散有贡献.

分析：我们来分析由 $(p'+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$, $(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon$, $k^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon$ 对于 k_0 的零点, 以便得知当虚光子取 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$ 在对 k_0 积分之后的结果. 在对 S_1(即有一根虚光子线的振幅) 的 k_0 积分中, S_1 是 k_0 的负二次幂以下, 所以对 k_0 在实轴上的积分总可以添加上半平面的大半圆或者下半平面的大半圆而变为回路积分, 然后用留数定理给出结果.

$$\begin{aligned}&(p+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon\\=&(p_0+k_0)^2-(\vec{p}+\vec{k})^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon\\=&[(p_0+k_0)+\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}][(p_0+k_0)-\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon}]\\=&[(p_0+k_0)+\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2}-\mathrm{i}\epsilon'][(p_0+k_0)-\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2}+\mathrm{i}\epsilon'].\end{aligned}\tag{6.8.15}$$

对于 k_0 而言, 有两个零点：

$$k_{01}=\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2}-\mathrm{i}\epsilon-p_0,\quad k_{02}=-\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2}+\mathrm{i}\epsilon-p_0,\tag{6.8.16}$$

第一个零点在实轴之下, 第二个零点在实轴之上. 第一个零点当 $|\vec{p}\,|,|\vec{k}|\ll m$ 时, 由 $p_0^2=\vec{p}^{\;2}+m^2$ 有

$$\sqrt{(\vec{p}+\vec{k})^2+m^2}=\sqrt{\vec{p}^{\;2}+m^2+2\vec{p}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}\cong p_0+\frac{2\vec{p}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}{2\sqrt{\vec{p}^{\;2}+m^2}},\tag{6.8.17}$$

由此得

$$k_{01}\cong\frac{2\vec{p}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}{2p_0}-\mathrm{i}\epsilon,\tag{6.8.18}$$

我们称之为小模零点;

$$k_{02} = -2p_0 - \frac{2\vec{p}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}{2p_0} + \mathrm{i}\epsilon, \tag{6.8.19}$$

我们称之为大模零点.

对于 $(p'+k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon$ 的分析类似：

$$k'_{01} \cong \frac{2\vec{p'}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}{2p'_0} - \mathrm{i}\epsilon, \quad k'_{02} = -2p'_0 - \frac{2\vec{p'}\cdot\vec{k}+\vec{k}^2}{2p'_0} + \mathrm{i}\epsilon. \tag{6.8.20}$$

因此, 如果虚光子是从 p' 线上出射, 再从 p 线上入射, 如图 6.8.6 所示, 则我们可以选择上半平面的大半圆, 在积分 k_0 中避开 k_{01} 和 k'_{01}, 对于 k_{02} 和 k'_{02}, 由于它们的绝对值比 $2m$ 还大, 使虚光子传播子中 $k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = m^2 - \vec{k}^2$ 在 $|\vec{k}|$ 很小时非奇异, 这样在对 $\vec{k}$ 积分时不会有红外发散. 然而当出射电子线与出射电子线上用虚光子连接时, 我们就不可能避开所有的电子传播子分母的小模零点了.

当出射电子线与出射电子线上用虚光子连接时 (图 6.8.7), 就有积分

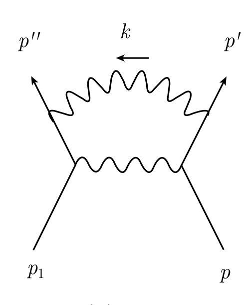


图 6.8.7

$$\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}k_0}{(2\pi)}\frac{1}{k^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon}\frac{1}{(p''-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\frac{1}{(p'+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\times\cdots. \tag{6.8.21}$$

这是因为虚光子是一端 (p' 端) 出而从另一端 (p'' 端) 进.

我们分析 (6.8.21) 式分母的零点.

(1) $k_0^2 - \vec{k}^2 - \lambda + \mathrm{i}\epsilon = [k_0 - (\sqrt{\vec{k}^2+\lambda} - \mathrm{i}\epsilon')][k_0 + (\sqrt{\vec{k}^2+\lambda} - \mathrm{i}\epsilon)]$;

(2)
$$\begin{aligned}&(p_0'' - k_0)^2 - (\sqrt{(\vec{p}\,''-\vec{k})^2+m^2} - \mathrm{i}\epsilon)^2\\ &=[p_0'' - k_0 - (\sqrt{(\vec{p}''-\vec{k})^2+m^2} - \mathrm{i}\epsilon')]\\ &\quad\times[p_0'' - k_0 + (\sqrt{(\vec{p}''-\vec{k})^2+m^2} - \mathrm{i}\epsilon')];\end{aligned} \tag{6.8.22}$$

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & (p_0'+k_0)^2-(\sqrt{(\vec{p'}+\vec{k})^2+m^2-\mathrm{i}\epsilon})^2 \\
&= [p_0'+k_0-(\sqrt{(\vec{p'}+\vec{k})^2+m^2}-\mathrm{i}\epsilon')] \\
&\quad \times[p_0'+k_0+(\sqrt{(\vec{p'}+\vec{k})^2+m^2}-\mathrm{i}\epsilon')].
\end{aligned}
$$

因此, 对于 k_0 而言, 有以下零点.

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad k_{01}=\sqrt{\vec{k}^2+\lambda}-\mathrm{i}\epsilon',\quad k_{02}=-\sqrt{\vec{k}^2+\lambda}+\mathrm{i}\epsilon'; \\
&(2)\quad k_{01}^{''}=p_0^{''}-\sqrt{(\vec{p}''-\vec{k})^2+m^2}+\mathrm{i}\epsilon',\quad k_{02}^{''}=p_0^{''}+\sqrt{(\vec{p}''-\vec{k})^2+m^2}-\mathrm{i}\epsilon'; \\
&(3)\quad k_{01}'=-p_0'+\sqrt{(\vec{p'}+\vec{k})^2+m^2}-\mathrm{i}\epsilon', k_{02}'=-p_0'-\sqrt{(\vec{p'}+\vec{k})^2+m^2}+\mathrm{i}\epsilon'.
\end{aligned} \tag{6.8.23}
$$

其中, $k_{01},k_{02},k_{01}',k_{01}^{''}$ 都是 $\sim|\vec{k}|$, 称为小模零点. $k_{02}',k_{02}^{''}\sim m$ 称为大模零点, 大模零点不会在 $|\vec{k}|\to 0$ 时形成红外发散.

我们考虑实轴加下半大圆积分, 将会圈进 k_{01},k_{01}' 两个小模零点.

(1) 对 $k_{01},\oint\dfrac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}$ 给出 $k=(\omega_k,\vec{k})$, 并使电子传播子的分母可简化为 $(-2p^{''}k)$ 和 $(-2p'k)$, 这是由于 p' 和 p'' 都在能壳上, (6.8.21) 式的分母成为

$$
\mathrm{i}2(\omega_k-\mathrm{i}\epsilon)((p^{''}-k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon)((p'+k)^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon), \tag{6.8.24}
$$

i 与光子传播子分子 $-\mathrm{i}g_{\mu\nu}$ 中的 $-\mathrm{i}$ 相乘得 1, 最后分母可写成

$$
(2\omega_k-\mathrm{i}\epsilon)(-2p^{''}k)(2p'k), \tag{6.8.25}
$$

正好与软光子出射时差一符号 (软光子出射时, 对于电子线都是出射线或都是入射线时 $2p''k$ 和 $2p'k$ 前面的符号是相同的)!

(2) 对于极点 $k_{01}',\oint\dfrac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}$ 给出分母为

$$
\sim(k_{01}^{'2}-\vec{k}^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon)(k_{01}^{''}-k_{01}')(2p_0^{''}-k_{01}^{''}-k_{01}')(2p_0'+2k_{01}'). \tag{6.8.26}
$$

下面计算表明, 由这个 $k=(k_{01}',\vec{k})$, 给出的 $\displaystyle\int\mathrm{d}^4\vec{k}$, 它的实部是没有红外发散的, 为此我们做下列推导.

(6.8.26) 式的因子 $k_{01}^{''} - k_{01}^{\prime}$ 的精确表达式为

$$
\begin{aligned}
k_{01}^{''} - k_{01}^{\prime} &= p_0^{''} - \sqrt{p_0^{''2} - 2\vec{p}^{\,\prime\prime} \cdot \vec{k} + \vec{k}^2} + \mathrm{i}\epsilon - (-p_0^{\prime} + \sqrt{{p_0^{\prime}}^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{k} + \vec{k}^2} - \mathrm{i}\epsilon) \\
&\equiv a - \sqrt{b} - \sqrt{c} + 2\mathrm{i}\epsilon \\
&\cong \frac{2\overrightarrow{p^{\prime\prime}} \cdot \overrightarrow{k} - \overrightarrow{k}^2}{2p_0^{\prime\prime}} + \frac{2\overrightarrow{p^{\prime}} \cdot \overrightarrow{k} + \overrightarrow{k}^2}{2p_0^{\prime}} + 2\mathrm{i}\epsilon \equiv z + 2\mathrm{i}\epsilon \\
&\cong \frac{(\overrightarrow{p^{\prime\prime}} + \overrightarrow{p^{\prime}}) \cdot \overrightarrow{k}}{m} + ck^2 + 2\mathrm{i}\epsilon.
\end{aligned}
\tag{6.8.27}
$$

改写

$$
\begin{aligned}
z + 2\mathrm{i}\epsilon &= |\frac{\vec{p}^{\,\prime\prime} + \vec{p}^{\,\prime}}{m}| k\cos\theta + ck^2 + 2\mathrm{i}\epsilon \\
&\equiv uk\cos\theta + ck^2 + 2\mathrm{i}\epsilon,
\end{aligned}
\tag{6.8.28}
$$

令 $\cos\theta = x$ 得

$$
z + 2\mathrm{i}\epsilon = uk[(x + c^{\prime}k) + \mathrm{i}\epsilon^{\prime}]. \tag{6.8.29}
$$

由

$$
\frac{1}{x + \mathrm{i}\epsilon} = P\frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta(x), \tag{6.8.30}
$$

得

$$
\frac{1}{z + 2\mathrm{i}\epsilon} = \frac{1}{uk}\left[(P\frac{1}{x + c^{\prime}k}) - \mathrm{i}\pi\delta(x + c^{\prime}k)\right]. \tag{6.8.31}
$$

其中, P 是主值 (在积分中使用, 代表自分母为 0 的点对称地进行两边积分, 再求和). 注意到 $\int \mathrm{d}^3\overrightarrow{k} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\cos\theta k^2\mathrm{d}k$. 图 6.8.7 的费恩曼积分中与 $k_{01}^{\prime}$ 相关的积分为

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{[e^2p_\nu^{\prime}p^{\nu^{\prime\prime}} + k(\cdots)]\varPhi(1, k\cos\theta, k\sin\theta\cos\varphi, k\sin\theta\cos\varphi)}{(k_{01}^{\prime 2} - \overrightarrow{k}^2 - \lambda \pm \mathrm{i}\epsilon)(z + \mathrm{i}\epsilon)(2p_0^{\prime\prime} - k_{01}^{\prime\prime} - k_{01}^{\prime} \pm \mathrm{i}\epsilon)(2p_0^{\prime} + 2k_{01}^{\prime} - \mathrm{i}\epsilon)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}\phi\int \mathrm{d}xk^2\mathrm{d}k\frac{1}{uk}(P\frac{1}{x + c^{\prime}k} - \mathrm{i}\pi\delta(x + c^{\prime}k)) \times O(\frac{1}{k^2}) \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}
\tag{6.8.32}
$$

其中, $O(\frac{1}{k^2})$ 是分母的第一项给出的因子,

$$I_1 \sim \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}k}{k} P \frac{1}{x+c'k} = \int \frac{\mathrm{d}k}{k} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P \frac{1}{x+c'k} \sim \int \frac{\mathrm{d}k}{k} c''k = \text{有限}, \quad (6.8.33)$$

$$I_2 = -\pi \mathrm{i} \times \text{实数}. \quad (6.8.34)$$

因此, I_1 中第一项是收敛的, 不带来红外发散.

I_2 的确有红外发散, 但是它的系数为 $\pi\mathrm{i}$, 是纯整数, 因此对最低阶散射概率没有贡献. 以上是关于两根电子出射线上用虚光子连接的情形, 两根电子入射线情形相似. 分析完毕 □

到这里为止, 我们证明了只需要考虑虚光子中由传播子 $\frac{\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2-\lambda+\mathrm{i}\epsilon}$ 的极点给出的红外发散贡献. 其贡献如下所述.

(1) 对于图 6.8.8 的过程

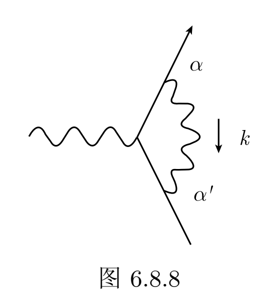


图 6.8.8

散射振幅为

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{2ep_\nu}{2pk} \frac{2ep'^{\nu}}{2p'k} \times f(A_l) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} f(\alpha_\nu \alpha'^{\nu}) f(A_l), \quad (6.8.35)$$

其中

$$f(\alpha_\nu \alpha'^{\nu}) = \frac{ep_\nu}{pk} \frac{ep'^{\nu}}{p'k}. \quad (6.8.36)$$

我们对比软光子出射部分 (6.8.12) 式, 给出的因子为

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} f_\nu(\alpha(k)) f^\nu(\alpha'(k)) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(-\frac{ep_\nu}{pk}\right) \left(\frac{ep'^{\nu}}{p'k}\right), \quad (6.8.37)$$

正好抵消, 也就是有

$$f_\nu(\alpha(k)) f^\nu(\alpha'(k)) = -f(\alpha_\nu \alpha'^{\nu}). \quad (6.8.38)$$

(2) 对于图 6.8.9 的过程

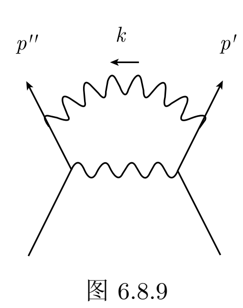


图 6.8.9

虚光子贡献为

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{2ep'_\nu}{2p'k} \frac{2ep''^\nu}{-2p''k} \times f(A_l) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} f(\alpha'_\nu(k)\alpha''^\nu(k)) f(A_l) \tag{6.8.39}$$

考虑软光子出射部分 (6.8.12) 式, 给出的因子为

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} f_\nu(\alpha'(k)) f^\nu(\alpha''(k)) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} (\frac{ep'_\nu}{p'k})(\frac{ep''^\nu}{p''k}) \tag{6.8.40}$$

这两项也抵消. 也就是有

$$f(\alpha'_\nu \alpha''^\nu) = -f_\nu(\alpha') f^\nu(\alpha''). \tag{6.8.41}$$

(3) 对于图 6.8.10 的过程

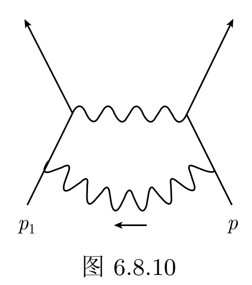


图 6.8.10

虚光子贡献为

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{\mathrm{e}p_{1\nu}}{-p_1 k} \frac{\mathrm{e}p^\nu}{pk} \times f(A_l) \equiv \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} f(\alpha_{1\nu}\alpha^\nu) f(A_l), \tag{6.8.42}$$

而软光子的贡献为 $\Delta\sigma_0$ 乘一个因子 ((6.8.12) 式)

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} f_\nu(\alpha_1(k)) f^\nu(\alpha(k)) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(\frac{ep_{1\nu}}{p_1 k}\right) \left(\frac{ep^\nu}{pk}\right) \tag{6.8.43}$$

也相抵消. 图 6.8.9 和图 6.8.10 的分析, 对虚光子在同一条入 (出) 射电子线上时也正确.

我们再回顾软光子和虚光子的费恩曼图. 对于软光子, 根据推导 $S_{2\nu}=(f(A_1)+f(A_2))(f_\nu(\alpha_1)+\cdots+f_\nu(\alpha_4))$ 而 $d\sigma_2=\sum\limits_\nu\int|S_{2\nu}S_2^\nu|\mathrm{d}^3k$, 因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_2=&|f(A_1)+f(A_2)|^2\sum_\nu\int|f_\nu(\alpha_1)+f_\nu(\alpha_2)+f_\nu(\alpha_3)+f_\nu(\alpha_4)|\\&\times|f^\nu(\alpha_1)+\cdots+f^\nu(\alpha_4)|\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^32\omega_k}\\=&|f(A_1)+f(A_2)|^2\sum_\nu\int(f_\nu(\alpha_1)+\cdots+f_\nu(\alpha_4))(f^\nu(\alpha_1)+\cdots+f^\nu(\alpha_4))\\&\times\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^32\omega_k},\end{aligned}\tag{6.8.44}$$

因为 $f(\alpha_i)$ 均为实数. 我们得到

$$\mathrm{d}\sigma_2=\mathrm{d}\sigma_0\sum_\nu\int\mathrm{d}^3k\frac{1}{(2\pi)^32\omega_k}(\sum_i f_\nu(\alpha_i))(\sum_j f^\nu(\alpha_j)).\tag{6.8.45}$$

对虚光子有

$$S_1=(f(A_1)+f(A_2))(1+\sum_\nu\int\mathrm{d}^3k\frac{1}{(2\pi)^32\omega_k}\sum_{i<j}f(\alpha_{i\nu}\alpha_j^\nu)+\mathrm{i}N)\tag{6.8.46}$$

其中, 由 (6.8.35) 式 ~(6.8.43) 式, 有

$$f(\alpha_{i\nu}\alpha_j^\nu)=-f_\nu(\alpha_i)f^\nu(\alpha_j),\quad 当i\neq j时\tag{6.8.47}$$

(6.8.46) 式中的 $\mathrm{i}N$ 表示 (6.8.34) 式的贡献.

因此, S_1+S_0 对应的散射概率为

$$\mathrm{d}\sigma_1=|f(A_1)+f(A_2)|^2(1+2\sum_\nu\sum_{i<j}\int f(\alpha_{i\nu}\alpha_j^\nu)\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^32\omega_k}).\tag{6.8.48}$$

因为 g_ν^ν 的相位为实数. 总的散射概率为

$$\mathrm{d}\sigma_1+\mathrm{d}\sigma_2-\mathrm{d}\sigma_0=|f(A_1)+f(A_2)|^2(\sum_i\int\mathrm{d}^3kf_\nu(\alpha_i)f^\nu(\alpha_i))\frac{1}{(2\pi)^32\omega_k}.\tag{6.8.49}$$

而有一根虚光子线的图 F_1 中的图 α_i^2 是电子自能图, 由于重整化, 使 $\bar{u}(p')\mathrm{i}S_F'(p')=\bar{u}(p')\frac{\mathrm{i}}{\not{p}-m+\mathrm{i}\epsilon}$, 与没有 α_i^2 即自能图时一样, 所以 F_1 中的 α_i^2 对 $\mathrm{d}\sigma_1$ 没有贡献. 幸

好, 在 F_1 中当入射电子线与出射电子线用虚光子连接时, 形成一个顶角修正图, 而在重整化过程中, 我们要加一项 $\sim Z_2'\gamma_\mu$, 计算证明, A_1 和 A_2 各自有两处顶角修正, 一共四项, 正好抵消软光子的 $\sum\limits_i f_\nu(\alpha_i)f^\nu(\alpha_i)$ 的贡献 (红外发散).

证明如下：如图 6.8.11 所示,

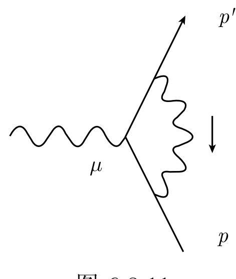


图 6.8.11

对顶角修正 $\Lambda_\mu(p',p)$.

我们要求

$$\tilde{\Lambda}_\mu(p',p) = \Lambda_\mu(p',p) - Z_2'\gamma_\mu \tag{6.8.50}$$

满足以下重整化条件：当 p 在能壳上时有

$$\bar{u}(p)\tilde{\Lambda}_\mu(p,p)u(p) = 0. \tag{6.8.51}$$

这条件给出的 Z_2' 与在能壳上的 p 无关. 因而由重整化条件, 有

$$\bar{u}(p)\Lambda_\mu(p,p)u(p) = Z_2'\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p).$$

所以 Z_2' 在虚光子的小 k 部分的贡献为 (由于 p 和 p' 均在能壳上, $Z_2'(p) = Z_2'(p')$)

$$Z_2' = e^2\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\frac{p_\nu p^\nu}{(pk)(pk)} = e^2\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\frac{p'_\nu p'^\nu}{(p'k)(p'k)} \tag{6.8.52}$$

(见 (6.8.36) 式).

因此, 当使用 $\tilde{\Lambda}_\mu(p',p)$ 代替 $\Lambda_\mu(p',p)$ 作费恩曼积分时, 有

$$\bar{u}(p')\tilde{\Lambda}_\mu(p',p)u(p) = \bar{u}(p')[\Lambda_\mu(p',p) - \frac{1}{2}Z_2'\gamma_\mu - \frac{1}{2}Z_2'\gamma_\mu]u(p). \tag{6.8.53}$$

于是

$$\begin{aligned}\bar{u}(p')\tilde{\Lambda}_\mu(p',p)u(p) =& \bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)\times e^2\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\\ &\times\left\{\frac{p'_\nu p^\nu}{(p'k)(pk)} - \frac{1}{2}\frac{p_\nu p^\nu}{(pk)(pk)} - \frac{1}{2}\frac{p'_\nu p'^\nu}{(p'k)(p'k)}\right\},\end{aligned} \tag{6.8.54}$$

第一项正是图 6.8.8, 即 (6.8.35) 式对应的项, 后面两项正好与由 $\mathrm{d}\sigma_2$ 中给出的多余项相抵消. 因为, 这时 $\sum_\nu \int \mathrm{d}^3 k f_\nu(\alpha_i) f^\nu(\alpha_i) \frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}$ 等于

$$e^2 \sum_\nu \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{(-p_\nu)(-p^\nu)}{(pk)(pk)}$$

和

$$e^2 \sum_\nu \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \frac{(p'_\nu)(p'^\nu)}{(p'k)(p'k)}.$$

注意在 $\mathrm{d}\sigma_1$ 中 (6.8.54) 式要乘以 2, 理由与 (6.8.48) 式中第二项中出现的“2”相同. 因此, 正好抵消.

我们还须考虑相空间. 原来的问题 p_1, p_2 出射, p_3, p_4 入射. 设入射不变, 我们要求

$$p_{10}^2 - \vec{p}_1^2 = m^2, \tag{6.8.55}$$

$$p_{20}^2 - \vec{p}_2^2 = m^2, \tag{6.8.56}$$

$$p_{10} + p_{20} = p_{30} + p_{40}, \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \tag{6.8.57}$$

一共 6 个方程. 因此, 对任何 $p, p_2 = p_3 + p_4 - p_1$ 完全确定, 而且还有对 $\vec{p}_1$ 有额外要求, 对任何 $\vec{p}_1$ 方程 (6.8.55) 确定 p_{10}, 方程 (6.8.56) 就给出对 $\vec{p}_1$ 的额外要求, 即 $\vec{p}_1$ 只有两个自由度. 简而言之, 当 $p_3 p_4$ 确定时, $p_1 p_2$ 是 8 个变量, 自由度是 $8 - 6 = 2$.

现在回到有光子出射问题: 设软光子 $\vec{k}$ 的 3 个分量是任意的, 由 $p_2 = p_3 + p_4 - p_1 - k$, p_2 同样完全确定.

由方程 (6.8.55) 确定 p_{10}, 方程 (6.8.56) 成为

$$\begin{aligned}
&(p_{30} + p_{40} - p_{10} - |\vec{k}|)^2 - (\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{k})^2 = m^2 \\
&\Rightarrow (p_{30} + p_{40} - |\vec{k}| - \sqrt{\vec{p}\,_1^2 + m^2})^2 - (\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{k})^2 = m^2
\end{aligned} \tag{6.8.58}$$

同样对 $\vec{p}_1$ 的 3 个分量有一个约束条件, $\vec{p}_1$ 有两个自由度, 这与没有光子出射时是一样的. 但是这个约束与 $\vec{k}$ 有关. 也就是当 $p_3, p_4, \vec{k}$ 确定时, 方程数和变量数与上面相同, 因而自由度仍为 2.

例 考虑质心系一条直线上的问题

以上说明, 弹性散射和有一个光子出射的情形, 相空间的自由度相同. 添加更多光子出射时情况相同.

到此为止, 我们证明了弹性散射 $(p_3, p_4 \to p_1, p_2)+$ 有一个虚光子线的散射的概率 $\mathrm{d}\sigma_1$ 与有一个光子出射 $(p_3, p_4 \to p_1, p_2, k)$ 的概率 $\mathrm{d}\sigma_2$ 之和 $\mathrm{d}\sigma_1 + \mathrm{d}\sigma_2$ 是没有红外发散的. 只要光子 (虚光子和实出射光子) 的动量下限 $\lambda_<$ 充分小, $\mathrm{d}\sigma_1 + \mathrm{d}\sigma_2$ 与 $\lambda_<$

无关. 在 $\mathrm{d}\sigma_2$ 中当只考虑出射光子的动量在 $\lambda_>$ 和 $\lambda_<$ 之间时, 也就是当在整个事件中只考虑 p_1 和 p_2 的能量之和与 p_3, p_4 的能量之和的差在 $\lambda_>$ 及以下时, 这样的 $\mathrm{d}\sigma_2'$ 只是前面 $\mathrm{d}\sigma_2$ 的一部分, 而这时 $\mathrm{d}\sigma_1+\mathrm{d}\sigma_2'$ 就是符合条件 $p_{10}+p_{20}-p_{30}-p_{40} \leqslant \lambda_>$ 的概率. 这个概率是以 $\ln\lambda_>$ 的形式出现在计算结果中的. 当 $\lambda_> \to 0$, $\mathrm{d}\sigma_1 + \mathrm{d}\sigma_2'$ 是发散的. 这是因为在 $\lambda_>$ 以下直到 $\lambda_<(\to 0)$ 的 $\vec{k}$ 空间的积分都抵消掉了, 然而在 $\lambda_>$ 以上的积分部分只有虚光子有, 而出射光子部分因为不符合 $p_{10}+p_{20}-p_{30}-p_{40} \leqslant \lambda_>$, 所以没有计入. 这部分虚光子的积分 $\sim \ln\lambda_>$. 这也就是说, 当 $\lambda_> \to 0$ 时, 这个结果是发散的, 是趋于无穷的. 事实上, 当 $\lambda_> \to 0$ 时, 即要求计算不放射软光子的散射过程时, 散射截面是趋于零的. 在这里的无穷大只是表观的, 因为这里只是一级微扰. 举一个比方说, 下列级数 A,

$$A = \mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots ,$$

当 $x \to \infty$ 时, $A \to 0$. 但是如果只取一级微扰, 就会得到发散的结果. 关于这一点, 在 Weinberg 的《The Quantum theory of Fields》中有更深入的分析.

第 7 章　重整化 (二) 重整化的 BPHZ 方案

7.1　单圈图重整化与泰勒展开

以上我们研究了单圈图的发散以及它们的重整化, 下面讨论一般情况. 首先, 以 QED 为例, 我们说明单圈图的重整化方案在多圈图的许多情况下必须进一步修正. 然后, 给出一般情况下在动量空间的费恩曼被积函数的重整化方案和收敛定理, 同时证明这个方案在各级重整化中的相容性. 这个方案是 Bogoliubov, Parasiuk, Hepp 和 Zimmermann 给出的, 称为 BPHZ 方案. 我们讨论 Zimmermann 给出的抵消项相当于在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中加进什么力学量项, 从而给出可重整化场和不可重整化场的区别.

在前面的单圈图重整化中, 我们发现抵消项的形式实际上是图值 Γ, 即费恩曼积分对外线动量 q_a 的泰勒展开, 展开的初值可取在 $k=0$(光子)、$\not{p}=m$(电子), 等等. 重整化后的值就是 d 级 (d 是表观发散度) 泰勒展开的余项,

$$\widetilde{\Gamma}(\text{重整后的值}) = (1-t_{q_a}^d)\Gamma, \tag{7.1.1}$$

其中

$$\Gamma = \int \mathrm{d}^4k_1\cdots\mathrm{d}^4k_m I_\Gamma(q_a,k_j), \quad \widetilde{\Gamma} = \int \mathrm{d}^4k_1\cdots\mathrm{d}^4k_m(1-t_{q_a}^d)I_\Gamma(q_a,k_j), \tag{7.1.2}$$

抵消项 $=-t_{q_a}^d\Gamma$, 是 q_a 的多项式. BPHZ 方案的展开是以动量 $=0$ 为初值进行的.

以 0 为基点的泰勒展开是这样定义的：

当 $t\geqslant 0$, 定义

$$\begin{aligned} t^d\, f(k) = {} & f(0) + k_\mu\frac{\partial}{\partial k_\mu}f(k)\Big|_{k=0} + \frac{1}{2}k_\mu k_\nu\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{\partial}{\partial k_\nu}f(k)\Big|_{k=0} + \cdots \\ & + \frac{1}{d!}k_{\mu_1}k_{\mu_2}\cdots k_{\mu_d}\frac{\partial}{\partial k_{\mu_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial k_{\mu_d}}f(k)\Big|_{k=0}; \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

当 $d<0$, 定义

$$t^d f(k) = 0. \tag{7.1.4}$$

定义余项：

$$(1-t^d)f(k) = \widetilde{f}(k). \tag{7.1.5}$$

其中, $\widetilde{f}(k)$ 是 k 的 $d+1$ 次以上的函数.

例如, 对 $\Pi^{\mu\nu}(k)$ 的重整化过程我们可以换一个观点看.

已知：

$$\Pi^{\mu\nu}(k)=\int \mathrm{d}^4 q I_\Gamma(q,k),\quad \Pi_R^{\mu\nu}(k)=\int \mathrm{d}^4 q I_{\Gamma_R}(q,k). \tag{7.1.6}$$

回顾第 6 章 (6.6.24) 式, $\widetilde{\Pi}_R^{\mu\nu}(k)=(1-t_k^{(2)})\Pi_R^{\mu\nu},\quad \widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)=\lim\limits_{M^2\to\infty}\widetilde{\Pi}_R^{\mu\nu}$, 考虑到泰勒展开是对 k_μ 进行的, 与积分变量 q_μ 无关, 因而可以作下述推导

$$t^{(2)}\Pi_R^{\mu\nu}(k)=\Pi_R^{\mu\nu}(0)+k_\mu\frac{\partial}{\partial k_\mu}\Pi_R^{\mu\nu}(k)\Big|_{k=0}+\frac{1}{2}k_\mu k_\nu\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{\partial}{\partial k_\nu}\Pi_R^{\mu\nu}(k)\Big|_{k=0}, \tag{7.1.7}$$

其中

$$t_k^{(2)}\Pi_R^{\mu\nu}(k)=\int \mathrm{d}^4 q t_k^{(2)} I_{\Gamma_R}, \tag{7.1.8}$$

并由此得到

$$\begin{aligned}(1-t^{(2)})\Pi_R^{\mu\nu}(k)&=k\text{的 3 次以上函数}=\widetilde{\Pi}_R^{\mu\nu}(k)=\int \mathrm{d}^4 q(1-t_k^{(2)})I_{\Gamma_R}(k,q)\\&\xrightarrow{M^2\to\infty}\int \mathrm{d}^4 q(1-t_k^{(2)})I_\Gamma(k,q)=\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k).\end{aligned} \tag{7.1.9}$$

其中, M^2 是截断参数. 也就是说用泰勒展开被积函数, 直接可以得到有限的 $\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)$. 这个计算的前提是要进行正常化, 否则计算就没有意义了. 然而, 用这计算可以绕过正常化手续, 直接得到结果.

在正常化后, 重整化的抵消项就是原来函数的泰勒展开得到的外动量的多项式. 它们对应相关的 $\Delta\mathscr{H}_I(=-\Delta\mathscr{L}_I)$ 中的力学量, 这些力学量是由场量及其导数组成的. 在 cutoff(截断参数)$\to\infty$ 时, 形式上还可以认为 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中有这些力学量, 只是系数是发散常数而已.

7.2 正 规 图

前面我们介绍了单圈图的重整化. 通过引入新的 $\Delta\mathscr{L}_I$, 即抵消项, 可以抵消单圈图的发散. 在高阶微扰中, 这些在低阶计算中引入的新 “顶角” 仍然会发生作用, 抵消高阶微扰中一部分发散.

我们先在下面讨论, 什么样的高阶发散图才需要在低阶发散图已经重整化的基础上进一步进行重整化, 引入新的顶角.

容易看出, 如果一张发散图的费恩曼积分是由前面的单圈图相乘构成的, 比如

$$\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2\times\cdots \tag{7.2.1}$$

(注意, 不是被积函数相乘而是积分的值相乘), 只要对各个图分别重整化就可以了. 例如, 图 7.2.1 中的三张图就是这样.

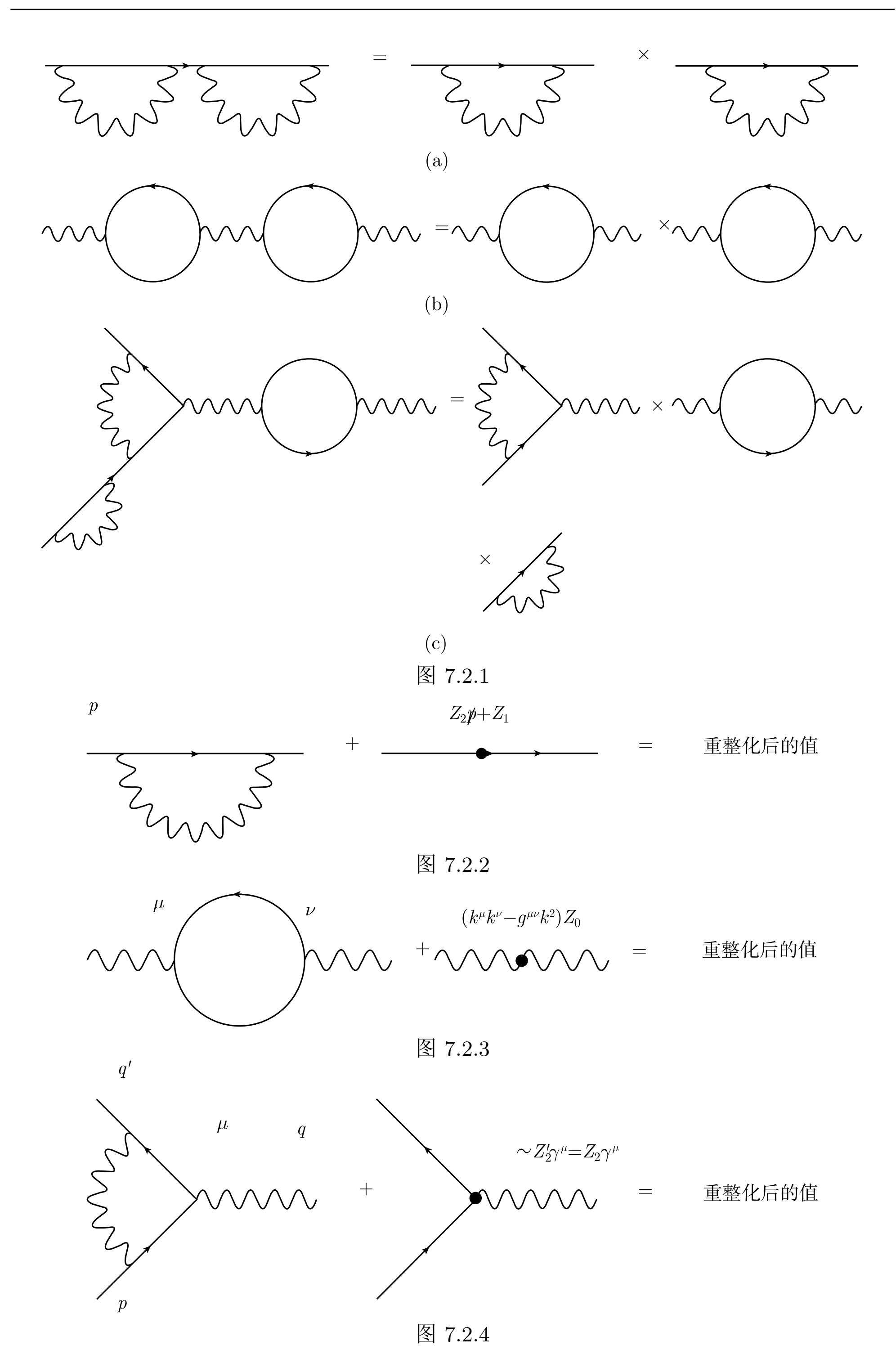


图 7.2.1

图 7.2.2

图 7.2.3

图 7.2.4

对于这样的发散图相应的重整化方案可以用下式表示,

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}=\widetilde{\Gamma}_1\times\widetilde{\Gamma}_2\times\cdots&=(1-t_{\Gamma_1}^{d(\Gamma_1)})\Gamma_1(1-t_{\Gamma_2}^{d(\Gamma_2)})\Gamma_2\cdots\\&=\int\mathrm{d}k_1\cdots\mathrm{d}k_m(1-t_{\Gamma_1}^{d(\Gamma_1)})(1-t_{\Gamma_2}^{d(\Gamma_2)})\cdots I_\Gamma(q_a,k_j).\end{aligned}\tag{7.2.2}$$

其中, 在积分号内的泰勒展开式是指对 Γ 的相应子图 $\Gamma_1\cdots$ 所作的对该子图外线动量的泰勒展开. 这时相应在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中要添加的力学量就只须是单圈图的抵消项即可. 这是因为从费恩曼图的组成规则看, 只要该图符合费恩曼图给出的结合键的要求, 并将键结合完毕, 则该图就一定会出现在相应的微扰项中.

举例来说, 如果有图 7.2.5,

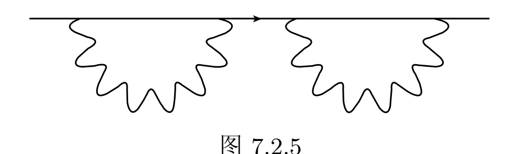


图 7.2.5

则在添加抵消项于哈密顿量 (对应于图 7.2.2) 后, 一定有 (包括原来的项) 图 7.2.6 出现,

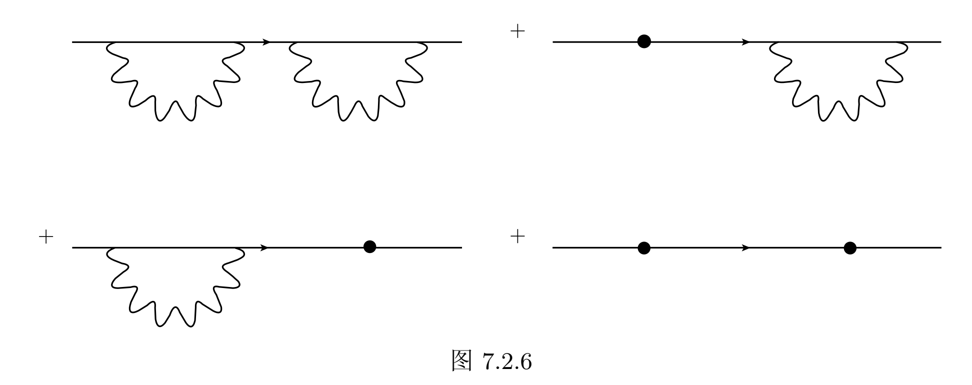


图 7.2.6

合在一起变为图 7.2.7,

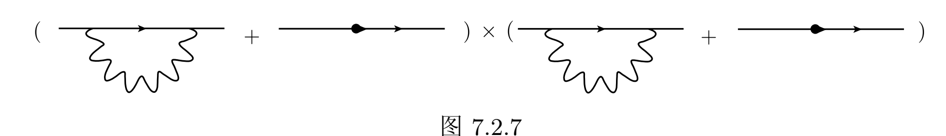


图 7.2.7

这是有限值.

在一般情形, 一个费恩曼图的费恩曼积分 Γ 可以分解为几个 Γ_i 的乘积有几种情形. 一类是图 Γ_i 与 Γ_j 互不连接, 比如图 7.2.8.

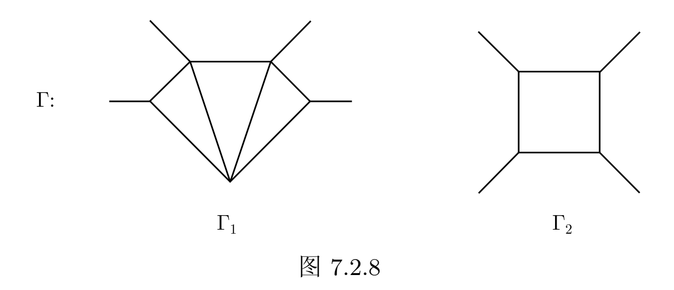


图 7.2.8

另一类是 Γ_i 与 Γ_j 之间只有一根传播线相连, 比如图 7.2.9.

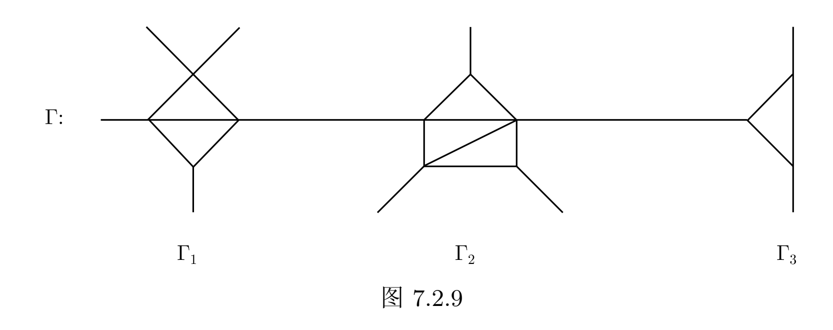


图 7.2.9

或者两种情形都存在. 我们都有前面说的结果, 也就是, 只要将各个 Γ_i 都重整化, (在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中添加抵消项) 则 Γ 就自然也重整化了.

对于 $\Gamma=\prod\limits_i\Gamma_i$, 令对 Γ_i 添加的抵消项为 Γ_i', 令 $\widetilde{\Gamma}_i=\Gamma_i+\Gamma_i'=$ 有限值, 则 $\widetilde{\Gamma}=\prod\limits_i\widetilde{\Gamma}_i=$ 有限值.

$$\widetilde{\Gamma}=\prod_i\widetilde{\Gamma}_i=\prod_i(\Gamma_i+\Gamma_i')=\Gamma_1\cdots\Gamma_n+\Gamma_1'\cdots\Gamma_n+\cdots+\Gamma_1'\cdots\Gamma_n'. \tag{7.2.3}$$

在 (7.2.3) 式中, 第一项是图 Γ 的费恩曼积分, 其余项是抵消项, 它们都符合费恩曼图的构图规则 (就是所有外线和顶角的顶角线的键 (空圈) 都结合完毕), 因而也当然会在相应的微扰项中出现, 所以不必再为重整化 Γ 在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中添加新的项了. 比如, QED 中作了单圈图的重整化 (图 7.2.2~ 图 7.2.4), 图 7.2.10 不用再在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中添加新项即可自然达到重整化的目的.

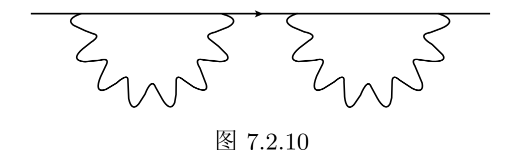


图 7.2.10

此例已在上页说明.

由 (7.2.3) 式, 对于图 7.2.11

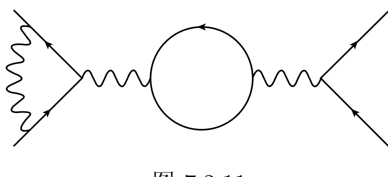


图 7.2.11

在添加单圈图重整化的抵消项到 $\Delta\mathscr{H}_I = -\Delta\mathscr{L}_I$ 之后 (图 7.2.2～ 图 7.2.4), 微扰展开中自然会出现如下图相应的项 (图 7.2.12),

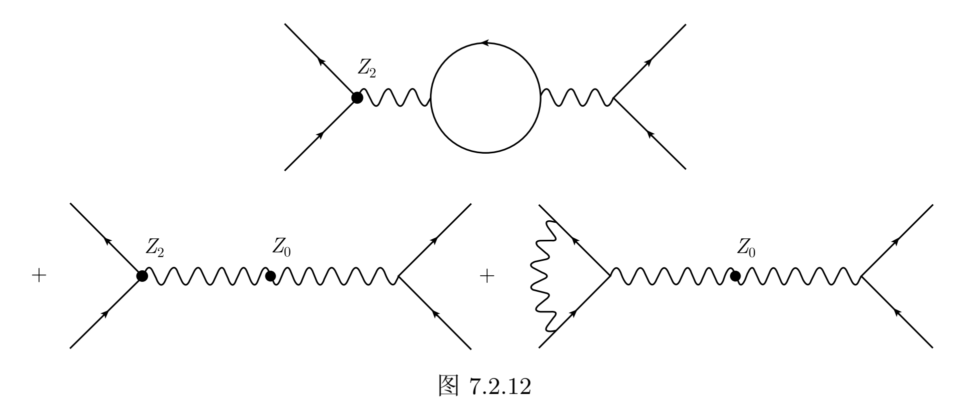


图 7.2.12

合在一起给出与图 7.2.13 对应的重整化之后的值.

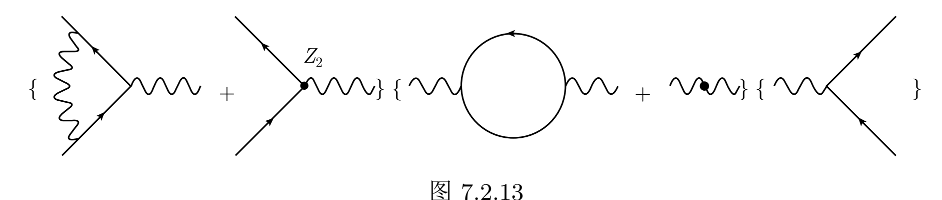


图 7.2.13

这个结论对不连接的 Γ 图当然更容易看出来. 因此, 我们只需考虑这样的图的重整化：它拆去任何一根线, 仍然是一张连接图, 这种图称为正规图, 只有它们才需要引进新的 $\Delta\mathscr{H}_I$ 项. 在高阶重整化的过程中, 需要对发散的正规图引进新的抵消项, 这一点从下一节可以更清楚地看到.

7.3 交叉发散与萨拉姆方案

在过去单圈图的例子中, 正规图的重整化似乎都可以用公式 $R_\Gamma = \prod_c (1 - t^d_{\gamma_c}) I_\Gamma$ 来求出重整化后的费恩曼被积函数, 这里的 γ_c 是 Γ 的所有发散的正规子

图 (如果 $D(\Gamma) \geqslant 0$, 也包括 Γ 自己). 从下面的例子我们看到, 有的时候这方案是不行的. 下面举例说明.

这个例子是交叉发散的电子自能图. 在外线为一根电子线的二圈图中有这样一张图 (图 7.3.1). 它的相应费恩曼积分是

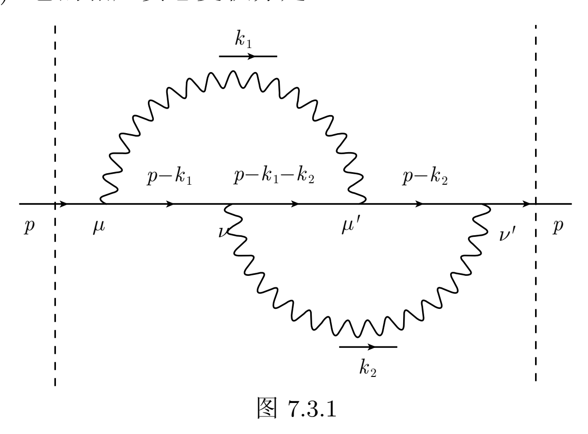


图 7.3.1

$$
\begin{aligned}
f(\Gamma) = & \mathrm{i}e^4 \int \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{(2\pi)^4} \gamma^{\nu'} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^{\mu'} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \\
& \times \gamma^{\nu} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^{\mu} \frac{g_{\mu\mu'}}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{g_{\nu\nu'}}{k_2^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
= & \frac{\mathrm{i}e^4}{(2\pi)^8} \int \mathrm{d}^4 k_1 \mathrm{d}^4 k_2 \, \gamma^{\nu} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^{\mu} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \\
& \times \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_{\mu} \frac{1}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon} \frac{1}{k_2^2 + \mathrm{i}\epsilon} \\
\equiv & \frac{\mathrm{i}e^4}{(2\pi)^8} \int \mathrm{d}^4 k_1 \mathrm{d}^4 k_2 \, I_\Gamma.
\end{aligned} \tag{7.3.1}
$$

考虑在单圈时为重整化引入的抵消项 (顶角修正, 如图 7.3.2):

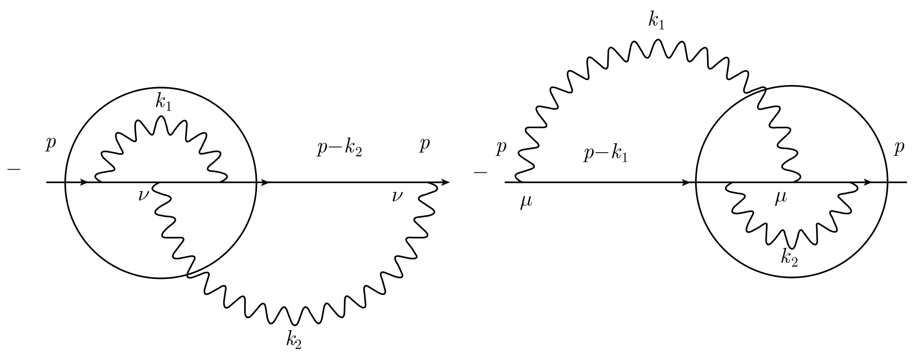


图 7.3.2

它们分别为

$$\begin{aligned}\Gamma_1 = &-\frac{\mathrm{i}e^4}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2\ \gamma^\nu\ \frac{1}{\not{p}-\not{k}_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\left[\gamma^\mu\ \frac{1}{\not{p}_0-\not{k}_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\right.\\&\left.\times\gamma_\nu\ \frac{1}{\not{p}_0-\not{k}_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma_\mu\frac{1}{k_1^2\ +\ \mathrm{i}\epsilon}\ \right]\frac{1}{k_1^2\ +\ \mathrm{i}\epsilon}\\ \equiv &-\frac{\mathrm{i}e^4}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2\ I_{\Gamma_1}\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 = &-\frac{\mathrm{i}e^4}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2\left[\ \gamma^\nu\ \frac{1}{\not{p}_0-\not{k}_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma^\mu\ \frac{1}{\not{p}_0-\not{k}_2-m+\mathrm{i}\epsilon}\right.\\&\left.\times\gamma_\nu\frac{1}{k_2^2+\mathrm{i}\epsilon}\right]\frac{1}{\not{p}-\not{k}_1-m+\mathrm{i}\epsilon}\ \gamma_\mu\frac{1}{(k_1^2\ +\ \mathrm{i}\epsilon)}\\ \equiv &-\frac{\mathrm{i}e^4}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_2\ I_{\Gamma_2}\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

其中, p_0 为顶角修正时用的重整化点, 比如令 $p_0=(m,0,0,0)$. 另一方面, 如果要求当 k_2 固定时, 对 k_1 积分收敛, 正好需要引入 Γ_1, 即 $I_\Gamma - I_{\Gamma_1}$ 对 k_1 积分收敛. 如果要求在 k_1 固定时, 对 k_2 积分收敛, 也正好需要引入 Γ_2, 即 $I_\Gamma - I_{\Gamma_2}$ 对 k_2 积分收敛. 但是 $I_\Gamma - I_{\Gamma_1} - I_{\Gamma_2}$ 既对 k_1 积分不收敛, 也对 k_2 积分不收敛, 特别是如果考虑作变量代换, 比如

$$k' = k_1 + k_2,\quad k'' = k_1 - k_2 \tag{7.3.4}$$

要 I_Γ 在 k' 积分下收敛又得引入别的相应抵消项, 用 I_{Γ_1} 或 I_{Γ_2} 都无效. 这种情况与下面的双圈图 (图 7.3.3)

$$I_{\bar{\Gamma}} = I_{\gamma_1}\cdot I_{\gamma_2}$$

是不同的. 对图 7.3.3 而言, 只要对 k_1 和 k_2 各自引入抵消项就可以了, 我们有

$$(I_{\gamma_1}-\Delta I_{\gamma_1})(I_{\gamma_2}-\Delta I_{\gamma_2}) = I_{\gamma_1}I_{\gamma_2}-\Delta I_{\gamma_1}\cdot I_{\gamma_2}-I_{\gamma_1}\cdot\Delta I_{\gamma_2}+\Delta I_{\gamma_1}\Delta I_{\gamma_2} = I_{\bar{\Gamma}}-(1)-(2)+(3) \tag{7.3.5}$$

其中, $(3)=\Delta I_{\gamma_1}\Delta I_{\gamma_2}$ 是很清楚的. 那么现在应该对 I_Γ 引入什么呢? 因为它的 γ_1 和 γ_2 是互相套着的, 分不出明显的两项 (见图 7.3.4).

对于这种情况, 即需要重整化的部分有交叉, 我们要用萨拉姆提出的方案来重整化. 令

$$R(p,k_1,k_2) = I_\Gamma - I_{\Gamma_1} - I_{\Gamma_2}. \tag{7.3.6}$$

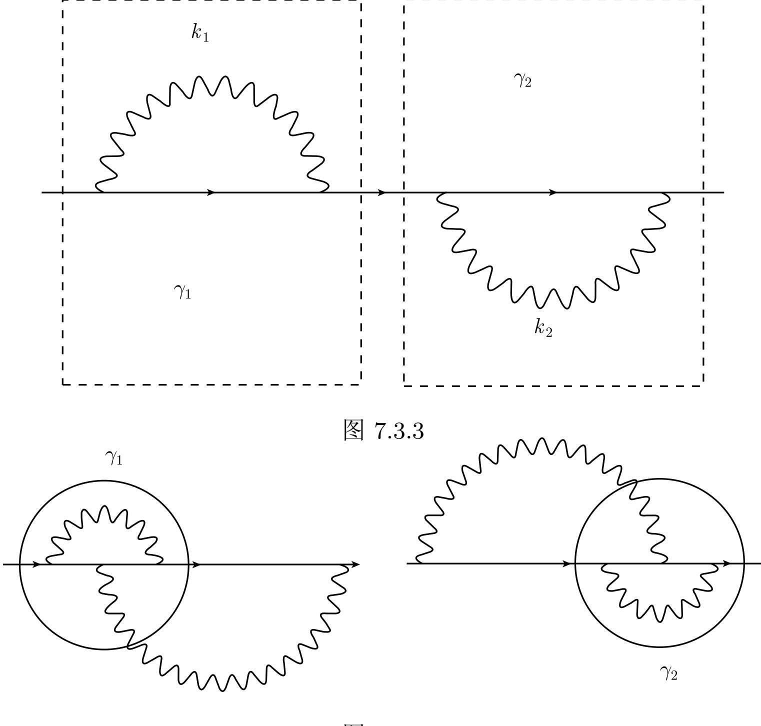


图 7.3.3

图 7.3.4

我们有

$$
\begin{aligned}
I_\Gamma - I_{\Gamma_1} = & \frac{1}{k_2^2 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon}\left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu \right.\\
& \left. - \gamma^\mu \frac{1}{\not{p}_0 - \not{k}_1 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_0 - \not{k}_1 - m + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\mu\right]\frac{1}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon}\\
= & \frac{1}{k_2^2 + \mathrm{i}\epsilon}\gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m + \mathrm{i}\epsilon}[I_{\Lambda^\nu}(p - k_2, p, k_1)].
\end{aligned}
\tag{7.3.7}
$$

在 k_2 固定时对 k_1 积分收敛, 因为

$$
\tilde{\Lambda}^\nu(p - k_2, p) = \mathrm{const}\int \mathrm{d}^4 k_1 I_{\Lambda^\nu}(p - k_2, p, k_1) \tag{7.3.8}
$$

是收敛的 (见第 6 章中 (6.6.81) 式).

换句话说 $R(p, k_1, k_2) + I_{\Gamma_2}$ 在 k_2 固定时对 k_1 积分收敛. 我们再考察 I_{Γ_2},

$$
\begin{aligned}
I_{\Gamma_2} = & \left\{ \frac{1}{k_2^2 + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not p_0 - \not k_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not p_0 - \not k_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\nu \right\} \\
& \times \left\{ \frac{1}{\not p - \not k_1 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon} \right\} \\
= & \{A\}\{B\},
\end{aligned} \tag{7.3.9}
$$

其中, A 只是 k_2 和 p_0 的函数, B 只是 k_1 和 p 的函数. 注意 B 与 $-\mathrm{i}\Sigma(\not p)$ 的表达式 (6.6.28) 中的被积函数类似.

考虑

$$
(1 - t_p^{(1)}) I_{\Gamma_2} = (1 - t_p^{(1)})\{A\}\{B\} = \{A\}(1 - t_p^{(1)})\{B\}, \tag{7.3.10}
$$

其中, $(1 - t_p^{(1)})\{B\}$ 对 k_1 的积分收敛, 理由与 $\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(\not p)$ 的费恩曼积分收敛的理由相同 (见第 6 章 (6.6.40) 式). 所以有

$$
\begin{aligned}
& (1 - t_p^{(1)}) I_{\Gamma_2} \\
= & \left\{ \frac{1}{k_2^2 + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\not p_0 - \not k_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not p_0 - \not k_2 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\nu \right\} \\
& \times \left\{ \left[\frac{1}{\not p - \not k_1 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon} \right] \right. \\
& - (p_\mu - p_{\mu 0}) \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left[\frac{1}{\not p - \not k_1 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon} \right]_{p = p_0} \\
& \left. - \left[\frac{1}{\not p_0 - \not k_1 - m + \mathrm{i}\epsilon} \gamma_\mu \frac{1}{k_1^2 + \mathrm{i}\epsilon} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.3.11}
$$

对 k_1 的积分收敛. 另一方面, 当 k_2 固定时, 考虑

$$
(1 - t_p^{(1)})(I_\Gamma - I_{\Gamma_1}), \tag{7.3.12}
$$

由于此式本质上是 $I_\Gamma - I_{\Gamma_1}$ 对不同的 p 的值的某种线性叠加, 而 $I_\Gamma - I_{\Gamma_1}$ 对任何 p 值对于 k_1 的积分都收敛, 所以 (7.3.12) 式也对 k_1 的积分收敛.

综上所述, $(1 - t_p^{(1)}) I_{\Gamma_2}$ 和 $(1 - t_p^{(1)})(I_\Gamma - I_{\Gamma_1})$ 都在 k_2 固定时对 k_1 积分收敛, 因此

$$
(1 - t_p^{(1)})(I_\Gamma - I_{\Gamma_1} - I_{\Gamma_2}) = (1 - t_p^{(1)}) R(p, k_1, k_2) \equiv \widetilde{I}_\Gamma \tag{7.3.13}
$$

对 k_1 积分收敛.

另一方面, 显然 $R(p, k_1, k_2)$ 也可以用类似办法讨论对 k_2 收敛问题做处理, 导致 $\widetilde{I}_\Gamma = (1 - t_p^{(1)}) R(p, k_1, k_2)$ 当 k_1 固定时也对 k_2 积分收敛的结论. 所以：当 k_1 固定时, $\widetilde{I}_\Gamma$ 对 k_2 积分收敛; 当 k_2 固定时, $\widetilde{I}_\Gamma$ 对 k_1 积分收敛. $\widetilde{I}_\Gamma$ 对 k 的总幂次为

$D=-9$, 而且它对 k_1 积分后不是 k_2 的平庸函数 (常数), 所以它是 $D=-5$ 的对 k_2 的函数, 因而对 k_2 的积分收敛 (这一点严格证明要用费恩曼参数化以及 Wick 转动后证明). 结论是 $\widetilde{I}_\Gamma$ 对 k_1, k_2 相继积分也收敛, 它才是我们所要的收敛被积函数. 以上对于这个交叉发散图的重整化方案是萨拉姆的贡献.

Γ 的表观发散度 $d_\Gamma=1$. 从以上分析来看, Γ 的重整化不是简单地取 $(1-t^d)I_\Gamma$ 作为重整化后的费恩曼被积函数. 而是要先将 I_Γ 减去由它的所有发散的真子图的抵消项参加构成的 I_{Γ_i}, 得到 $R=I_\Gamma-\sum\limits_i I_{\Gamma_i}$, 将得到的结果再取对外动量的 d 阶泰勒展开余项. 也就是

$$\widetilde{I}_\Gamma=(1-t^d)\left(I_\Gamma-\sum_i I_{\Gamma_i}\right), \tag{7.3.14}$$

这才是我们所要的结果. (在本例 $i=1,2,\quad d=1$) 事实上, 这正是一般多圈图重整化的正确答案! 这就是 Bogoliubov、Parasiuk、Hepp 和 Zimmermann 等给出的一般的重整化多圈图方案. 萨拉姆关于双圈电子自能的重整化是这种方案的特例.

7.4　BPHZ 方案与重整化的自洽性

对一张发散图 ($D\geqslant 0$) 需要引入什么抵消项呢? 也就是, 要引入什么新的顶角呢?

前面说过, 我们只需考虑正规图(proper diagram) 的重整化, 就行. 它是一张连接图, 而且去掉任何一根内线, 它仍然是一张连接图, 请看下面几张费恩曼图, 黑点代表顶角, 顶角之间的连线叫内线, 其余线是外线. 在下文关于两个费恩曼图的包含 ($\supset$)、分离、交叉等拓扑概念中, 我们只把 γ 图内线看成属于 γ 的. 特别要强调的是, 在下文关于 Γ 图和子图 γ 的划分中, 如果顶角 V_a 和 V_b 都属于 Γ 和 γ, 而在 V_a 和 V_b 中间有几根线 $L_{ab\sigma}(\sigma=1,\cdots,N)$ 时, 完全可能出现其中某一些是只属于 Γ 而不属于 γ 的情形, 在这种情况下, 那些不属于 γ 的线就是 γ 的外线, 而不是 γ 的内线.

在图 7.4.1 所示的这些图中, (a)、(b) 都是非正规图, (a) 是非连接图, (b) 去掉中间一根线就变为非连接图, (c) 是正规图, 它有 7 个顶角, 4 根外线, 9 根内线.

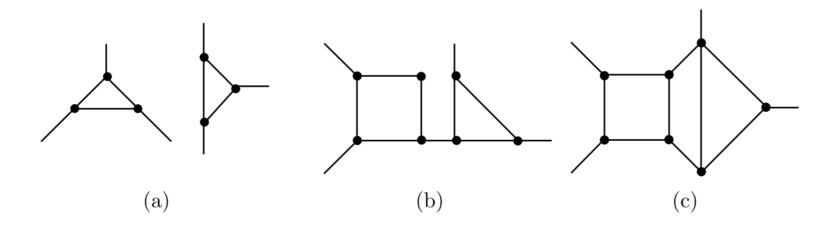


图 7.4.1

显然, 一张图的费恩曼积分的值 (我们简称为图的值), 比如图 7.4.1(c), 取决于它的外线上的动量值, 正常化后, 令截断参数为 Λ, 则图的值

$$G_\Lambda = G(q_1, q_2, q_3, q_4, \Lambda) \quad \text{当}d_G \geqslant 0\text{时}, \ \Lambda \to \infty, \ \text{通常}G_\Lambda \to \infty. \tag{7.4.1}$$

一般地, 对一张连接费恩曼图 G, 其相应的费恩曼积分是

$$J_G = \int \mathrm{d}^4 k_1 \cdots \mathrm{d}^4 k_m \ I_G(q_1 \cdots q_n, k_1 \cdots k_m). \tag{7.4.2}$$

其中, q_a 是该图各顶角处输入的外动量, 而 k_j 是作为积分变量的内动量, 内动量的数目 m 等于该图的独立回路数. 在这个表达式中, 我们已经把有关的 δ 函数积掉, 只留下独立的积分变量 k_i. 还有, 总的能量动量守恒对应的对外动量的 $\delta^4\left(\sum q_i\right)$ 也略去了.

Zimmermann 给出了任何正规图 Γ 在动量空间的重整化方案, 即给出了由它在动量空间的费恩曼被积函数推导出重整化后的被积函数 (它对自由动量的积分收敛) 的方案.

令图 Γ 的正规子图为 γ, 它的表观发散度 $d_\gamma \geqslant 0$, Zimmermann 称这样的子图为 Γ 的重整化部分. 对这样的 γ 需要在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中添加算子 $\hat{Q}_\gamma$, 它在费恩曼积分的被积函数中给出抵消项 Q_γ. 子图 γ 是由 Γ 的部分顶角和内线组成的, 除了规定属于 γ 的内线外, 其余与 γ 的顶角连接的线都叫 γ 的外线, 不属于 γ.

具体方案在下面解释.

我们在微扰论中知道第 n 级微扰项由下式给出

$$S^{(n)} = (2\pi)^4\delta^4\left(\sum_a q_a\right)\sum_\Gamma \frac{1}{S(\Gamma)}\int \mathrm{d}^4 k_1 \cdots \mathrm{d}^4 k_l I_\Gamma \equiv (2\pi)^4\delta^4\left(\sum_a q_a\right)\sum_\Gamma \frac{1}{S(\Gamma)} J_\Gamma. \tag{7.4.3}$$

其中, J_Γ 叫做费恩曼积分, I_Γ 称为费恩曼被积函数, $S(\Gamma)$ 是 Γ 的对称因子, 求和对 n 个顶角的一切可能的费恩曼积分进行. 令 $\mathscr{L}(\Gamma)$ 是 Γ 的内线集合. $\mathscr{V}(\Gamma)$ 是 Γ 的顶角的集合. 由第 5 章, 我们知道, 对每张动量空间的费恩曼图, 可以给出一个这样的表达式

$$I_\Gamma = \prod_{L_i \in \mathscr{L}(\Gamma)} \Delta(l_i) \prod_{a_i \in \mathscr{V}(\Gamma)} P_{a_i}, \tag{7.4.4}$$

其中, L_i 是 Γ 的内线, Δ 是它的费恩曼传播子, 它是该内线 4–动量 (有 4 个分量)l_i 的函数, a_i 是 Γ 的顶角, P_{a_i} 是一个多项式, 它是顶角 a_i 的各条顶角线的动量 l 的多项式.

由于在许多情形, 这个积分是发散的, 必须引入一些抵消项, 使抵消之后的余项

$$J_\Gamma \to F_\Gamma = \int \mathrm{d}^4 k_1 \cdots \mathrm{d}^4 k_l R_\Gamma \tag{7.4.5}$$

是收敛的.

BPHZ 方案给出由 $I_\Gamma \to R_\Gamma$ 的过程.

我们先简明地描述一下这个方案, 然后再详细做一些解释. Zimmermann 借助于 Weinberg 的一条定理, 证明了由方案具体给出的 R_Γ 对内部动量 k_j 的积分是收敛的. 函数 R_Γ 由下式给出：

$$R_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} I_{\Gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} \Pi_{\tau=1}^c Q_{\gamma_\tau}. \tag{7.4.6}$$

其中, $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 是 Γ 的 $d \geqslant 0$ 的互相不相交的正规子图, $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$ (即没有公共内线、顶角). 求和是对这样的子图的所有集合进行的, 即求和遍及所有这样的子图集合. 特别是, 当 Γ 自己是一个重整化部分, 即它是一个 $d_\Gamma \geqslant 0$ 而且是正规图 (强连接图) 时, 对仅包含 Γ 的这样一个集合 $\{\Gamma\}$, 也要求和一次. 空集不算.

$I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}$ 代表意思如下. 首先, $\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}$ 是 γ 的一个子图集合. $\gamma_1\cdots\gamma_c$ 是互不相交的 $d \geqslant 0$ 的正规子图.

$\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}$ 是将 $\gamma_1\cdots\gamma_c$ 各自的顶角和内线都收缩成一个点之后得到的费恩曼图, 称为约化费恩曼图, 而 $I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}$ 是约化图的费恩曼被积函数.

$$I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} = \prod_{L_i \in \mathscr{L}(\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\})} \Delta(l_i) \prod_{a_i \in \mathscr{V}(\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\})} P_{a_i} = I_\gamma / \prod_{\tau=1}^{c} I_{\gamma_\tau}. \tag{7.4.7}$$

其中, L_i 是 γ 的内线, 但不是 $\gamma_1\cdots\gamma_c$ 这些 γ 的子图的内线, a_i 是上述 L_i 两端的顶角 (详见第 8 章).

Q_{γ_τ} 由下面的方式迭代定义：

$$Q_\gamma = -t^\gamma \left(I_\gamma + {\sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}}' I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} \Pi_{\tau=1}^c Q_{\gamma_\tau} \right). \tag{7.4.8}$$

注意, 这里的求和号 Σ' 是只对 γ 的真的正规子图 $\gamma_1\cdots\gamma_c$(一切 $d_{\gamma_\tau} \geqslant 0$) 的集合进行. 虽然 γ 也满足 $d_\gamma \geqslant 0$, 且为正规图, $\{\gamma\}$ 也不参与求和. 空集不算, $t^\gamma \equiv t^{d(\gamma)}$.

t^γ 是对括号中的函数相对于 γ 的各个顶角 V_a 的外动量 q_a^γ 的泰勒展开, 展开的次数到 $d(\gamma)$ 为止. 因此, Q_γ 是 γ 图的外动量的一个多项式. 在前面我们看到, 它们是可以用场量的多项式构成 $\Delta\mathscr{H}_I$ 来实现的. 它们对应的顶角称为约化图顶角.

关于对一张 γ 图外动量的泰勒展开, 要说明两点：①注入某个顶角 V_a 的外动量 q_a^γ 指的是注入该点的相对于 γ 的外线的动量之和; ②由于总的能量动量守恒, 对

于有 N 个顶角有外动量的正规图 γ, 外动量的独立分量只有 $4(N-1)$ 个. $t^{\gamma} \equiv t^{d(\gamma)}$ 是对于这 $4(N-1)$ 个变量所做的泰勒展开.

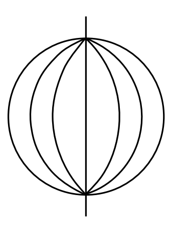
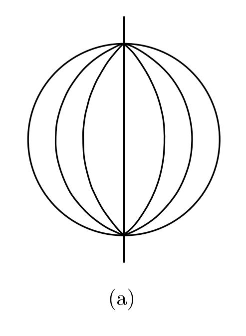
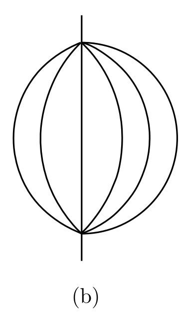


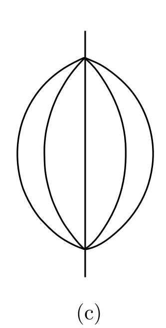
图 7.4.2　Γ :

备忘录：从 Zimmermann 的方案看出, 对于添加的约化图顶角, 在构图中是允许自己的顶角外线与自己的顶角外线相连接的, 这是因为, 在 (7.4.6) 式中, 求和是对一切由 $d_{\gamma_\tau} \geqslant 0$ 的 Γ 的分离的正规子图集合进行的.

考虑图 7.4.2：它的正规子图如图 7.4.3 中 (a)、(b)、(c).







…

图 7.4.3

如果它们的 d_{γ_τ} 都 $\geqslant 0$, 则它们都有相关的 Q_{γ_τ}, 在构成 R_Γ 时, 会出现与图 7.4.4 对应的项 (阴影部分将收缩为一个点)：图 7.4.4 (b) 和 (c) 都相当于 Q_{γ_i} 对应的约化图顶角的自己的外线之间相连.

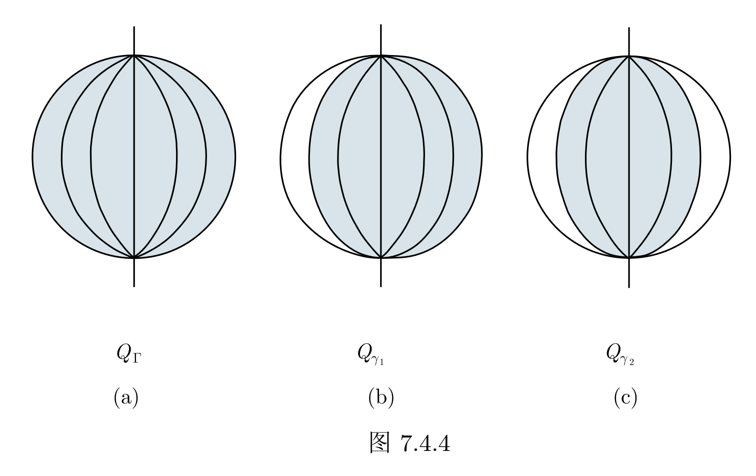


图 7.4.4

这一特性与原来 $\mathscr{H}_I$ 中的顶角在构图时的规则不同, 那里由于取 : $\mathscr{H}_I$: 代入相互作用矩阵 U, 所以不允许顶角自己的外线之间相互连接.

为了保证泰勒展开给出的抵消项使最后的结果收敛, 要求对该子图的各类的外动量与内线的内动量有如下的明确关系.

各个子图的外动量及其中各条内线的动量的关系是：它们要满足各顶角动量守恒, 即在该点内线动量之和等于外动量 (也就是该点外线注入的动量之和), 而且, 还要求各内线分配到的外动量之平方和取极值, 这叫正则分配. 泰勒展开是对外动量的正则分配构成的函数进行的. 内线的动量由分配到它的外动量以及与输入端点的外动量无关的 (与积分变元有关) 部分构成.

它的含义是这样的：设一个图 γ 的顶角以 $V_a, a=1,2,\cdots,N$ 标记, 顶角 a,b 之间的内线 (只有它们才属于图 γ, 外线不属于 γ) 为 $L_{ab\sigma}$(连接两个顶角 V_a 和 V_b 的内线不止一条时, $\sigma=1,2,\cdots$). 它们的动量为 $l_{ab\sigma}$(4–动量), 由动量守恒, 在 V_a 点有

$$\sum_{b\sigma}^{a} l_{ab\sigma}=q_a,\quad a=1,\cdots,N,\quad l_{ab\sigma}=-l_{ba\sigma}. \tag{7.4.9}$$

其中, q_a 是 V_a 点注入的外动量.

现在 $l_{ab\sigma}$ 由两部分构成, 一部分来源于 q_a, 另一部分来源于积分变量 (即构成回流的那些动量, 这部分是积分变量的线性组合). 令前者为 $q_{ab\sigma}$, 后者为 $k_{ab\sigma}$, 则有

$$l_{ab\sigma}=q_{ab\sigma}+k_{ab\sigma}, \tag{7.4.10}$$

所以 $k_{ab\sigma}$ 满足下述齐次方程

$$\sum_{b\sigma}^{a} k_{ab\sigma}=0,\quad a=1,\cdots,N,\quad k_{ab\sigma}=-k_{ba\sigma}, \tag{7.4.11}$$

而 $q_{ab\sigma}$ 满足非齐次方程

$$\sum_{b\sigma}^{a} q_{ab\sigma}=q_a,\quad a=1,\cdots,N,\quad q_{ab\sigma}=-q_{ba\sigma}. \tag{7.4.12}$$

$q_{ab\sigma}$ 是方程组 (7.4.9) 式的解的非齐次部分, 非齐次部分本来是不确定的, 我们现在把它取成所谓正则分布. 它是当 q_a 确定的情况下, 满足非齐次方程 (7.4.12) 式的解中使 $\sum_{\gamma}(q_{ab\sigma})^2$ 取极值的一个解. 这样分配的 $q_{ab\sigma}$ 称为正则分配. 在对图 γ 进行泰勒展开 t^{γ} 的时候, 就会有微分算子 $\dfrac{\partial}{\partial q_a^{\mu}}$ 参与, 它们对 $l_{ab\sigma}$ 的作用就是通过这样的 $q_{ab\sigma}$ 而实现的 (可以证明 $q_{ab\sigma}$ 是 $\{q_a^{\gamma}\}$ 的线性组合). 在构造 R_{Γ} 和各级 Q_{γ} 过程中, $l_{ab\sigma}$ 对原图中的外动量 $\{q_a^{\Gamma}\}$ 和积分变量 $\{k_l\}$ 的依赖关系不变. 注意：当 γ 是 Γ 的子图时, q_a^{Γ} 和 q_a^{γ} 一般不相等, 因此一般 $q_{ab\sigma}^{\Gamma}\neq q_{ab\sigma}^{\gamma}$. 由 (7.4.6) 式可以看出, 一张图 Γ 的费恩曼被积函数需要引入的抵消项就是由参与一些新的费恩曼

图 $\tilde{\Gamma}=\Gamma/\{\gamma,\cdots\gamma_c\}$ 对应的费恩曼被积函数组成, 它们的顶角包括 $\mathscr{L}_I$ 中原有的顶角 (在 $I_{\Gamma/\{\gamma,\cdots\gamma_c\}}$ 内), 还包括在 $\triangle\mathscr{L}_I$ 中新引入的对应于 Γ 的各个正规发散子图 $\{\gamma_\tau\},\tau=1,\cdots,c$ 的新顶角 (约化图顶角)$\{Q_{\gamma_\tau}\}$. 这些顶角是

$$Q_\gamma=Q_\Gamma\quad(\text{若 } D(\Gamma)\geqslant 0)\quad\text{或}\quad Q_{\gamma_\tau}\quad(d(\gamma_\tau)\geqslant 0).\tag{7.4.13}$$

Q_r 是图 γ 外动量的多项式. 作为外动量的函数形式, 它们都是只与图本身的结构有关 (见 (7.4.8) 式) 而与周围环境 (即微扰的级或它以外的点和线情况) 无关. 对于它周围的图来说, 它只相当于一个 "顶角", 所以为了区分它们与原来的顶角, 我们称之为 "约化图顶角" 或 "约化顶角", 如图 7.4.5 所示. 其中, 图 7.4.6 就是图 7.4.5 中几个约化顶角中的一个.

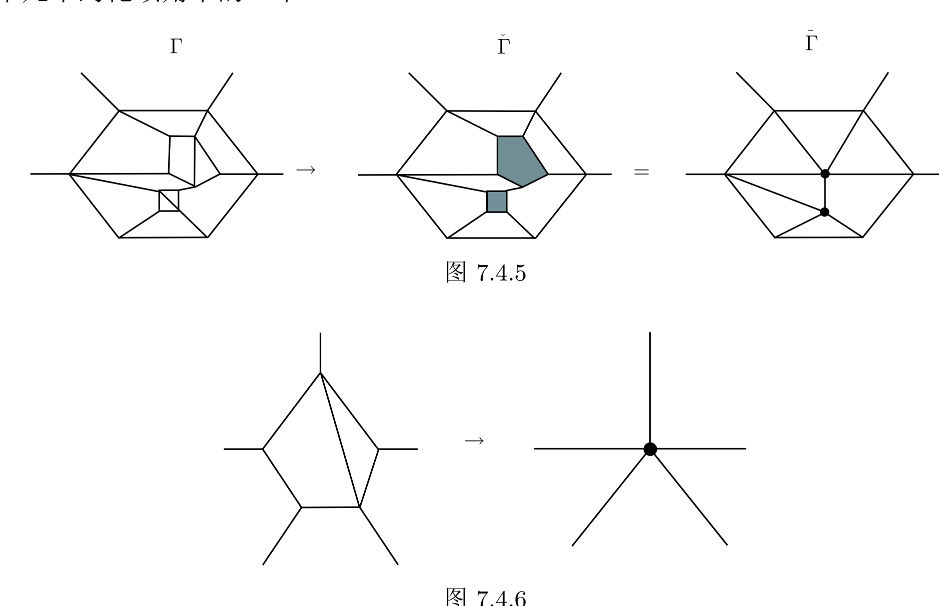


图 7.4.5

图 7.4.6

定义

$$\overline{R}_\Gamma=I_\Gamma+\sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_\tau\}}{}' I_{\Gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_\tau\}}\Pi_{\tau=1}^{c}Q_{\gamma_\tau},\tag{7.4.14}$$

其中, Σ' 对一切互相分离的 Γ 的正规子图 $\gamma_\tau(d(\gamma_\tau)\geqslant 0)$ 的集合进行, 但是 Γ 自己不算, 空集也不算.

由 (7.4.8) 式, 我们有 $-t^{d(\Gamma)}\overline{R}_\Gamma=Q_\Gamma$. 我们可以把 (7.4.6) 式改写为

$$R_\Gamma=(1-t^{d(\Gamma)})\overline{R}_\Gamma.\tag{7.4.15}$$

(7.4.6) 式是用被积函数给出的. 从费恩曼积分层面上看, 将相应的被积函数在正常化之后对 k 积分得到

$$J_\Gamma=(1-t^{d(\Gamma)})\overline{J}_\Gamma,\tag{7.4.16}$$

$$\overline{J}_\Gamma = J_\Gamma + \sum_i{}' J_{\Gamma_i}. \tag{7.4.17}$$

在 (7.4.17) 式中 Γ_i 是将某个互相分离的发散正规真子图的集合 $\{\gamma_1 \ldots \gamma_\tau\}$(不包括 Γ) 的元素 $\gamma \ldots \gamma_\tau$ 作为约化顶角之后形成的约化图; J_{Γ_i} 是这个约化图对应的费恩曼积分; $\sum_i'$ 是对一切这样的约化图求和, 不包括将 Γ 自己缩成约化顶角之后形成的约化图.

▲ 重整化方案之成功在于如下事实：一旦在某一张图 γ 上用加上 $\Delta\mathscr{H}_I$ 的方法引入适当的抵消项 Q_γ (抵消图) 之后, 在今后高阶 (n 更大时) 的图中只要有 γ 作为子图 (即大图的一部分) 出现时, 就一定有相应的抵消图同时出现, 这正好符合 (7.4.6) 式的要求.

由于泰勒展开是一个多项式, 约化图顶角可以当成一个 "真正的" 顶角在微扰哈密顿量中用一个顶角来实现. 这个顶角的系数是截断参数 Λ 的函数, 当 $\Lambda \to \infty$ 时是发散的. 我们就可以在 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中增加这样的顶角来抵消原来的发散, 使余项收敛. 形象地, 得到约化图顶角的过程可以用图 7.4.7 来说明.

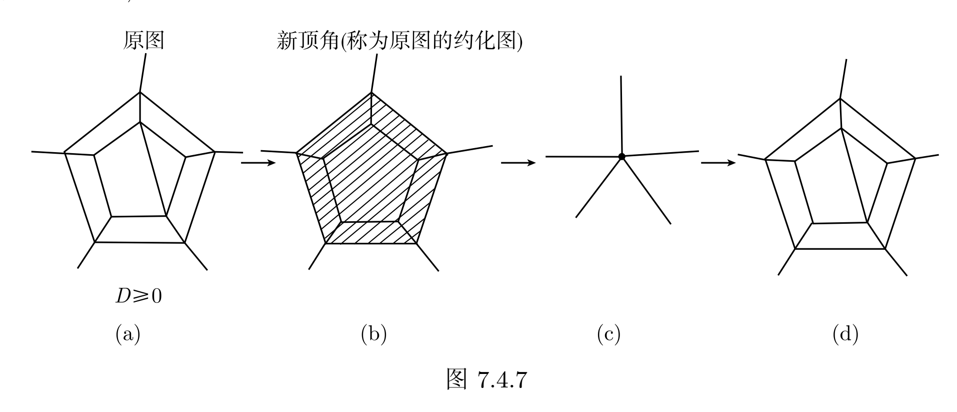


图 7.4.7

如果必要我们还可以把约化图顶角还原成原来的样子, 如图 7.4.7(d) 所示. 对于可以重整化的场论, 它的 $D \geqslant 0$ 的图的外线只有有限种组合, D 有上限. 所以相应地, Q_Γ 多项式的幂次有上限, 只需要引入有限种品种的新顶角. 这些顶角的外线组合只有有限种, 不管 n 多大. n 加一级, 需要引入一些新顶角, 它对 Λ 的依赖关系与以往的都不同, 但是只是系数 Z 对 Λ、e 依赖的形式不同, 它们对外动量 q_i^μ 的依赖关系和外线的形式总共只有有限种.

所以对可重整化场论, 为抵消紫外发散引入的 $\Delta\mathscr{H}_I$ 只须用有限种品种的项来组成. 最终 (对任何确定的 n) 的 $\mathscr{H}'$ 形式是固定的, 即由有限种项构成. 这种场论, 我们可以用重新定义有限个参量 (重整化) 的方式来实现任意阶的重整化. 这就是它称为可重整化场的原因. 反之, 当一种场论中 D 随某类顶角数目增加而不断增加时, $d \geqslant 0$ 的图的外线数没有上界, 费恩曼图的 D 也没有上界, 因此当 n 增大时, 总

需引入新品种的顶角, 这种场称为不可重整化的.

根据前面对表观发散度的计算, 我们知道, 只要所有的顶角固有发散度 d_{v_j} 都小于或等于 0, 这种场论就可以重整化, 否则就不可以重整化.

Zimmermann 给出了一张 n 顶角的正规图 Γ 的重整化方案, 给出它所需要的各种抵消项, 它们可以由添加 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中的具有发散系数的力学量来实现. 然而, 在另一张图 Γ' 上也需要引进这些东西, 它们会不会互相矛盾呢? 不会的. 这是由于如前所述:

(1) Zimmermann 给出的 Q_Γ、Q_γ 只与它们对应的费恩曼图本身有关, 而与它在哪里出现无关. 不管它出现在哪一级微扰, 或在哪一张大图 Γ, Q_γ 都只与它自己的 (也就是子图 γ 的) 结构有关;

(2) 只要在图 Γ 中有发散的正规子图 γ, 就会在该子图重整化时加入 $\Delta\mathscr{H}_I$(即对应的约化图顶角 Q_γ), 这样, 就会出现另一对应图 Γ', 它将 Γ 中的 γ 换成了约化子图顶角 V_{Q_γ}. 而这正好是 BPHZ 方案中 (7.4.6) 式所需要的;

(3) 在微扰论与费恩曼积分的关系中

$$\text{微扰项}S_\Gamma = \frac{1}{S(\Gamma)} \times F_\Gamma, \tag{7.4.18}$$

对称因子也与这种添加顶角的过程相自洽 (详见附录 7.4B).

因此, 我们只要对各种 $D \geqslant 0$ 的正规图按 Zimmermann 方案给出 $\Delta\mathscr{H}_I$, 直到任何指定 n 的 n 级微扰. 这样就可以将所有 $l \leqslant n$ 级的图全部重整化完毕, 每张包含发散子图或本身就发散的图的紫外发散将抵消完毕, 给出收敛的积分. 注意: 这 n 是对原始的微扰参量而言.

在添加约化图顶角后, 微扰论计算对有约化图顶角的图不能计算到 n, 只能计到原始微扰参量的总幂次为 n. 比如说, 添加的约化顶角为 $V \sim e^2 Z$, 在 QED 的 4 阶微扰中只允许 V^2 出现在该阶的费恩曼图中, 不允许 V^3、V^4 出现在该阶的费恩曼图中. 这样, 在 n 级重整化手续之后

$$\mathscr{H}' = \underbrace{\mathscr{H}_0 + g\mathscr{H}_I}_{\mathscr{H}} + \sum_{j=1}^{n} \Delta\mathscr{H}_I^{(j)} = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_I', \tag{7.4.19}$$

而 $\Delta\mathscr{H}_I^{(j)}$ 就是在第 j 级重整化时引入的抵消项,

$$\Delta\mathscr{H}_I^{(j)} = \sum_k \widehat{Q}_k\, Z_k^{(j)}, \tag{7.4.20}$$

其中, $\widehat{Q}_k$ 是由场算子组成的算子, 其系数 $Z_k^{(j)}$ 是耦合常数 g_l 以及截断参量 Λ 的函数 (对 g_l 是齐次多项式), 当 $\Lambda \to \infty$, 通常 $Z \to \infty$. 对于可以重整化的场论, 由

于 $\widehat{Q}_k$ 的品种有限, 所以在 n 级重整化之后

$$\sum_{j=1}^{n}\Delta\mathscr{H}_I^{(j)}=\sum_{k=1}^{K}\widehat{Q}_k\left(\sum_{j=1}^{n}Z_k^{(j)}(g,\Lambda)\right)=\sum_{k=1}^{K}\widehat{Q}_k\ Z^{(k,n)}(g,\Lambda). \tag{7.4.21}$$

其中, $Z^{(k,n)}$ 是 g 和 Λ 的函数 (可能是 g 的 n 次多项式). K 是确定的整数. 于是, 令

$$\mathscr{H}=\mathscr{H}_0+g\mathscr{H}_I,\quad \mathscr{H}'=\mathscr{H}+\sum\widehat{Q}_k\ Z^{(k,n)}(g,\Lambda), \tag{7.4.22}$$

将 $\mathscr{H}_0$ 固定, 这个 $\mathscr{H}'$ 就能生成一个理论, 它到 g 的 n 次幂, 即 S_{fi} 的 n 级展开的 g 的 n 次幂以下部分都是在 $\Lambda\to\infty$ 有限的, 尽管 $\mathscr{H}'$ 本身的系数在 $\Lambda\to\infty$ 时可能也 $\to\infty$. 由于 $\widehat{Q}_k$ 品种数目有限, 它是一个确定形式的场论, 只是微扰部分的系数可以变化 (随 n 和 Λ 而变).

比如, QED, 不管 n 多大, $\mathscr{H}'$ 的形式都是由下面的项组成的.

$$Z_1\overline{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi+Z_2\overline{\psi}\psi+Z_3\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu+Z_4(\partial_\mu A^\mu)^2+Z_5(A_\mu A^\mu)^2+\overbrace{\cdots}^{\text{有限种}}+Z_0(\partial_\mu A^\nu\partial^\mu A_\nu) \tag{7.4.23}$$

我们在附录 7.4A 中证明了, 如果一个量 f 满足规范不变和洛伦兹协变, 则 $t^d f$ 也满足这些条件. 因此前面构造的 Q_γ 满足这些条件. 由第 6 章表 6.2.1, 我们只需引进四种约化顶角, 它们是真空极化图、四玻色外线图 (光子散射图)、电子自能图和顶角修正图. 真空极化图原则上有三种项 ($D=2, t^{(2)}$ 有三项), 由于它只能是 $\Pi^{\mu\nu}(k)=(k^\mu k^\nu-g^{\mu\nu}k^2)f(k)$ 的形式 ((6.5.4) 式), 实际上它的抵消项必须 $\sim F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, 所以只需引入一种顶角. 电子自能 ($D=1, t^{(1)}$ 有两项) 的两项为 $\sim Z_2\bar{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi$、$+Z_1\bar{\psi}\psi$, 给出两个发散常数和两种顶角. 顶角修正 $\sim eZ_2'\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$, 而由于 Ward 恒等式 ((6.7.23) 式), $Z_2'=Z_2$, 四玻色外线 $D=0, t^{(0)}$ 只有一项, 由于规范不变性条件, $\sum\limits_j F_j^\mu(k_1,\cdots)|_{k=0}=0$, 所以 $t^{(0)}\sum\limits_j F_j^\mu(k_1,\cdots k_4)|_{k=0}=0$, 见第 (6.4.24) 式. 不需要引入抵消项. 因此, 由于规范不变性和洛伦兹协变性, 引入的新顶角数量又减少. 最终 QED 的拉格朗日量形式为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}Z_A(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})+Z_\psi\bar{\psi}\mathrm{i}(\partial\!\!\!/+\mathrm{i}eA\!\!\!/)\psi+Z_m\bar{\psi}\psi+\mathscr{L}_{gf}, \tag{7.4.24}$$

一共 3 个发散常数.

我们写出拉格朗日量和相洽的哈密顿量中的参数, 是由具体测量到的比如能量、散射截面等推导出来的. 因此, $Z_0\to Z_2$ 不是直接测量到的量, 它们与 Λ 有关. 真正的物理定律很可能有一个真正的 Λ, 即截断机制, 但这些 $Z_0\to Z_2$ 与我们的实验并无直接关系. 我们能测到的是由实测的电子质量 $m_{\text{测量}}$ 和电荷 $e_{\text{测量}}$ 表达的物

理结果, 而这些结果可以从重整化之后的图算出的散射振幅给出. 整个过程如下所示。

先算出重整化后有限的

$$S_{fi} = S_{fi}(e, m, \Lambda)\Big|_{\Lambda\to\infty} = S_{fi}(e, m), \tag{7.4.25}$$

它与 n 有关. 然后, 通过某些过程, 由以上结果可导出

$$m_{\text{测量}} = M(e, m), \quad e_{\text{测量}} = E(e, m). \tag{7.4.26}$$

当然, 它们也与微扰计算的级别 n 有关, 于是我们可以反算出

$$\Longrightarrow S_{fi} = S_{fi}(e_{\text{测量}}, m_{\text{测量}}), \tag{7.4.27}$$

而这是可以与实验比较的, 这就是重整化所做的. 实际上, 是要做出各个 S_{fi} 彼此相洽的结果. 我们在前面 6.4 节已经说过, 当取传统重整化条件时, 计算 $\tilde{\Lambda}$ 和 $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Pi}$ 中所用的 m 和 e, 正是测量得到的电子质量和电荷.

以上是重整化的大体思路.

附录 7.4 A 关于泰勒展开的规范条件

由于泰勒展开的操作, t^d 是将可以展开成无穷级数的函数取前面 d 次的主项, 因此, 对于这样的函数, 我们有

$$k_\mu\, t^d\, f(k) \;=\; t^{d+1}\,[\, k_\mu\, f(k)\,]. \tag{7.4A.1}$$

所以, 当对某个顶角有 $\sum\limits_\mu k_\mu I^\mu = 0$ 时 (规范条件), 若此顶角属于某个费恩曼图 λ

$$\sum_\mu\, k_\mu\,(-t^{d(\lambda)})\, I^\mu = -\sum_\mu\, t^{d(\lambda)+1}\,(k_\mu\, I^\mu) \;=\; -t^{d(\lambda)+1}\,(0) = 0. \tag{7.4A.2}$$

当 I^μ 满足规范条件时, Q^μ_γ 也满足规范条件.

另外, $t^{d(\lambda)}$ 是洛伦兹标量线性算子, 所以当 I_γ 满足洛伦兹张量条件, Q_γ 也满足同样的张量条件. 因而我们可以把在 QED 的发散子图的讨论结果运用于对应的 Q_γ.

附录 7.4 B 关于对称因子

我们前面阐明, 在 Zimmermann 的方案中, 对任何一张包含发散部分的图, 都可以用引进抵消项的方法来消除发散, 而抵消项都相当于对每张表观发散的正规图

在 $\mathscr{H}_I$ 中增添一些新的顶角. 而且这些顶角的参数和类型只与这些表观发散的图的结 - 构有关, 而与它以后在 Zimmermann 方案中在 “哪张 Γ 中” 作为抵消项出现没有关系.

但是这里还有一个细致问题. 我们知道微扰论中微扰项对每个费恩曼图 Γ, 在积分前都有一个系数 $\dfrac{1}{S(\Gamma)}$, 这个 S 是 Γ 的对称因子. 当没有对称因子时, 前面的论述是正确的. 当 Γ 和约化图有对称因子时, 在不同的 Γ 中对同一些约化顶角的引入会不会因为系数 $\dfrac{1}{S}$ 的不同而相互矛盾呢? 下面我们证明, 这是不会矛盾的.

设有一张图 Γ, 其中一部分变为约化子图之后变为 $\tilde{\Gamma}$.

由 $\Gamma \to \tilde{\Gamma}$ 的约化过程是将约化子图的所有顶角和内线收缩成一个约化顶角. 假设在收缩之前 Γ 中指定 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_c$ 为将要收缩的约化子图, 我们考虑对称群的分析. 令 Γ 的对称群为 g, $\tilde{\Gamma}$ 由于给出了约化顶角, 约化顶角对应的那个子图内的点的对称或者内线的对称操作并不给出 $\tilde{\Gamma}$ 的对称变换. 因此, $\tilde{\Gamma}$ 的对称变换群比 g 小. 我们把 g 的对称操作分为如下几部分：一部分是将集合 $A = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_c$ 变为 $A = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_c$ 以外 (至少一部分与原集合不同) 的操作, 记为 $g^{(1)}$; 一部分是只是各个 γ_i 内部的对称操作, 叫做 $\Pi_i g_i$. 还有一部分是把集合 $A = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_c$ 变为 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_c$ 自己, 但是又不是纯粹的 $\Pi_i g_i$, 这部分记为 $g^{(2)}$.

$\tilde{g} = g^{(2)} \cup \Pi_i g_i$ 是使 $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_c$ 不变的所有操作. 它是 g 的子群. 由定义有 $g^{(1)} = g - \tilde{g}$. 约化图 $\tilde{\Gamma}$ 的对称群由 $\tilde{g}/\Pi_i g_i$ 给出 ($\Pi_i g_i$ 是 $\tilde{g}$ 的正规子群).

对应 Γ 的微扰项为 $\dfrac{1}{|g|}F_\Gamma$, 在引入添加顶角 “(γ_i)” 之后, $\tilde{\Gamma}$ 就是微扰论中的一张费恩曼图, 它的对称因子为 $\dfrac{|\tilde{g}|}{\Pi_i |g_i|}$①. 这是因为对约化顶角而言, 外部能感受到区别的只是它的各条顶角线. 陪集类 $\tilde{g}/\Pi_i g_i$ 能确定这种排除了 γ_i 内部对称操作的操作. 这才是将 (γ_i) 作为约化顶角之后 $\tilde{\Gamma}$ 的对称操作. 因此, 微扰论中 $\tilde{\Gamma}$ 的贡献为

$$\frac{1}{|\tilde{g}/\Pi_i g_i|}F_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{|\tilde{g}|}\Pi_i |g_i| F_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{|g|}\left\{\frac{|g|}{|\tilde{g}|}\Pi_i |g_i|\right\}F_{\tilde{\Gamma}}, \tag{7.4B.1}$$

与原费恩曼积分 F_Γ 合在一起是

$$\frac{1}{|g|}\left\{F_\Gamma + \frac{|g|}{|\tilde{g}|}(\Pi_i |g_i| F_{\tilde{\Gamma}})\right\}. \tag{7.4B.2}$$

我们将 $|g_i|$ 看成为 (γ_i) 这个顶角的固有因子, 吸收到约化图构成的顶角 (γ_i) 中去, 再添加到 $\Delta\mathscr{H}_I$ 中, 就给出微扰项

$$S = \frac{1}{|g|}F_\Gamma + \frac{1}{|\tilde{g}|}F_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{|g|}\left\{F_\Gamma + \frac{|g|}{|\tilde{g}|}F_{\tilde{\Gamma}}\right\} \tag{7.4B.3}$$

① 这个结论的证明需要证明 O_{γ_i} 具有 γ_i 的对称性, 而且可以构造约化图顶角算子, 使它也具有这种对称性, 这里从略, 见郝昆博士论文 (西北大学).

然而 $\dfrac{|g|}{|\tilde{g}|}$ 正好是 g 中 $\tilde{g}$ 的陪集的数目, 也就是所有形状与 $\tilde{\Gamma}$ 相同的有约化子图的图 (然而在 Γ 中位置不同) 的数目. 抵消紫外发散所需要的 Γ 图抵消项, 根据 BPHZ 理论, 是这 $\dfrac{|g|}{|\widetilde{g}|}$ 个图的相加, 对应的费恩曼积分是 (7.4.6) 式, 因此 (7.4B.3) 式正好符合抵消紫外发散的要求.

以上结果不难推广到 Γ 有几种不同结构的 $\tilde{\Gamma}$ 的情形. 这时 (7.4.6) 式微扰项$=\dfrac{1}{|g|}\left\{F_\Gamma+\sum\limits_{\tilde{\Gamma}}\dfrac{|g|}{|\tilde{g}_{\tilde{\Gamma}}|}F_{\tilde{\Gamma}}\right\}$.

值得注意的是, 将 $|g_i|$ 因子吸收到 (γ_i) 中这个程序与微扰的级 n 无关, 也与 Γ 无关.

图 7.4B.1～ 图 7.4B.4 是这些推论的说明.

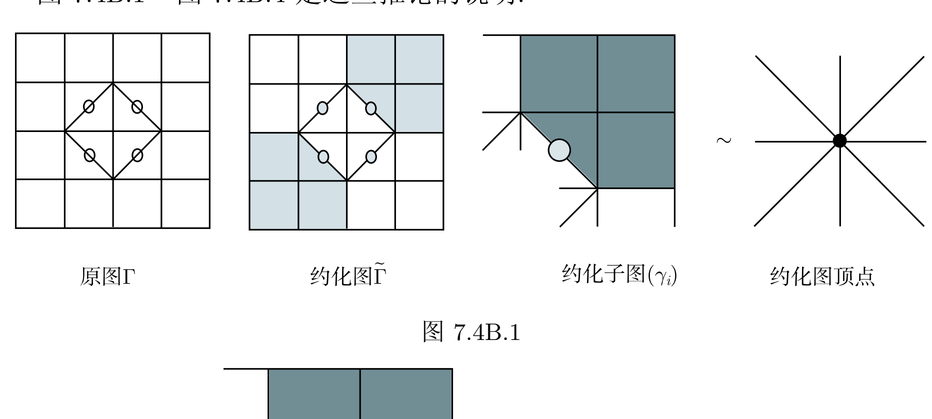


图 7.4B.1

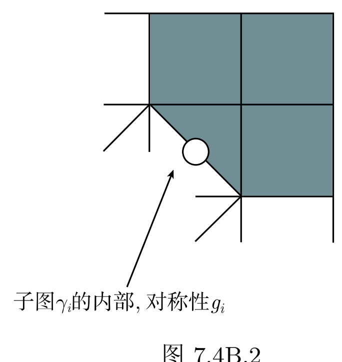


图 7.4B.2

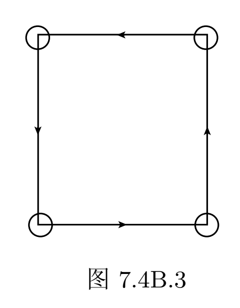


图 7.4B.3

$\Gamma=\gamma_1$ 有 4 重对称性

比如原图为图 7.4B.3.

加上约化顶点 ○⟶◯⟶●

抵消紫外发散要求该 γ 图抵消为图 7.4B.4.

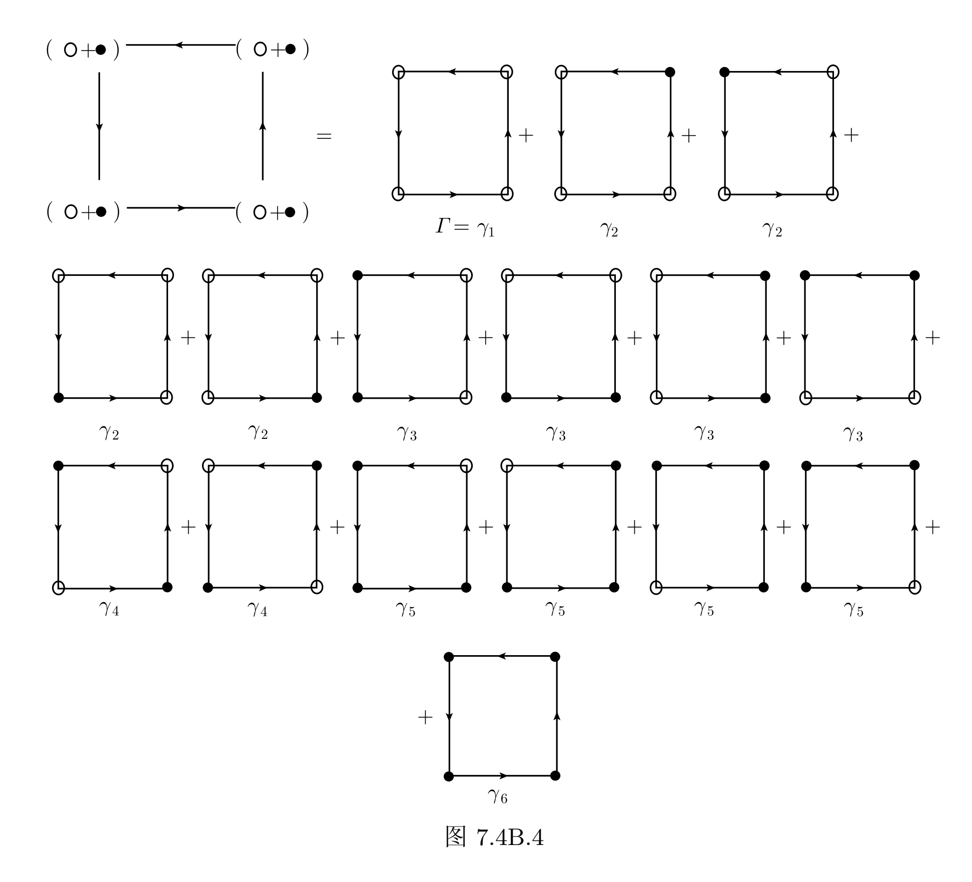


图 7.4B.4

γ_1 有 4 重对称性, γ_4 有 2 重对称性, γ_6 有 4 重对称性, 其余 γ_2、γ_3、γ_5 有 1 重对称性 (没有对称性).

在这里 $\gamma_2,\cdots,\gamma_5$ 都是 $\widetilde{\Gamma}$ 中的一种, 他们的结构都不同, 而 $\Gamma=\gamma_1$.

7.5 R_Γ(费恩曼被积函数的收敛部分) 的显示表达式

在本节, 我们给出费恩曼被积函数的显示表达式.

我们有 (7.4.6) 式

$$R_\Gamma=I_\Gamma+\sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}I_{\Gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c}\prod_{\tau=1}^{c}Q_{\gamma_c},\tag{7.5.1}$$

求和对一切集合 $\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}$ 进行, 不包括空集 $\{\varnothing\}$, 其中 $\gamma_1\cdots\gamma_c$ 是相互分离的发散的 Γ 的正规子图 (即表观发散度 $\geqslant 0$ 的正规子图). 如果 Γ 也是发散正规子图, 即 $d(\Gamma)\geqslant 0$, 则求和包括 $\{\Gamma\}$, 又有 (7.4.8) 式, 对发散正规图 γ (即表观发散度 $\geqslant 0$ 的正规图) 我们可以定义 Q_r, 求和 $\sum'$ 是对一切集合 $\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}$ 进行, 其中 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$

是 γ 的互相分离的发散真子图. 求和集合 $\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}$ 不包括空集 $\{\varnothing\}$, 也不包括 $\{\gamma\}$,

$$Q_\gamma = -t^\gamma\left(I_\gamma + \sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}{}' I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c}\prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}\right). \tag{7.5.2}$$

我们首先分析 (7.4.6) 式, 这第二项是一个求和式, 第一项是 I_Γ, 其余项是对 Γ 包含的所有由相互分离的发散 ($D\geqslant 0$) 的正规子图 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 组成的集合求和 (如果 $D_\Gamma\geqslant 0$, $\{\Gamma\}$ 也是一个要求和的集合, 但是空集不在求和范围). 每项是一个这样的集合：对于这样的一项, 它的贡献是 $I_\Gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}\prod\limits_{\tau=1}^{c}Q_{\gamma_\tau}$. Q_{γ_τ} 又是由 (7.4.8) 式, 即 (7.5.2) 式定义的, 它是对 γ 的外动量的泰勒展开, 而被展开的函数又是一个求和式, 其中第一项是 I_{γ_τ}, 其余每项都是由一个集合确定的, 这个集合是由 γ_τ 的互相分离的发散的真的正规子图 $\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau_{c\tau}}$ 组成, 求和是对所有这样的集合进行 (虽然 $D_{\gamma_\tau}\geqslant 0$, 但 γ_τ 不参与求和的集合, 空集也不参与求和). 每一项的贡献是

$$I_{\gamma_\tau/(\gamma_{\tau_1},\cdots\gamma_{\tau c_\tau})}\prod_{j=1}^{c_\tau}Q_{\gamma_{\tau_j}}, \tag{7.5.3}$$

而 $Q_{\gamma_{\tau_j}}$ 又是一个求和式 $\cdots$. 这个过程一直要到碰到的 Q_γ 没有发散正规真子图时才停止. 因此这是一个多重求和. 我们观察这一个大求和式中的一项, 它是由一个 Γ 的子图集合确定的集合, 比如有下面这么一项：

$$\Gamma\left\{\begin{array}{l} \gamma_1\left\{\begin{array}{l}\gamma_{11}\left\{\begin{array}{l}\gamma_{111}\\ \gamma_{112}\end{array}\right.\\ \gamma_{12}\left\{\begin{array}{l}\gamma_{121}\\ \gamma_{122}\\ \gamma_{123}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \gamma_2\left\{\begin{array}{l}\gamma_{21}\\ \gamma_{22}\ \cdots\\ \gamma_{23}\end{array}\right.\\ \gamma_3\left\{\begin{array}{l}\gamma_{31}\\ \gamma_{32}\end{array}\right.\cdots\\ \gamma_4\end{array}\right. . \tag{7.5.4}$$

这个集合里面, 任意两个 γ' 和 γ'' 之间只有两种可能的关系, 或者 γ' 和 γ'' 是一个包含另一个, 或者两者互相分离. 这种由 Γ 的发散子图形成的集合 (如 $D_\Gamma\geqslant 0$, 也可以包括 Γ 自己作为集合的一个元素) 称为一个限制的 Γ 林 $\mathscr{U}_r$, 用 $\mathscr{U}_r(\Gamma)$ 表示. “限制” 指各个元素一定是表观发散度 $d\geqslant 0$, “林” 指的是比如 (7.5.4) 式相当于四

棵树, 树干是 $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$, 上面是一级一级的分杈的枝, 从 (7.5.1) 式看, 第一项是 I_γ, 其余项都是由 Q_γ 形成的. 而从 (7.5.2) 式看, Q_γ 一定是对 γ 的外动量的泰勒展开. 这种泰勒展开, 对于一个 Γ 林来说对各个元素的外动量进行的次序是这样: 凡是 $\gamma'\supset\gamma''$, 则先对 γ'' 进行, 后对 γ' 进行. 凡是 γ' 与 γ'' 分离, 即 $\gamma'\bigcap\gamma''=\varnothing$, 则泰勒展开运算是互相可以对易的, 所以次序任意.

在明确了次序规定之后, 我们可以把 $(-t^\gamma)$ 移到各项最左边, 由于

$$I_{\gamma/\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}=I_\gamma/(I_{\gamma_1}I_{\gamma_2}\cdots I_{\gamma_c}),\tag{7.5.5}$$

这一项可以写成

$$\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r}(-t^\gamma)I_\Gamma\tag{7.5.6}$$

$$R_\Gamma=I_\Gamma+\sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma)}\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_{r(\Gamma)}}(-t^\gamma)I_\Gamma.\tag{7.5.7}$$

求和是对一切 Γ 的限制林进行的, 包括 $\{\Gamma\},\{\Gamma,\gamma_1,\cdots,\gamma_\tau\}$ 等, 但不包括空集 $\{\varnothing\}$. 如果约定当 $\mathscr{U}_r(\Gamma)=\{\varnothing\}$ 时,

$$\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r}(-t^\gamma)=1,$$

也可以将 R_Γ 写成

$$R_\Gamma=\sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma)}\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r}(-t^\gamma)I_\Gamma,\tag{7.5.8}$$

这时 $\mathscr{U}_r(\Gamma)$ 可以包括空集. 这就是费恩曼被积函数的收敛部分 R_Γ 的显示表达式.

在 $d(\Gamma)\geqslant 0$ 时, 我们可以把限制林分为两类, 一类是满的, 即包括 Γ 的 Γ 林, 一类是正常的, 即不包括 Γ, 但包括空集. 正常林的集合用 N_Γ 表示. 我们得到

$$\begin{aligned}R_\Gamma=&\sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma)\ni\Gamma}(-t^\Gamma)\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r(\Gamma)-\Gamma}(-t^\gamma)I_\Gamma+\underbrace{\sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma)\not\ni\Gamma}\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r(\Gamma)}}_{\gamma\in\mathscr{U}_r(\Gamma)\in N_\Gamma}(-t^\gamma)I_\Gamma\\=&(1-t^\Gamma)\sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma)\in N_\Gamma}\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r(\Gamma)}(-t)^\gamma I_\Gamma.\end{aligned}\tag{7.5.9}$$

当 $d(\Gamma)<0$ 时, 所有的限制 Γ 林都不满, 给出

$$R_\Gamma=\sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma)\in N_\Gamma}\prod_{\gamma\in\mathscr{U}_r(\Gamma)}(-t)^\gamma I_\Gamma.\tag{7.5.10}$$

如果当 $d(\Gamma)<0$ 时, 我们约定 $t^\Gamma=0$, 可将 (7.5.9) 式、(7.5.10) 式统一写为

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma) \sum_{\mathscr{U}_r(\Gamma) \in N_\Gamma} \prod_{\gamma \in \mathscr{U}_r(\Gamma)} (-t)^\gamma I_\Gamma, \tag{7.5.11}$$

形式上与 (7.5.9) 式一致.

7.6 重整化点的选择与 QED 传统重整化方案的收敛问题

BPHZ 重整化方案涉及两个问题, 一个是相对于一张正规图 γ 的费恩曼积分 I_γ 对输入动量 q_a 的泰勒展开是如何将 q_a 分配到各条 γ 的内线 $L_{ab\sigma}$ 上的分配问题. Zimmermann 要求这个分配是正则分配. 也就是说, 要求分配的动量的平方对 γ 的各条内线求和

$$\mu = \sum_{L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\sigma)} l^2_{ab\sigma,\mu} \tag{7.6.1}$$

在给定的 $\{q_a\}$ 之下取极小值, 对 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 都是如此, 而不是任意给的. 在下一章, 我们说明这个要求可以适当放宽, 放宽到

$$\mu = \sum_{L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\gamma)} \rho(L_{ab\sigma}) l^2_{ab\sigma,\mu}, \tag{7.6.2}$$

其中, $\rho > 0$ 只依赖于线元 $L_{ab\sigma}$ 的类型. 比如在 QED 中, 电子线和光子线的 ρ 可以不相同. 前面关于 7.3 节的计算例子是 $\lim \rho($ 电子线 $) = 0$ 的情形, 可以带来计算的方便.

另一个问题是泰勒展开的定义. (7.1.3) 式是用的通常的 k 的以 $k = 0$ 为基点的泰勒展开. 然而我们注意到, 在第 6 章给出的 QED 的传统重整化方案 (这个方案的优点是：参量 e, m 就是在弱外场极限下电荷和电子质量的实测值) 却不全是这样做的. 在传统方案中, 电子自能的重整化抵消项是取

$$\widetilde{F} = F - F(\not{p} = m) - \frac{\partial F}{\partial \not{p}}\Big|_{\not{p}=m} (\not{p} - m),$$

其中, F 是相应于电子自能 $-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})$ 的费恩曼被积函数. 这不符合 (7.1.3) 式的统一要求, 要符合 (7.1.3) 式, 我们要取

$$\widetilde{F} = F - F\Big|_{p=0} - \frac{\partial F}{\partial p_\mu}\Big|_{p=0} p_\mu = F - F\Big|_{\not{p}=0} - \frac{\partial F}{\partial \not{p}}\Big|_{\not{p}=0} \not{p}.$$

这第二个等式是因为对自能图 $\Sigma(p) = \Sigma(\not{p})$, F 是 $\not{p}$ 的函数. 这也就是第 6 章附录 6.6C 中描写的抵消项.

类似地, 对于顶角修正, 传统重整化方案是要求发散常数 Z_2' 满足

$$\overline{u}(\vec{p}, s)(\Lambda^\mu(p, p) - Z_2' \gamma^\mu) u(\vec{p}, s) = 0,$$

然后定义 $\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)=\Lambda^\mu(p',p)-Z_2'\gamma^\mu$. 这也同样与 BPHZ 方案不同. BPHZ 方案给出项角修正的重整化方案：

$$\widetilde{I}^\mu(p',p)=I^\mu(p',p)-I^\mu(0,0).$$

其中, I^μ 是 $\Lambda^\mu(p',p)$ 的费恩曼被积函数 (见 (6.6.45) 式), 就会给出

$$\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)=\Lambda^\mu(p',p)-\Lambda^\mu(0,0),$$

正是附录 6.6C 中描写的抵消项.

现在我们要探讨的是, 这两种方案的抵消项的差是什么. 我们在第 8 章详细分析并证明了 BPHZ 方案对各级微扰都是收敛的. QED 的传统抵消方案是不是也是如此呢? 我们在下面将证明, 这两种方案或者两种重正化点相应的抵消项的差是有限的. 当截断参量 $\Lambda\to\infty$ 时不发散.

7.6.1　单圈图两种方案抵消项之差

我们计算单圈图的电子自能的两种方案抵消项之差, 令传统方案抵消项为

$$-[a+b(\not p-m)]=-(a-bm)-b\not p$$

由 (6.6.37) 式和 (6.6.38) 式：

$$a=\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1+x)m\{-\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda\to\lambda_M)\}\quad(7.6.3)$$

$$\begin{aligned}b=&\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\left\{\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\&-\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1+x)\left\{\frac{x(1-x)2m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\end{aligned}\quad(7.6.4)$$

$$\begin{aligned}a-bm=&\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x2m\left\{\ln[x^2m^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\&+\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1+x)m\left\{\frac{x(1-x)2m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\end{aligned}\quad(7.6.5)$$

另一种方案给出的抵消项为

$$-a'-b'\not p,\quad(7.6.5\mathrm{a})$$

根据 (6.6.35) 式得

$$a'=\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x2m\{\ln[xm^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda\to\lambda_M)\},\quad(7.6.6)$$

$$b'=\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x\{(1-x)\ln[xm^2+(1-x)\lambda^2]-(\lambda\to\lambda_M)\}.\quad(7.6.7)$$

这两种方案的差为

$$\begin{aligned}\varDelta=&-[(a-bm)-a']-[b-b']\not{p}\\=&\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x2m\left\{\ln\frac{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}{xm^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\&+\frac{-\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x2m\left\{\frac{x(1-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\&+\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\not{p}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)\left\{\ln\frac{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}{xm^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\}\\&+\frac{\mathrm{i}e^2}{8\pi^2}\not{p}\int_0^1\mathrm{d}x\left\{\frac{2x(1-x^2)m^2}{x^2m^2+(1-x)\lambda^2}-(\lambda\to\lambda_M)\right\},\end{aligned}\tag{7.6.8}$$

当 $\lambda_M\to\infty$ 时, $\varDelta$ 是有限的. 这相当于 $\Delta\mathscr{H}$ 中引入的抵消项之差也是有限的.

我们还可以从费恩曼被积函数这个层次上考察问题. 比如计算 b 和 b' 之差. 由 (6.6.34) 式

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\sum_R(\not{p})=&\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\frac{(1-x)\not{p}-2m}{[k^2+x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^2}\\&-(\lambda\to\lambda_M),\end{aligned}\tag{7.6.9}$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\not{p}}\left[-\mathrm{i}\sum_R(\not{p})\right]=&\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\frac{(1-x)}{[k^2+x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^2}\\&+\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k(-2)\frac{[(1-x)\not{p}-2m][2\not{p}x(1-x)]}{[k^2+x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3}\\&-(\lambda\to\lambda_M)\\=&\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\frac{1}{[k^2+x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3}\\&\times\{(1-x)[k^2+x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2]-(1-x)[4x((1-x)p^2\\&-2m\not{p})]\}-(\lambda\to\lambda_M)\\=&\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\frac{1}{[k^2+x(1-x)p^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3}\\&\times(1-x)\{k^2-3x(1-x)p^2+8xm\not{p}-xm^2+(x-1)\lambda^2\}\\&-(\lambda\to\lambda_M).\end{aligned}\tag{7.6.10}$$

令 $\not{p}=m$, 得

$$\begin{aligned}b=&\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\frac{1}{[k^2-x^2m^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3}\\&\times(1-x)\{k^2+(3x^2+4x)m^2+(x-1)\lambda^2\}-(\lambda\to\lambda_M).\end{aligned}\tag{7.6.11}$$

令 $\not{p}=0$, 得

$$b'=\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1 \mathrm{d}x\int \mathrm{d}^4k\frac{1}{[k^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3}\\ \times(1-x)\{k^2-xm^2+(x-1)\lambda^2\}-(\lambda\to\lambda_M). \tag{7.6.12}$$

b 和 b' 都是发散积分, 因为分母对 k 的幂次为 6, 分子为 2. 还要对 k 积分 4 重, 所以是对数发散积分. 它们的差为

$$\Delta b=b-b'=\frac{e^2}{8\pi^4}\int_0^1\mathrm{d}x\int\mathrm{d}^4k\frac{(1-x)}{[k^2-x^2m^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3[k^2-xm^2+(x-1)\lambda^2+\mathrm{i}\epsilon]^3}\\ \times\{[k^2-xm^2+(x-1)\lambda^2]^3[k^2+(3x^2+4x)m^2+(x-1)\lambda^2]\\ -[k^2-x^2m^2+(x-1)\lambda^2]^3[k^2-xm^2+(x-1)\lambda^2]\}. \tag{7.6.13}$$

Δb 中分子的 k 的最高次幂消去, 因此有

$$\Delta b\sim\int\mathrm{d}^4k\frac{k^6}{[k^2]^3[k^2]^3}\sim\int\mathrm{d}^4k\frac{k^6}{k^{12}},$$

积分收敛. 费恩曼被积函数的这种分析在用第 8 章的方式处理我们的问题有用. 以上是对电子自能图 $-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})$ 的两种方案, 即两种重整化点的抵消项之差的计算. 对于顶角修正 $\Lambda^\mu(p',p)$, 由于 Ward 恒等式 $Z_2=Z_2'$, 我们得知它们的抵消项的差

$$(Z_2|_{传统}\gamma^\mu-Z_2|_{原点}\gamma^\mu)=(\mathrm{i}b-\mathrm{i}b')\gamma^\mu=\mathrm{i}\Delta b\gamma^\mu$$

也是有限量, 当截断参量 $\to\infty$ 时不发散. 在第 8 章, 我们证明 (也可以用第 6 章的结果来验算)

$$\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)=\Lambda^\mu(p',p)-\Lambda^\mu(0,0)$$

是收敛的, 其中, $\Lambda^\mu(0,0)=Z_2|_{p=0}\gamma^\mu$, 因此对于传统方案

$$\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)=\Lambda^\mu(p',p)-Z_2|_{传统}\gamma^\mu,$$

也是收敛的, 因为两者之差

$$\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)|_{传统}-\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)|_{原点}=\mathrm{i}\Delta b\gamma^\mu$$

是有限的. 提醒一句, 我们在前面计算中只给出 $\bar{u}(p')\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)|_{传统}u(p)$, 计算表明它是有限的, 并未证明作为 4×4 矩阵 $\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)|_{传统}$ 也有限.

7.6.2 多圈图的两种方案之差

我们分析多圈图的传统重整化方案与以输入动量作以原点为基点的重整化方案的差别, 我们将证明, 这个差是有限的 (当截断参量 $\to\infty$ 时).

首先我们解释一下多圈图的两种方案. 类比 (7.4.16) 式和 (7.4.17) 式.

(1) 传统方案, 是将多圈图 Γ 的费恩曼积分 J_Γ 加上一切约化子图的抵消项给出的约化图 Γ_i 的费恩曼积分 J_{Γ_i}—— 抵消项是传统的抵消项①—— 由此得到 $\bar{J}_\Gamma=J_\Gamma+\Sigma_i' J_{\Gamma_i}$, 再用传统方式求得 $\bar{J}_\Gamma$ 的抵消项, 最后得到抵消之后的剩余结果作为重整化后的多圈图的费恩曼积分.

(2) 原点方案, 即以原点为基点的重整化方案, 这是指用传统方案得到 $\bar{J}_\Gamma=J_\Gamma+\Sigma_i' J_{\Gamma_i}$, 然后直接取抵消项

$$-t^{d(\Gamma)}(J_\Gamma+\Sigma_i' J_{\Gamma_i}), \tag{7.6.14}$$

其中, $t^{d(\Gamma)}$ 是宗量函数对输入动量 $\{q_\alpha\}$ 的泰勒展开, 展开的基点是原点 $(q_\alpha=0)$, 重整化后的费恩曼积分是

$$\widetilde{J}_\Gamma|_{原点}=(1-t^{d(\Gamma)})(J_\Gamma+\Sigma_i' J_{\Gamma_i}). \tag{7.6.15}$$

应该特别声明的是, 这里 J_{Γ_i} 是用传统重整化的抵消项作为约化子图的值, 而不是 BPHZ 方案给出的子图的抵消项. 为了研究两种方案的差, 我们需要将 Ward 恒等式推广到有抵消项时的情形.

1. 重整化后的 Ward 恒等式

一根电子线中间插一根光子线就是一个顶角, 对于电子自能图, 无论是在它的主干电子线即有入射和出射的开放的电子线, 还是它附着的电子圈中的电子内线上插一根光子线, 都可以形成一个相应的顶角图. 电子自能图都有若干条电子内线, 就可以由此得到不少顶角图.

图 7.6.1 的自能图 $\Sigma(p)$ 插入新的光子线后变为五张顶角图 (图 7.6.2)$\Lambda_i^\mu, i=1,\cdots,5$. 因此, 图 7.6.2 对应

$$\Lambda^\mu(p',p)=\Sigma_i\Lambda_i^\mu(p',p). \tag{7.6.16}$$

利用类似 6.4 节关于费米子圈的规范不变性的推导或在 (6.6.46) 式的推导, 我们可以证明

$$\Sigma_{i=1}^5(p-p')_\mu\Lambda_i^\mu(p',p)=\Sigma(p')-\Sigma(p), \tag{7.6.17}$$

① 因为约化图 Γ_i 的顶角数比 Γ 少, 所以在本步骤之前已经按传统方式构成了抵消项.

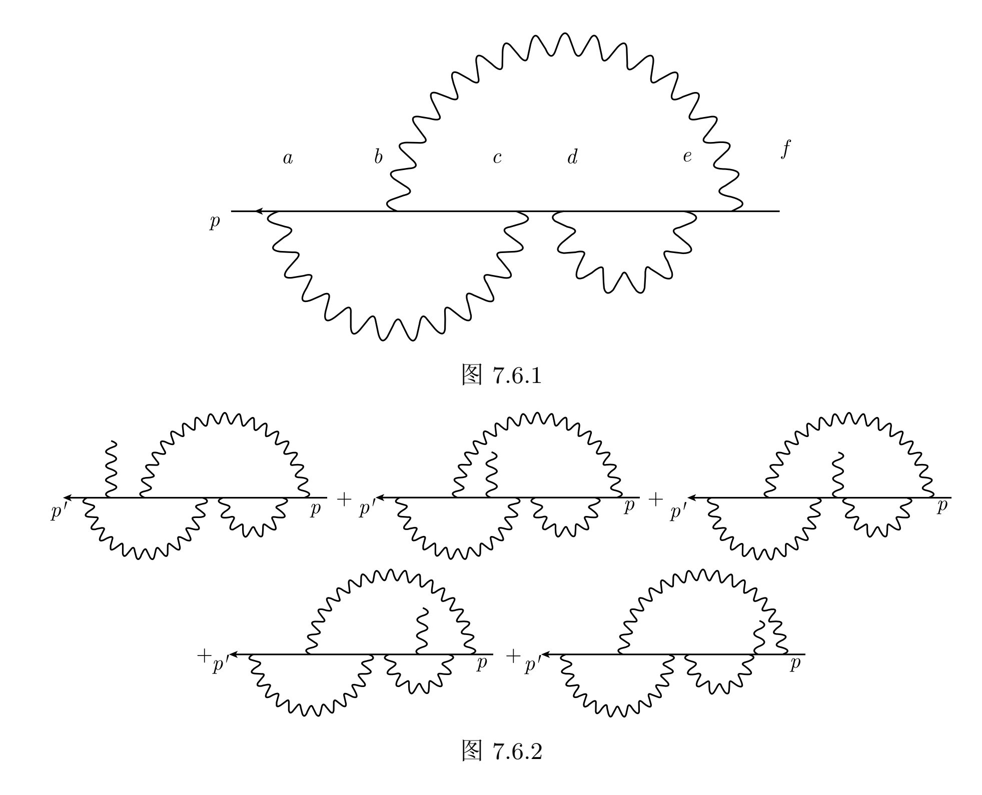


图 7.6.1

图 7.6.2

具体过程是, 从 $\Sigma(p)$ 开始, 每加上一项 $(p-p')_\mu\Lambda_i^\mu(p',p)$, 就把该段的 p 换成了 p', 全部加完了, 就使 p' 在所有费米线上替换了 p, 从而给出 $\Sigma(p')$.

由此得到

$$-\Sigma_i\Lambda_i^\mu(p,p)=\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p). \tag{7.6.18}$$

在添加了抵消项之后, 出现了新的图, 这些图是将原图 Γ 中的正规子图变为约化子图顶角之后形成的图 Γ_i, 比如图 7.6.1 变为图 7.6.3. 这些图中的约化子图, 如果不符合 $d(\gamma)\geqslant 0$ 条件的可以略去, 这一点在传统方案和 BPHZ 方案中都是一样的, 比如图 7.6.3 中的 (c)、(d) 中的阴影代表的约化子图 (请注意约化图与约化子图的概念上的区别, 约化图是将约化子图缩为一点形成的图, 约化子图指的是阴影部分. 它们外线数 >3). 余下的都有相应的抵消项.

下面我们讨论自能图的约化图是否满足 Ward 恒等式.

与主干相连的约化图而且 $d(\gamma)\geqslant 0$ 的只有两类：顶角图和电子自能图. 顶角图的贡献为 $Z\gamma^\mu$, 电子自能图的贡献为 $-(Z_1+Z_2\not{p})$. 我们现对 Γ_i 进行与 Γ 一样的插入一根光子线的操作, 当不涉及约化子图 γ 的电子线时, 情况与前面类似：产生一个相关的顶角图, 比如对图 7.6.3(a), 插入之后变为一个顶角图的约化图, 如图

7.6.4 所示.

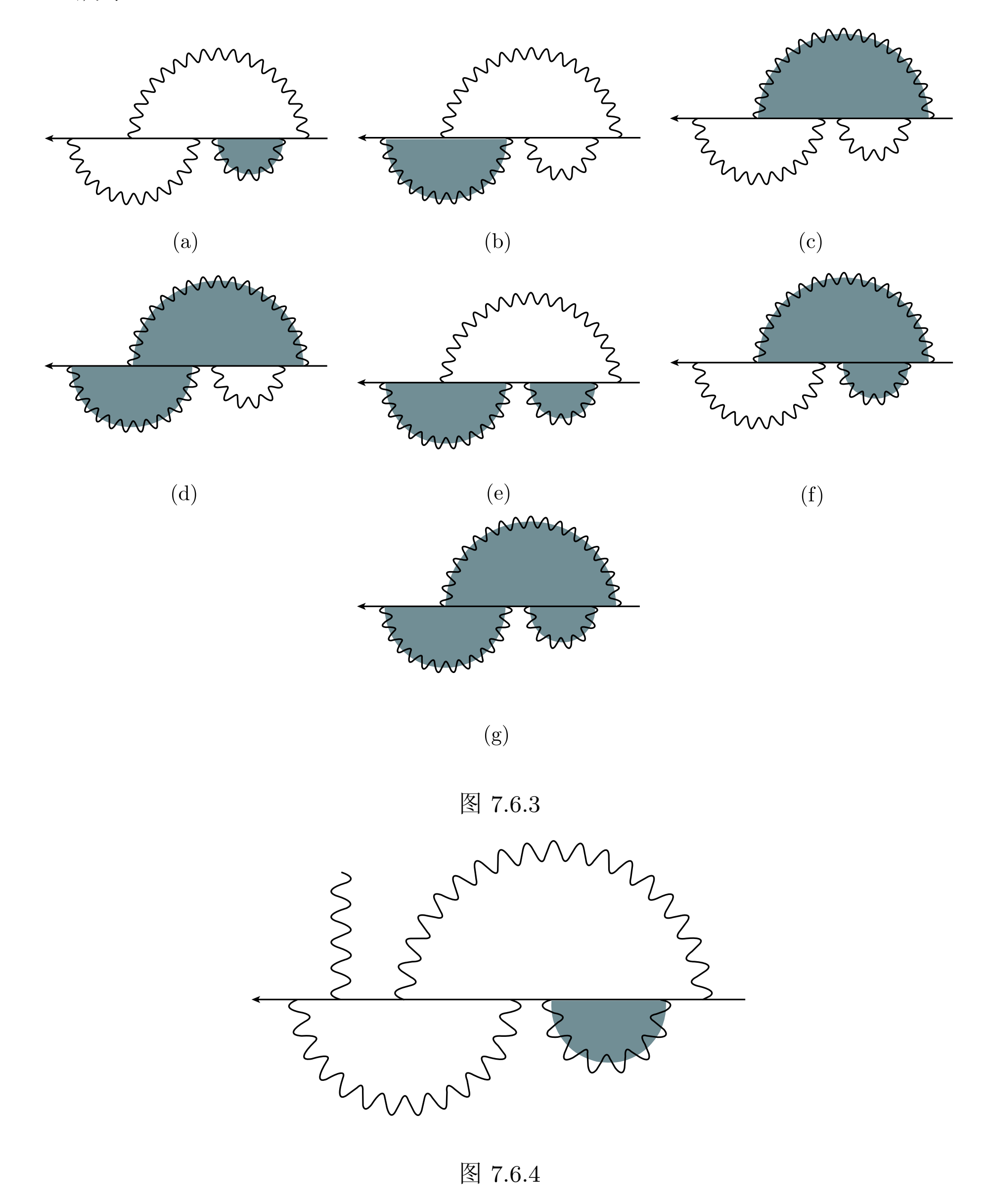


图 7.6.3

图 7.6.4

图 7.6.4 是图 7.6.2 第一项的约化图, 正好是 $\Lambda_1^\mu(p',p)$ 在求 $J_\Gamma+\Sigma_i J_{\Gamma_i}$ 时所需要的. 接下来我们将这些对于 Γ_i 的插入光子线形成的顶角图求 $\Sigma_i(p_\mu-p'_\mu)\Lambda_i^\mu(p',p)$, 由于约化子图上不插光子线, 对 i 的求和数小于原来的 Γ 图. 比如对图 7.6.3(a) 只有 4 张, 图 7.6.3(e) 只有 2 张, 图 7.6.3(f) 只有一张.

对某个 $\Lambda_i^\mu(p',p)$ 作乘积 (对 μ 求和)

$$(p_\mu - p'_\mu)\Lambda_i^\mu(p',p) = A - B.$$

由 6.6.3 节的 (6.6.46) 式推导可知, A 相当于把那段 (即插光子线的那段) 电子线的动量写成 p', B 相当于把它写成 p 得到的电子自能图, 只是在该电子线两端 (对 A 为右端, 对 B 为左端), 端点的动量守恒不成立. 在对 i 求和之后, 中间这些不符合守恒律的自能图都互相消去, 留下符合守恒律的 $\Sigma(p)-\Sigma(p')$. 现在我们要考虑在约化子图前后外插光子线的后果. 它会造成该子图的右边输入由 p 到 p' 的变化. 比如对下图, 即约化子图是顶角时, 我们有

$(p_\mu - p'_\mu)\times[\ p' \leftarrow_{\mu} (\text{图}; q,\nu)\ p + p' \leftarrow (\text{图}; q,\nu)\ _{\mu}\ p]$

$$=\left\{\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not q-m+\mathrm{i}\epsilon}(Z\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}-\frac{\mathrm{i}}{\not p-\not q-m+\mathrm{i}\epsilon}(Z\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\right\}$$
$$+\left\{\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not q-m+\mathrm{i}\epsilon}(Z\gamma^\nu)\frac{\mathrm{i}}{\not p'-m+\mathrm{i}\epsilon}-\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not q-m+\mathrm{i}\epsilon}(Z\gamma^\nu)\times\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}\right\}.$$

第一项与最后一项消掉, 余下的两项正好穿越约化子图, 相当于把主干线的这一段分别取动量 p' 和 p. 因此这项操作与普通顶角没有区别. 然而当约化子图是电子自能图 $\Sigma_1(p)$ 时就有新的情况出现, 这时我们要将上式中的 $Z\gamma^\nu$ 换成对应于自能图 γ(约化子图) 的抵消项 $-(Z_1+Z_2\not p)$, 将 q 取为 0, 这时第一项与最后一项不能消去, 在第一项中间应换为 $-(Z_1+Z_2\not p)$. 在最后一项中间应换为 $-(Z_1+Z_2\not p')$, 两项相减得到①

$$\frac{\mathrm{i}}{\not p'-\not q-m+\mathrm{i}\epsilon}Z_2(\not p'-\not p)\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}|_{q=0} \tag{7.6.19}$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{\not p'-m+\mathrm{i}\epsilon}Z_2(\not p'-\not p)\frac{\mathrm{i}}{\not p-m+\mathrm{i}\epsilon}$$
$$=(p_\mu-p'_\mu)\left[\frac{\mathrm{i}}{\not p'-m+\mathrm{i}\epsilon}(-)Z_2|\gamma^\mu\times\frac{\mathrm{i}}{p-m+\mathrm{i}\epsilon}\right].$$

所以, 如果在 $\Sigma_1(p)$ 的约化子图部分也插上一些光子线, 并且将这些新的约化图顶角 (即顶角修正 $\Lambda^\mu=\Sigma_l\Lambda_l^\mu$ 的约化图顶角, Λ_l^μ 是该 $\Sigma_1(p)$ 对应的一系列顶角

① 注意 $\sum(p)$ 的抵消项为 $-(Z_1+Z_2\not p)$ 而 $\Lambda^\mu(p',p)$ 的抵消项为 $+Z_2'\gamma^\mu$.

修正图) 赋予抵消项 $Z_{2l}\gamma^\mu$, 则如果 $\Sigma_l Z_{2l}|_{顶角} = Z_2|_{顶角} = Z_2$(由 (7.6.18) 式可以证明这一点) 该项就会参加上述 $(p_\mu - p'_\mu)\Lambda_i^\mu$ 的计算 (Λ_i^μ 是对应约化图的所有顶角), 而与 (7.6.19) 式抵消. 使 $\Sigma_i(p_\mu - p'_\mu)\Lambda_i^\mu(p',p) = \Sigma(p') - \Sigma(p)$ 在有电子自能 $\Sigma_1(p)$ 作为约化子图时也成立.

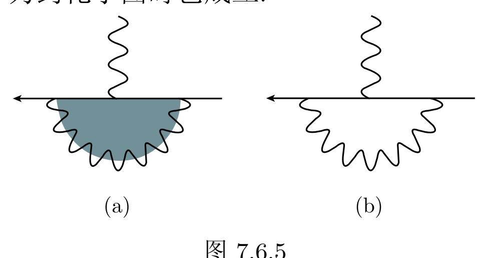


图 7.6.5

这些顶角 Λ_l^μ(有时是一个顶角, 当子图 $\gamma = \Sigma_1(p)$ 只有一段电子内线时就是这样) 正是原图 Γ 插入光子线变成顶角图 Λ_j^μ 时, 在形成抵消项未给出 $\overline{J}_\Gamma = J_\Gamma + \sum_i J_{\Gamma_i}$ 所需要的. 比如图 7.6.5(a) 是图 7.6.5(b) 所需要的约化图.

在图 7.6.6 中, (b) 是 (a) 的约化图, (d) 是 (c) 的约化图, (f) 是 (e) 的约化图. 结论：综合以上分析, 我们知道, 只要在各个低级微扰级有 $Z_2|_{顶角} = Z_2$, 或者当自能子图 γ 有几段电子内线时有 (图 7.6.6 就是这样, 那里有三个顶角图)$\Sigma_i Z_{2i} = Z_2$, 则在图 7.6.6 中 (a) 所属的微扰级 Ward 恒等式也成立. 这一结论对两种重整化方案, 传统方案和 BPHZ 方案都是正确的.

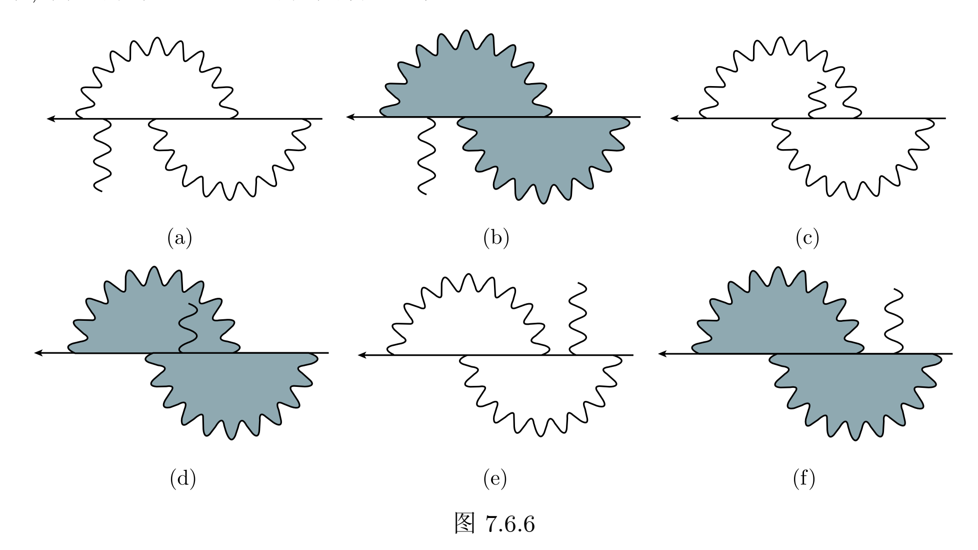


图 7.6.6

由此可见, 对于原图或有约化顶角的约化图只要在所有低级微扰中 Ward 恒等式成立, 则在高一级微扰中也成立.

由以上分析, 我们有

$$(p'_\mu - p_\mu)\sum_i \Lambda_i^\mu(p',p) = \Sigma(p) - \Sigma(p'). \tag{7.6.20}$$

在这里, Λ_i^μ 和 Σ 都是指 $\overline{J}_\Gamma = J_\Gamma + {\sum_i}' J_{\Gamma_i}$ 中出现的顶角修正和电子自能, 也就是

说包括约化图的顶角修正和电子自能. 如果我们要在对应 Γ 的这一级, 即较高的一级对电子自能和对应的一系列顶角修正添加额外的抵消项, 而要维持 Ward 恒等式 (7.6.20) 式成立的话, 必须也只须让抵消项对应的常数满足 $Z_2=\Sigma_l Z_{2l}|_{\text{顶角}}$. 对 p_μ 取微商, 令 $p'=p$, 得

$$\sum_i \Lambda_i^\mu(p,p)=-\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p).$$

由于 $\Sigma(p)$ 满足 $\Sigma(p)=If_1(p^2)+\not{p}f_2(p^2)^*$, 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p)|_{p=0}=\gamma^\mu f_2(0)\propto\gamma^\mu\Rightarrow\sum_i\Lambda_i^\mu(0,0)=\sum_i Z_{2i}\gamma^\mu=-Z_2|_{\text{原点}}\gamma^\mu.$$

另一方面, 当 $p^2=m^2$ 时, 有

$$\overline{u}(p)\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p)u(p)=\overline{u}(p)[2Ip^\mu f_1'(m^2)+\gamma^\mu f_2(m^2)+2mp^\mu f_2'(m^2)]u(p),$$

而 $\dfrac{\partial}{\partial\not{p}}\Sigma(p)=2I\not{p}f_1'(p^2)+f_2(p^2)+2\not{p}\not{p}f_2'(p^2)$, 由 $\gamma^\mu\not{p}+\not{p}\gamma^\mu=2Ip^\mu$ 得

$$\overline{u}(p)\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Sigma(p)u(p)=\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p)\frac{\partial}{\partial\not{p}}\Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m}. \tag{7.6.21}$$

对传统顶角修正抵消项有

$$\begin{aligned}\overline{u}(p)\sum_i\Lambda_i^\mu(p,p)u(p)&=-\sum_i Z_{2i}\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p)\\&=-\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p)\frac{\partial}{\partial\not{p}}\Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m}\\&=-Z_2\overline{u}(p)\gamma^\mu u(p).\end{aligned} \tag{7.6.22}$$

因此, 在两种重整化条件下, 我们都得到 $Z_2|_{(\text{顶角})}=Z_2$. 其中 $Z_2|_{(\text{顶角})}$ 是顶角修正的抵消项 $Z_2|_{(\text{顶角})}\gamma_\mu$ 前面的系数.

我们在以上推导中, 假定约化图对应的电子自能或顶角修正的费恩曼积分对外动量的依赖形式与原图的规律相同, 这是可以证明的. 理由如下.

这里我们要对上述推导加一些说明. 我们要说明对包含约化因子图的电子自能和顶角图也符合附录 6.6F 给出的结果.

从附录6.6F的推导看, 如果将一段费米线(动量为 q)对应的传播子$\dfrac{\not{q}+m}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$ 换成 $\dfrac{(\not{q}+m)(Z_1+Z_2\not{q})(\not{q}+m)}{q^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$ (当这段费米子线中间插上一个电子自能约化顶点时就是这样), 或者将一个顶角修正部分 Λ_i^μ 换成 $Z_{2i}|_{\text{顶角}}\gamma^\mu$ 的时候, 并不影响推导的结果. 因此, 对于包含这两种约化子图的约化图, 也是如此.

对于光子线, 如果在中间插上一个约化顶点(真空极化给出的约化图 $\sim$ 顶点 $(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)Z_0$, 就使 $\dfrac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$ 变为 $\dfrac{-\mathrm{i}g_\lambda^\mu}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}(k^2g^{\lambda\rho}-k^\lambda k^\rho)Z_0\dfrac{-\mathrm{i}g_\rho^\nu}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$ $\sim$

$\dfrac{1}{(k^2+\mathrm{i}\epsilon)^2}(k^2g^{\mu\nu}-k^\mu k^\nu)$. 这种改变也不会影响推导结果, 因为第一项与过去光子线的分子形式一致, 第二项变为连接这个约化顶角的两个费米子线上的两个顶角上每个顶角两边的动量旋量之差 $\Delta\not{q}$(比如在一根费米子线上, 顶角为 γ^λ, $\gamma^\lambda\dfrac{g_{\lambda\mu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}k^\mu=\dfrac{\not{k}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}=\dfrac{\not{q}'-\not{q}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$, $\not{k}$ 的位置在 γ^λ 原来的位置).

按前面关于电子自能的分析, 在动量为 q 的电子线分子上插入一个 $\not{q}$ 是不影响附录 6.6F 的推导和结果的.

综上所述, 对于约化图, 电子自能也有形式 $\Sigma(p)=\Sigma(\not{p})$, 以及 $\Lambda_i^\mu(p,p)=f_a(\not{p})\gamma^\mu+f_b(\not{p})\gamma^\mu\not{p}=Ip^\mu f_1(\not{p})+\gamma^\mu f_2(\not{p})$, 因此 (7.6.20) 式 ~(7.6.22) 式的推导对于有约化子图的 $\Sigma(p)$ 和 $\Lambda_i^\mu(p,p)$ 也正确.

2. n 圈顶角修正

考虑一个 n 圈顶角修正 $\Lambda_i^\mu(p',p)$, 先构造它相应的

$$\overline{J_\Gamma}=J_\Gamma+\Sigma_i'J_{\Gamma_i}.$$

其中, Γ_i 是将 Γ 中的一部分互相分离的正规子图 $\{\gamma_\tau\}$, $(d(\gamma)\geqslant 0)$ 缩为一个人造顶角, 它的值形成一个抵消项. 我们假定它是传统方案给出的. 比如说 γ_τ 是一个顶角修正 Λ_j^μ, 它的值就是 $\sim Z_{2j}\gamma^\mu$, Z_{2j} 由传统方式 (6.6.72) 式确定. 如果是一个自能图. 它的值就是 $\sim Z_1+Z_2(\not{p}-m)$, Z_1, Z_2 由 (6.6.36) 式确定, 即

$$\begin{aligned}Z_1&=\mathrm{i}\left(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})\right)|_{\not{p}=m},\\ Z_2&=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\not{p}}\left(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})\right)|_{\not{p}=m}.\end{aligned}\tag{7.6.23}$$

当 γ_τ 为真空极化图时由 $\sim t_k^{(2)}\Pi^{\mu\nu}(k)$ 确定, 其中 $t_k^{(2)}$ 是对 k 的以原点 $k=0$ 为基点的二次泰勒展开 (6.6.25) 式. 我们强调, 这些抵消项自己也不是由原来的 J_{γ_j} 给出的, 而是以相应于 γ_j 的 $\overline{J}_{\gamma_j}=J_{\gamma_j}+\sum_k' J_{\gamma_{jk}}$ 由传统方式给出的.

(1) 我们现在在最后一步以 BPHZ 方式给出 Γ 的抵消方案. 因为现在是顶角修正, 所以有

$$\tilde{J}_\Gamma=\left(1-t_{p'p}^{(0)}\right)\overline{J}_\Gamma,\tag{7.6.24}$$

也就是

$$\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{\text{原点}}=\Lambda_i^\mu(p',p)-\Lambda_i^\mu(0,0)=C(p',p).$$

其中, $\Lambda_i^\mu(p',p)=\overline{J}_\Gamma$. 我们要强调的是, 这个式子中构成 $\widetilde{J}_\Gamma$ 的抵消项中使用的 $\overline{J}_\Gamma$ 并不是由 BPHZ 方案给出的, 而是由传统方案给出的. 所以我们称为 BPHZ 方式, 它给出的余项称为 $\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p'\cdot p)|_{\text{原点}}$.

△ 我们将在下一小节证明如果当圈数小于 n 时两种方案发散图的抵消项之差都有限, 那么 $\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{原点}$ 是收敛的, 即有限的. 因此 $C(p',p)$ 是有限的. 现在我们计算 $\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{(传统)}$ 与 $\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{(原点)}$ 的差别, 证明它是有限的.

(2) 我们曾一般性地证明了 $\Lambda_i^\mu(00)\sim\gamma_\mu$, 因此 $\Lambda_i^\mu(00)=-Z'_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu$(6.5 节). 这是因为它在 $S^{-1}\cdots S$ 之下像 x^μ 一样变换, 而 $p'=0$ 和 $p=0$ 是洛伦兹不变的. 这一点在 6.5 节有证明. 但是这个证明没有考虑 J_{Γ_i} 项. 要考虑这种项, 必须考虑在比 n 小的顶角修正中传统方式的抵消项是不是洛伦兹协变的. 结论是肯定的, 因为顶角修正的抵消项 $Z_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu$ 是洛伦兹矢量. 自能抵消项 $Z_1+Z_2(\not p-m)$ 是洛伦兹标量, 而真空极化的抵消项是洛伦兹二阶张量. 只要发散常数 $Z_{2i}|_{顶角}, Z'_{2i}|_{顶角}, Z_1, Z_2$ 是不变量. 上述结论就成立.

(3) 传统方式给出[①]

$$\overline{u}(\overrightarrow{p},s)[\Lambda_i^\mu(p,p)+Z_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu]u(\overrightarrow{p},s)=0.$$

另一方面, $\overline{u}(\overrightarrow{p},s)[\Lambda_i^\mu(p,p)-\Lambda_i^\mu(00)]u(\overrightarrow{p},s)=\overline{u}(\overrightarrow{p},s)[\Lambda_i^\mu(p,p)-Z'_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu]u(\overrightarrow{p},s)=\overline{u}(\overrightarrow{p},s)C(p,p)\ u(\overrightarrow{p},s)=B(p)$ 有限, 因为 $C(p,p)$ 有限，所以 $\overline{u}(\overrightarrow{p},s)(Z_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu-Z'_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu),u(\overrightarrow{p},s)=0-B(p)$ 有限. 由于对确定的 γ^μ,

$$\begin{aligned}\overline{u}(\overrightarrow{p},s)\gamma^\mu u(\overrightarrow{p},s')&=\overline{u}(\overrightarrow{p},s)\frac{m+\not p}{2m}\gamma^\mu u(\overrightarrow{p},s')\\&=\overline{u}(\overrightarrow{p},s)\frac{\gamma^\mu(m-\not p)+2p^\mu}{2m}u(\overrightarrow{p},s')\\&=\frac{p^\mu}{m}\delta_{ss'}\end{aligned}\tag{7.6.25}$$

当 $s=s'$ 时一般非 0. 因此

$$Z_{2i}-Z'_{2i}=-B(p)/\overline{u}(\vec p,s)\gamma^\mu u(\vec p,s)=有限.\tag{7.6.25a}$$

(4) 如果 $\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{(原点)}$ 是有限的话, 那么 $\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{(传统)}=\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)|_{(原点)}+(Z_{2i}-Z'_{2i})\gamma^\mu$ 也有限. 因此 $\sum\limits_i\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p',p)\equiv\widetilde{\Lambda}^\mu(p',p)$ 也有限.

3. 电子自能图

我们研究电子自能图. 令 $-\mathrm{i}\Sigma(p)=J_\Gamma+\sum\limits_i{}' J_{\Gamma_i}=\overline{J}_\Gamma$, 考虑 $-\mathrm{i}\Sigma(p)$ 的泰勒展开, 其中包含约化图的抵消项由传统方式给出. $-\mathrm{i}\tilde{\Sigma}(p)|_{(传统)}=-\mathrm{i}\Sigma(p)-a-b(\not p-m)=$

① 利用证明 $\sum(p)$ 只是 $\not p$ 的函数的方法 (见附录 6.5A 或附录 6.6F), 我们可以证明 $\Lambda_i^\mu(p,p)$ 的一般形式为 $Ip^\mu f_1(\not p)+\gamma^\mu f_2(\not p)$. 因此, 当 $p^2=m^2$ 时, Z_{2i} 与 μ 无关, 与 p 无关 $(Ip^\mu=\frac{1}{2}(\not p\gamma^\mu+\gamma^\mu\not p))$.

$(\not{p}-m)$ 的 2 次以上项

$$
\begin{aligned}
a &= \left(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})\right)|_{\not{p}=m}, \\
b &= \frac{\partial}{\partial\not{p}}\left(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})\right)|_{\not{p}=m}.
\end{aligned} \tag{7.6.26}
$$

由于 $\not{p}u(p)=mu(p)$, 因此有

$$
\begin{aligned}
&\left[-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})-a-b(\not{p}-m)\right]u(p)=0, \\
&\Rightarrow \left[-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})-a\right]u(p)=0.
\end{aligned} \tag{7.6.27}
$$

另一方面, 用 BPHZ 方式, $-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{(\text{原点})}=-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})-a'-b'\not{p}$, 其中

$$
\begin{aligned}
a' &= -\mathrm{i}\Sigma(\not{p})|_{p=0}, \\
b' &= \frac{\partial}{\partial\not{p}}\left(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})\right)|_{p=0}, \\
a'+b'\not{p} &= t_p^{(1)}\left(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})\right), \\
-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{(\text{原点})} &= (1-t_p^{(1)})(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})).
\end{aligned} \tag{7.6.28}
$$

△ 我们将在后面证明若圈数少于 n 时, 两种方案发散图的抵消项之差都有限, 则 $-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{(\text{原点})}$ 是有限的. 所以

$$
\begin{aligned}
\left(-\mathrm{i}\Sigma(p)-a'-b'\not{p}\right)u(p) &= -\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{(\text{原点})}u(p) \\
&= \left[-\mathrm{i}\Sigma(p)-(a'+b'm)-b'(\not{p}-m)\right]u(p) \\
&= \left[-\mathrm{i}\Sigma(p)-(a'+b'm)\right]u(p)
\end{aligned} \tag{7.6.29}
$$

是有限的. 由 (7.6.27) 式 $\sim$ (7.6.29) 式得

$$
(a'+b'm-a)u(p)=0-\left(-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}|_{\text{原点}}\right)u(p)=\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{\text{原点}}u(p)=\text{有限}.
$$

因而 $a'+b'm-a=$ 有限.

又由 Ward 恒等式:

$$
\begin{aligned}
b &= -\mathrm{i}Z_2=-\mathrm{i}\sum_i Z_{2i}|_{\text{顶角}}, \\
b' &= -\mathrm{i}Z_2'=-\mathrm{i}\sum_i Z_{2i}'|_{\text{顶角}}(\text{原点方案的 Ward 恒等式}).
\end{aligned} \tag{7.6.30}
$$

由于 $Z_{2i}-Z_{2i}'$ 有限 ((7.6.25a) 式), 所以

$$
\begin{aligned}
&Z_2-Z_2'\text{有限}, \\
&b-b'=\text{有限}.
\end{aligned} \tag{7.6.31}
$$

其中, b 是 $b|_{传统}$, b' 是 $b|_{原点}$, 得到

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{传统}-\left(\mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{原点}\right)&=a'+b'\not{p}-a-b(\not{p}-m)\\&=a'-a+bm+(b'-b)\not{p}\\&=(a'+b'm-a)-(b'-b)m\\&\quad+(b'-b)\not{p},\end{aligned} \tag{7.6.32}$$

这个结果是有限的.

4. 真空极化图

我们考虑真空极化图时, 发现对传统重整化条件和 BPHZ 方式, 公式是一样的, 所以两者之差为 0, 当然是有限的, 在真空极化图重整化时有

$$\widetilde{\Pi}^{\mu\nu}(k)=(1-t_k^{(2)})\Pi^{\mu\nu}(k),$$

其中, $\Pi^{\mu\nu}(k)=J_\Gamma+\Sigma_i' J_{\Gamma_i}=\bar{J}_\Gamma$, 包括约化图费恩曼积分之和以及原图的费恩曼积分, 在这里需要着重考虑的是规范不变条件在约化图的费恩曼积分中是否依然遵守. 按照 6.4 节的分析, 对一个 n 顶点费米圈顶角光子线上动量与该费米子圈费恩曼积分的乘积, 有公式

$$k_{1\mu_1}J_j^{\mu_1,\mu_2\cdots}(k_1,\cdots)=(p'_{\mu_1}-p_{\mu_1})J_j^{\mu_1,\cdots}(k_1,\cdots)=A_1-B_1.$$

其中, $p'_{\mu_1}-p_{\mu_1}$ 是进入 μ_1 点的费米子动量, 而 A_1 和 B_1 是将 μ_1 点及其光子线并到它之前和它之后 (指沿费米子圈的方向) 的相邻顶点形成的 $n-1$ 顶点的费米子圈给出的费恩曼积分, 对 j 的求和使这些费恩曼积分两两相消, 因此得

$$\Sigma_j k_{1\mu_1}J_j^{\mu_1,\cdots}(k_1,\cdots)=0. \tag{7.6.33}$$

现在考虑约化图的上述分析. 当 μ_1 不属于约化子图 γ 时, 所有分析都与前面相同, 电子自能图对上述 (7.6.33) 式的分析显然没有影响; 当考虑 μ_1 正好在约化子图上, 容易看出, 这种约化子图只能是顶角修正图, 比如图 7.6.7.

当这个顶角是约化图时, 它的贡献是 $Z_i|_{顶角}\gamma^\mu$.

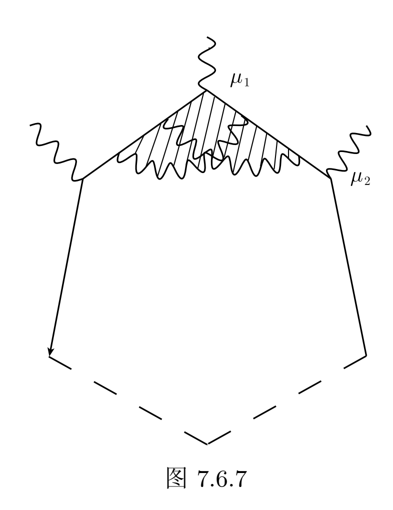


图 7.6.7

正如在 Ward 恒等式的分析 7.6.2 节第 1 小节中得到的结果, μ_1 点处在该顶角修正的各个位置时的和式 $\Sigma_i Z_i|_{顶角}\gamma^\mu$ 正好给出 $Z_2\gamma^\mu$, 而 $(p'_\mu - p_\mu)\times Z_2\gamma^\mu$ 给出 $Z_2(\not{p}' - \not{p})$. 这正好是把 μ_1 点取消给出的两个动量的自能图 $\Sigma(\cdots)$ 的约化图值之差, 也就是 $Z_1 + Z_2\not{p}$ 和 $Z_1 + Z_2\not{p}'$ 的差, 所以使得 (7.6.33) 式的各项相消同样能实现. 因此具有约化子图的约化图也同样满足规范条件, 只是相关的顶角修正不是单独的一个, 而是与同一个 $\Sigma(\not{p})$ 相关的所有顶角修正图都要加在一起, 即如图 7.6.8 中的几个图相加才能满足规范不变条件.

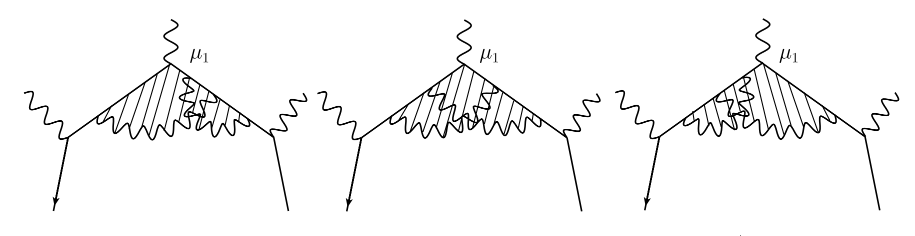


图 7.6.8

5. Furry 定理对约化图成立的证明

最后容易证明 Furry 定理对约化图也成立. 因为约化顶角就相当于 γ^μ 的倍数, 余下的 QED 的图都是 $d(\Gamma) < 0$ 或者是真空图, 前者有 $\widetilde{J}_\Gamma = \bar{J}_\Gamma$ 不用考虑 $\overline{J_\Gamma}$ 的抵消项, 这一点两种方案也是一样的. 后者因为只在最后的费恩曼积分中提供一个总的相因子, 在两种方案中也都不用考虑重整化的问题.

到这里为止, 我们证明了如果 n 圈的费恩曼积分满足：

$$\widetilde{J}_\Gamma|_{原点} = (1 - t^{d(\Gamma)})\bar{J}_\Gamma = (1 - t^{d(\Gamma)})(J_\Gamma + \Sigma'_i J_{\Gamma_i})$$

有限的话 (当截断参量 $\Lambda \to \infty$ 时), 那么相应的传统方案给出的 $\widetilde{J}_\Gamma|_{传统}$ 与它的差

也有限, 从而 $\widetilde{J}_\Gamma|_{传统}$ 也有限.

7.6.3 传统方案的收敛性

我们在 7.6.2 节证明了, 对于 n 圈图, 传统方式与 BPHZ 方式, 即原点方案的抵消项的差是有限的. 这里假设 $\bar{J}_\Gamma = J_\Gamma + \Sigma_i' J_{\Gamma_i}$ 都是由传统方案给出的, 抵消项对于 BPHZ 方式为 $-t_q^{d(\Gamma)}\bar{J}_\Gamma$, 其中 $t_q^{d(\Gamma)}$ 是以原点 $q=0$ 为基点的泰勒展开. 当 $d(\Gamma)<0$ 时, 令其为 0, 也就是没有抵消项, 传统方案是如下规定, 对于顶角修正 $\Lambda_i^\mu(p',p)$, 抵消项 $Z_{2i}\gamma^\mu$ 满足:

$$\bar{u}(p)\Lambda_i^\mu(p,p)u(p) = -Z_{2i}\gamma^\mu.$$

其中, $\bar{u}(p)=\bar{u}(\vec{p},s), u(p)=u(\vec{p},s)$.

当对同一根电子自能图派生出来的一系列顶角修正 (即分别在主电子线某内线上插上一根光子线形成的一系列顶角修正) 求和时有

$$\Sigma_i Z_{2i}|_{顶角} = Z_2|_{顶角} = Z_2.$$

这是由于 Ward 恒等式.

对于电子自能图 $-\mathrm{i}\Sigma(\not{p})$, 传统方式规定抵消项为 $Z_1 + Z_2(\not{p}-m)$. 其中 $Z_1 = \Sigma(\not{p})|_{\not{p}=m}, Z_2 = \left[\dfrac{\partial}{\partial\not{p}}\Sigma(\not{p})\right]_{\not{p}=m}$. 对真空极化图 $\Pi^{\mu\nu}(k)$, 与 BPHZ 方式一样, 抵消项也是 $-t_k^{(2)}\Pi^{\mu\nu}(k)$,$-t_k^{(2)}$ 是基点为 $k=0$ 的泰勒展开.

因为抵消项对两种方案都是类型相同的多项式 (比如, 对 Λ^μ 和 $\Sigma(p)$ 是 4×4 矩阵), 所以在算子层面上是相同类型的算子, 它们的差也是如此.

根据第 8 章 8.3.2 小节的“注意”和 8.4 小节的“注意”, 这种差别产生的项 ΔR_Γ 的 t 幂次 $< -M(\Gamma)$, 因此是收敛的, 这样可以用 Zimmermann 的方式证明传统方案是收敛的. 下面我们用算子 (在正常化前提下) 层面上的分析来证明.

我们由 QED 的拉格朗日量 (6.6.90) 式与 (4.1.13) 式, 得

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{\partial}-m)\psi - \bar{\psi}e\gamma^\mu A_\mu\psi = \mathscr{L}_{自由} + \mathscr{L}_I.$$

其中

$$\mathscr{L}_I = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{7.6.34}$$

是微扰部分.

在单圈图重整化后有抵消项, 这是由 (7.6.34) 式的相互作用形成的, 传统方

案为

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}_I|_{\text{传统}} &= -\frac{1}{4}Z_0F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + Z_2\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\psi + Z_1\bar{\psi}\psi - eZ_2\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &= -\frac{1}{4}Z_0F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + Z_2\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/)\psi + Z_a\bar{\psi}\psi - eZ_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \\ &\qquad Z_a = Z_1 - Z_2m. \end{aligned} \tag{7.6.35}$$

BPHZ 方案为

$$\Delta\mathscr{L}_I|_{\text{原点}} = -\frac{1}{4}Z_0F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + Z_2'\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/)\psi + Z_a'\bar{\psi}\psi - eZ_2'\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \tag{7.6.36}$$

相应的差 $Z_2 - Z_2', Z_a - Z_a'$ 是有限量, 相应的算符为

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_I(1) &= u_2\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/)\psi + u_a\bar{\psi}\psi - eu_2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \\ &= e^2\alpha(1)\bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/)\psi + e^2\beta(1)\bar{\psi}\psi - e^3\alpha(1)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.\end{aligned} \tag{7.6.37}$$

如果我们计算双圈图, BPHZ 方案就是用 (7.6.34) 式的 $\mathscr{L}_I = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 作为微扰来形成一个 Γ 图的费恩曼积分 $\bar{J}_\Gamma' = J_\Gamma + \Sigma_i' J_{\Gamma_i}$, 其中 Γ_i 是 Γ 的约化图, 在约化图中某些发散正规子图打上阴影变为 "约化图顶角". 这些顶角的系数是发散常数, 在正常化之后, 当截断参量有限时是些有限量甚至是小量, 当截断参量 $\to\infty$ 时发散. 然后作 $(1 - t^{d(\Gamma)})\bar{J}_\Gamma'$, 第 8 章证明了它是收敛的. 现在考虑把 J_{Γ_i} 中的约化顶角用传统的抵消项代入, 就会多出一些项, 这些项我们用 δJ_{Γ_i} 表示, 它们是将 BPHZ 抵消项变为传统抵消项时必须添加的 (7.6.37) 式中的项. 我们发现, 这时的 $\bar{J}'_\Gamma + \Sigma_i'\delta J_{\Gamma_i}$ 正好可以分为两部分, 其中 $\Sigma_i'\delta J_{\Gamma_i}$ 形成一些由新顶角即 (7.6.37) 式中的顶角 (称为派生顶角), 参加构成的 $\widetilde{\Gamma}$ 给出的 $\bar{J}'_{\widetilde{\Gamma}}$. 它们的表观发散度 $d(\widetilde{\Gamma})$ 与 $d(\Gamma)$ 相同, 因此

$$(1 - t^{d(\Gamma)})\Sigma_i'\delta J_{\Gamma_i} < \infty(\text{有限}).$$

这项与原来的 $(1 - t^{d(\Gamma)})\bar{J}_\Gamma' < \infty$ 合在一起得到 $(1 - t^{d(\Gamma)})\bar{J}_\Gamma < \infty$. 其中算 $\bar{J}_\Gamma$ 时, 对 Γ 的约化子图全部用传统的抵消项, 即 (7.6.36) 式.

我们可以用如下观点考察问题, 我们称 (7.6.37) 式中的顶角为派生顶角. 其中顶角 $e^2\alpha(1)\bar{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi + e^2\beta(1)\bar{\psi}\psi$ 对应单圈自能图, $-e^3\alpha(1)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 对应单圈顶角修正图, 我们把派生顶角对应的圈图称为它的复原图. (7.6.34) 式中 $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 对应原始顶角. 如果我们把这两个式子合起来, 就得到一个有三种图对应的微扰 —— 它们是有限的 —— 然后我们做 BPHZ 方案的微扰论处理 $n = 2$ 以下的微扰问题. 微扰论费恩曼图的法则是, 只要符合费恩曼图规则的图对应的费恩曼积分就一定会出现在散射振幅中, 而且系数就是 $\dfrac{1}{S}$(S 是对称因子), 当我们考虑双圈图微扰论展开时, 每当双圈图 Γ 的约化图中出现一个约化子图为单圈图的约化图 Γ_i 时, 就会在

$n=1$ 的微扰中出现 (7.6.37) 式中的派生顶角参加的项 $\delta\Gamma_i$, 它的复原图 (就是把产生派生顶角的原图画出来得到的图) 与 Γ_i 相同, 这些项相加, 正好使由 BPHZ 方案给出的单圈图抵消项变为传统的抵消项, 这是因为我们需要的 $\delta\Gamma_i$ 符合费恩曼图规则. 在双圈图之后, 派生顶角微扰项变成

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_I(2)=&[+e^2\alpha(1)+e^4\Sigma_i\alpha_i(2)]\bar{\psi}\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi+[e^2\beta(1)+e^4\Sigma_i\beta_i(2)]\bar{\psi}\psi\\&+[-e^3\alpha(1)-e^5\Sigma_{ij}\alpha_{ij}(2)]\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu.\end{aligned}\tag{7.6.38}$$

其中, 前两项中 e^4 项对应两种双圈电子自能图, 最后一项对应单圈图和 6 种双圈顶角修正图, 顶角修正是两组, 分别与两种自能图对应.

当作 3 圈图时, 我们考虑以 (7.6.34) 式的 $\mathcal{L}_I$ 和 (7.6.38) 式一起形成的微扰作普通的 BPHZ 方案抵消项, 把 $n=0,n=1,n=2,n=3$ 的微扰放在一起, 就会发现所有传统抵消项 $J_{\Gamma_i}=J'_{\Gamma_i}|+\delta J_{\Gamma_i}$. 这里的 J'_{Γ_i} 是指标准的由 BPHZ 方案给出的抵消项, δJ_{Γ_i} 项正好是 (7.6.38) 式中的相应顶角参加的费恩曼积分, 因为它们正好符合构图法则, 反之, 由 (7.6.38) 式中派生顶角参加的 δJ_{Γ_i}, 它的复原图一定是某个三圈图的约化图 Γ_i. 有派生顶角参加的, 复原图与 Γ_i 相同的费恩曼积分求和得到的抵消项不是纯粹由原始顶角 $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 构成的 J'_{Γ_i}, 而是 $J_{\Gamma_i}|_{传统}=J_{\Gamma_i}|_{原点}$. 在 $J_{\Gamma_i}|_{原点}$ 中, 双圈约化子图中的单圈图是用传统方式定义抵消项的, 这是由于 (7.6.38) 式中的各项都 “钻进了” 所有可能的子图中了, 只要子图与派生顶角的复原图相同.

以上推导可以推广到任意圈数, 下面举一些例子. 对电子自能图 7.6.9(a), 要加入 (b) 和 (c) 然后形成

$$\bar{J}'_\Gamma=J_{\Gamma_a}+J_{\Gamma_b}+J_{\Gamma_c}=J_\Gamma+J_{\Gamma_1}+J_{\Gamma_2}=J_\Gamma+\Sigma'_iJ_{\Gamma_i}\tag{7.6.39}$$

在这里 $\bar{J}'_\Gamma$ 表示用标准的 BPHZ 方案给出的对应 Γ 图的 $\bar{R}_\Gamma$ 在动量空间的积分. 在图 7.6.9 中, (b) 和 (c) 中的约化子图相应的费恩曼积分都是 $-eZ'_2\gamma^\mu$. 当把这些顶角修正由 BPHZ 方案改为传统方案时, 又要在其中将顶角修正的阴影部分加上 (7.6.37) 式中的 $-e^3\alpha(1)\gamma^\mu$(这是有限量), 相当于取 (7.6.34) 式中的微扰项 $\mathscr{L}_I$ 和 (7.6.37) 式一起作为原始微扰 (即没有约化图顶角)$\mathscr{L}_I$, 所以顶角部分变为 $[-e-e^3\alpha(1)]\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$.

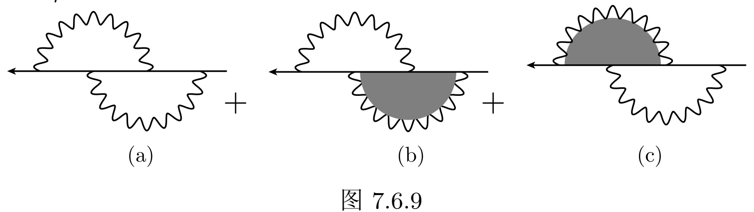


图 7.6.9

BPHZ 方案要求所有的微扰都要参加构图, 因此在单圈图中就会出现图 7.6.10.

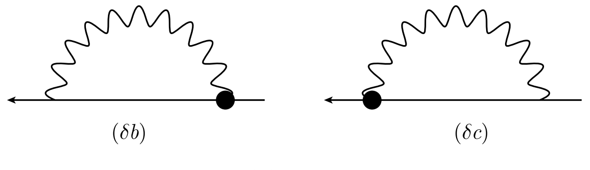


图 7.6.10

我们分别以 δJ_{Γ_b} 和 δJ_{Γ_c} 表示它们的费恩曼积分. 当取 (7.6.36) 式作为约化顶角的对应算子时, $-i\widetilde{\Sigma}(\not p)|_B = (1-t_p^{(1)})\bar{J}'_\Gamma$, 其中 $\bar{J}'_\Gamma = J_\Gamma + \Sigma'_i J'_{\Gamma_i}$(带撇 "$'$" 号的是指 BPHZ 方案给出的) 就是标准的只有原始 $\mathscr{L}_I$, 即最初的顶角参加的 BPHZ 方案的重整化电子自能. 在第 8 章, 我们证明它是有限的, 这里 $t_p^{(1)}$ 是对 p_0, p_1, p_2, p_3 的以 $p=0$ 为基点的一次泰勒展开.

现在有派生顶角 $-e^3\alpha(1)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 参加的图对应的费恩曼积分迭加到 $\bar{J}'_\Gamma$ 上, 就使得 $J'_{\Gamma_i} + \delta J_{\Gamma_i} = J_{\Gamma_i}$ 与传统方案的顶角修正的抵消项一致, $\bar{J}_\Gamma = \bar{J}'_\Gamma + \sum'_i \delta J_{\Gamma_i} = J_\Gamma + \Sigma'_i J_{\Gamma_i}$. 这样得到的 $(1-t^{(1)})\bar{J}_\Gamma$ 还是有限的, 因为它是分别由两组顶角构成的图 Γ 和 $\Gamma_{\delta b}$, $\Gamma_{\delta c}$ 作标准的 BPHZ 方案得到的结果的线性组合. 我们有: $\bar{J}_\Gamma = \bar{J}'_\Gamma + \bar{J}'_{\Gamma_{\delta b}} + \bar{J}'_{\Gamma_{\delta c}}$. 由第 8 章, $(1-t^{(1)})\bar{J}'_{\Gamma_{\delta b}}$ 和 $(1-t^{(1)})\bar{J}'_{\Gamma_{\delta c}}$ 都有限 (事实上, 由于 $\Gamma_{\delta b}$ 和 $\Gamma_{\delta c}$ 没有真的发散子图, 它们的 $\bar{J}'_{\Gamma_{\delta b}} = J_{\Gamma_{\delta b}}, \bar{J}'_{\Gamma_{\delta c}} = J'_{\Gamma_{\delta c}}$). 因此, 对于以传统方式定义单圈图约化顶角的双圈图 $-\mathrm{i}\Sigma(p) - \mathrm{i}\widetilde{\Sigma}(p)|_{原点} = (1-t_p^{(1)})\bar{J}_\Gamma$ 也收敛.

△ 对于双圈真空极化图 $\Pi^{\mu\nu}(k)$, 它的原图和约化图为图 7.6.11(a), 相应地由 (7.6.34) 式作微扰给出 $\bar{J}'_{\Gamma_a} = J_{\Gamma_a} + J_{\Gamma_b} + J_{\Gamma_c}$.

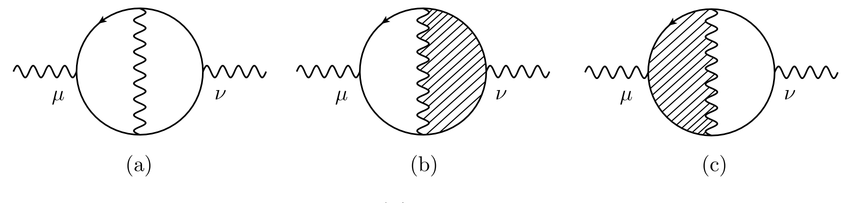


图 7.6.11

由于 (7.6.37) 式中的派生顶角, 其复原图与图 7.6.11 中 (b)、(c) 相同的有图 7.6.12. 这些图自己没有真的发散子图, 所以它们的 $\bar{J}'_\Gamma$ 就是 J_Γ 自己, 即 $\bar{J}'_{\Gamma_{\delta b}} = J_{\Gamma_{\delta b}}, \bar{J}'_{\Gamma_{\delta c}} = J_{\Gamma_{\delta c}}$, 与图 7.6.11(a) 的费恩曼积分 $\bar{J}'_{\Gamma_a} = J_{\Gamma_a} + J_{\Gamma_b} + J_{\Gamma_c}$ 一起, 一共形成三个 $\bar{J}'$, 它们的和 $\bar{J}'_{\Gamma_a} + \bar{J}'_{\Gamma_{\delta b}} + \bar{J}'_{\Gamma_{\delta c}} = \bar{J}_{\Gamma_a}$ 是由传统方案定义的 $\bar{J}_{\Gamma_a}$. 它们按照 $BPHZ$, 都遵守 $(1-t^{(2)})\bar{J}' =$ 有限 $< \infty$, 所以它们的和 $\bar{J}_{\Gamma_a}$ 也遵从 $(1-t^{(2)})\bar{J}_{\Gamma_a} < \infty$, 也就是有限的.

△△ 当图 7.6.11(a) 作为子图出现在更大的图中时, 如果要构造 $\bar{J}$, 图 7.6.11 中还得添上图 7.6.13 中的 (α) 图. 因为这时图 7.6.11(a) 是一个真子图, 在形成 $\bar{J}$ 时

要加上它作为约化子图对应的约化顶角.

相应地, 图 7.6.12 中也得添加图 7.6.13 中的 (β), (γ) 图即由派生顶角参加的约化图, 这些图 (α), (β), (γ) 自己没有额外的派生顶角图, 因为真空极化自己没有独立的派生顶角 (见 7.6.2.4 节), 但它们的子图是有的.

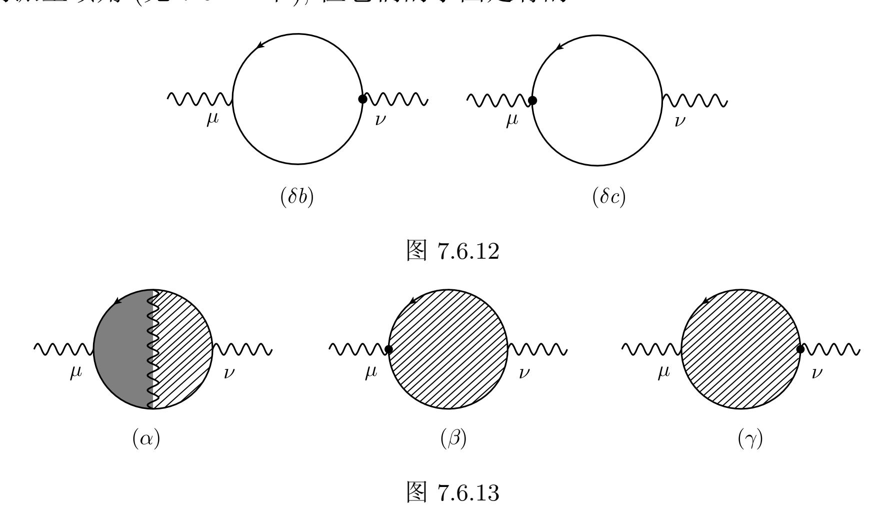


图 7.6.12

图 7.6.13

△△△ 再举一个完全的例子. 考虑图 7.6.14(a) 及其约化图, 7.6.14(a) 是一个四圈图. 把 $\delta\mathscr{L}_I(3)$(方程 (7.6.38) 式与 $\delta\mathscr{L}(2), \delta\mathscr{L}(3)$ 类似.) 作为微扰之后, 相关的有派生顶角参加的费恩曼图为图 7.6.15, 其中 (9)～(15) 图中包含有顶角修正的单圈图的派生顶角. (9) 图中有三圈顶角修正的派生顶角.

考察这些图, 我们有如下发现：

(b) + (1) 使 (b) 中的单圈自能由 BPHZ 方案变为传统方案;

(e) + (3) 使 (e) 中的单圈自能由 BPHZ 方案变为传统方案;

(c) + (2) + (6) 使 (c) 中的双圈图自能变为传统方案;

(f) + (4) + (7) 使 (f) 中的双圈图自能变为传统方案;

(d) + (10) 使 (d) 中顶角修正单圈变为传统方案;

[(e) + (3)] + (11) + (13) 使 (e) 中的单圈顶角修正及电子自能都变为传统方案;

[(f) + (4) + (7)] + (12) + (14) + (15) 使 (f) 中的单圈顶角修正变为传统方案; 并使 (f) 中的电子自能双圈图变为传统方案.

[(g) + (5) + (8) + (9)] 使 (g) 中的顶角修正变为传统, (9) 中包含一个三圈顶角图的派生顶角 $-e^7\alpha_{ij}(3)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$.

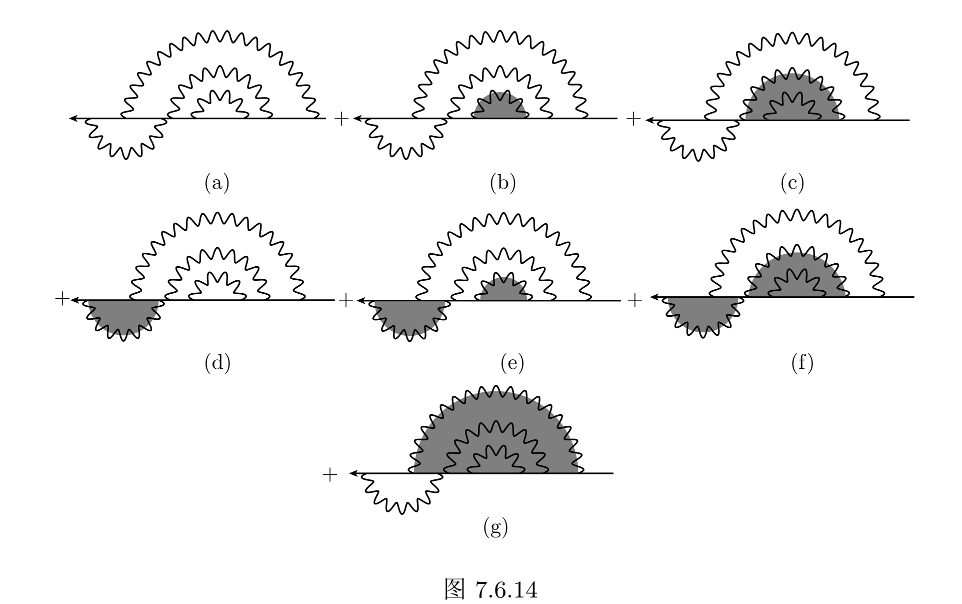
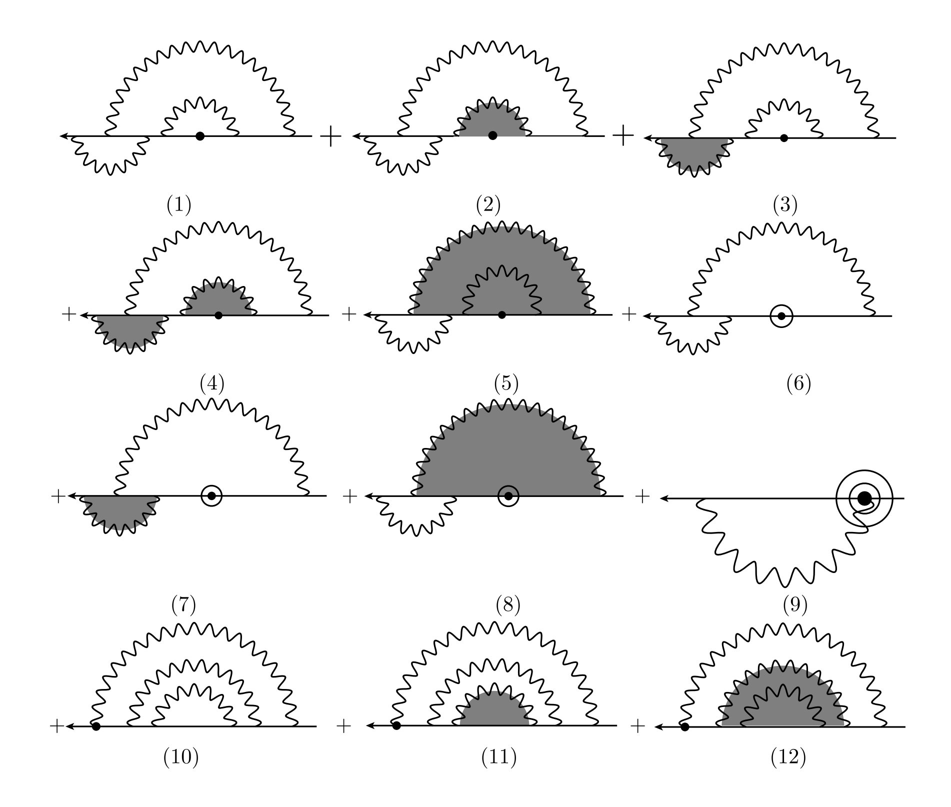


图 7.6.14



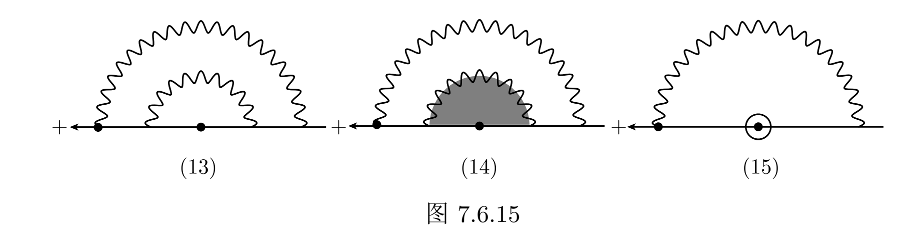


图 7.6.15

到此为止, 所有子图中的抵消项全变为传统方案. 我们看到, 图 7.6.13(a)~(f) 是完整的 Γ 和它的约化图 Γ_i 相关的 $J_\Gamma + \Sigma_i' J_{\Gamma_i}$ 给出 $\bar{J}'_\Gamma$. 图 7.6.15 中 $\Gamma_{(1)}$ 作为原图, $\Gamma_{(2)}, \Gamma_{(3)}, \Gamma_{(4)}, \Gamma_{(5)}$ 是它的完整的一套约化图, 因此

$$J_{\Gamma(1)} + \cdots + J_{\Gamma(5)} = \bar{J}'_{\Gamma(1)}$$

$\Gamma_{(6)}$ 作为原图, 有 $J_{\Gamma_{(6)}} + J_{\Gamma_{(7)}} + J_{\Gamma_{(8)}} = \bar{J}'_{\Gamma(6)}$; $\Gamma_{(10)}$ 作为原图, 有 $J_{\Gamma_{(10)}} + J_{\Gamma_{(11)}} + J_{\Gamma_{(12)}} = \bar{J}'_{\Gamma(10)}$; $\Gamma_{(9)}$ 作为原图, 有 $J_{\Gamma_{(9)}} = \bar{J}'_{\Gamma(9)}$($\Gamma_{(9)}$ 没有真子图), $\Gamma_{(13)} + \Gamma_{(14)} = \bar{J}'_{\Gamma(13)}$, $J_{\Gamma_{(15)}} = \bar{J}'_{\Gamma(15)}$, 因为 $\Gamma_{(15)}$ 没有真的发散子图.

把全部结果加起来得到 $\bar{J} = \Sigma_{\widetilde{\Gamma}} \bar{J}'_{\widetilde{\Gamma}}$, Γ 包括 Γ、$\Gamma_{(1)}$、$\Gamma_{(6)}$、$\Gamma_{(9)}$、$\Gamma_{(10)}$、$\Gamma_{(13)}$、$\Gamma_{(15)}$, 由于派生顶角的表观发散度是它的外线的动量的幂次, 它等于约化顶角的幂次, 从而等于相关 γ_τ 的表观发散度, 所以 $d(\widetilde{\Gamma}) = d(\Gamma)$, 因此由第 8 章有

$$(1 - t^{d(\Gamma)})\bar{J} < \infty.$$

我们还要考虑一个反问题, 凡是有派生顶角参加的图都有确定的复原图, 它们就是某个由 $\mathscr{L}_I$ 作顶角构成的图 Γ. 这些派生顶角参加的 $J_{\widetilde{\Gamma_i}}$ 正是构成传统抵消项形成的 $\bar{J}_\Gamma$ 所必须的, 不会多一个, 也不会少一个, 因为费恩曼图构图规则所允许的就是那一项, 正如第 5 章证明的那样.

7.6.4 从费恩曼被积函数角度分析

我们再用 Zimmerman 的方式也就是从费恩曼被积函数的角度来阐述上面的观点. 前面在 7.6.2 节, 我们证明的是, 对任何发散正规图 γ 有 $Q_\gamma|_{传统} = Q_\gamma|_{原点} + \delta Q_\gamma$, 其中

$$Q_\gamma|_{原点} = -t^{d(\gamma)} \left(I_\gamma + \sum_{\{\gamma_1' \cdots \gamma_c\}}' I_{\gamma/\gamma_1 \cdots \gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}|_{传统} \right) \equiv -t^{d(\gamma)} \bar{R}_\gamma|_{传统}. \quad (7.6.40)$$

如果定义

$$\bar{R}_\gamma|_{传统} = I_\gamma + \sum_{\{\gamma_1 \cdots \gamma_c\}}' I_{\gamma/\gamma_1 \cdots \gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} (\delta Q_{\gamma_\tau} + Q_{\gamma_\tau}|_{原点})$$

则

$$Q_\gamma|_{传统} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)}\bar{R}_\gamma|_{传统}. \tag{7.6.41}$$

那么, 我们可以定义一个限制的 γ 林, 即由一系列发散正规图 γ_i,—— 它们之间或者包含, 或者分离, 也就是不交叉 —— 形成的集合, 其中最大的是 γ, 它包含其余的. 把 $Q_\gamma|_{传统}$ 用 γ 林 $U(\gamma)$ 的方式来定义.

$$Q_\gamma|_{传统} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)}(I_\gamma + \sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}{}' I_{\gamma/\gamma_1\cdots r_c}\Pi_{\tau=1}^c(\delta Q_{\gamma_\tau} + Q_{\gamma_\tau}|_{原点})$$

其中, $\sum'$ 不包含对 $\{\gamma\}$ 的求和, $\{\gamma_1;\cdots\gamma_c\}$ 是互相分离真的发散正规子图的集合 (真子图指不包括 γ 自己), 由此得

$$\begin{aligned}Q_\gamma|_{传统} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)}\Bigg(&I_\gamma + \sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}{}' I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c}\prod_{\tau=1}^{c}(\delta Q_{\gamma_\tau} - t^{d(\gamma_\tau)}(I_{\gamma_\tau}\\ &+ \sum_{\{\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau_l}\}}{}' I_{\gamma_\tau/\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau_l}} \times \prod_{i=1}^{l}(\delta Q_{\gamma_{\tau_i}} - t^{d(\gamma_{\tau_i})}(I_{\gamma_{\tau_i}} + \sum{}'\cdots)))\Bigg).\end{aligned} \tag{7.6.42}$$

我们分析公式 (7.6.42), 每一项的终点 (最右端) 都是 $\prod_{s=1}^{l}\delta Q_{\gamma_s}$ 的形式, 其中 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_l\}$ 是一群互相分离的 γ 的真的正规发散子图. 它的前面是一系列的包含它们的子图 γ_t 的 $-t^{d(\gamma_t)}$ 的连乘积作用于 $I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_l}\times\prod_s\delta Q_{\gamma_s}$ 上. 我们把集合 $\{\gamma_1\cdots\gamma_l\}$ 叫作 V. 因此, γ 图有许多 V. 如果我们把含有 V 作为子集的如下的正常林, 叫作 $U(\gamma)_V$: 它的一切元素或者包含 V 的元素, 或者与 V 的元素分离, 也就是它的元素 γ_i 与 V 的元素 γ_j 之间只允许 $\gamma_i\supset\gamma_j$ 或 γ_i 与 γ_j 分离, 且 $\gamma_i\notin V$.

如果我们定义 $-t^{d(\gamma_i)}$ 的次序如下: 若 $\gamma_i\supset\gamma_j$, 则把次序定为 $(-t^{d(\gamma_i)})(-t^{d(\gamma_j)})$, 否则, 当 γ_i 和 γ_j 分离时, 这两个算符可以任意排次序. 用这样的方式, 我们就可以对限制的 γ 林 $U(\gamma)$ 给出

$$Q_\gamma|_{传统} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)}\sum_V\sum_{U(\gamma)_V}\prod_{\lambda\in U(\gamma)_V,\lambda\neq\gamma}(-t^{d(\lambda)})\left\{I_\gamma\Big/\prod_{\gamma_\tau\subset V}{}_\tau\,\gamma_\tau\times\prod_{\gamma_\tau\subset V}\delta Q_{\gamma_\tau}\right\}. \tag{7.6.43}$$

如果某个 γ_i 包含一个或几个 V 中的元素 $\gamma_{\tau'}$, 将这些 $\gamma_{\tau'}$ 收缩为一点, 变为 $\gamma_i/\Pi_{\tau'}\gamma_{\tau'}\equiv\widetilde{\gamma}_i$, 那么 $I_{\gamma_i}/\Pi_{\tau'}\gamma_{\tau'}\times\Pi_{\tau'}\delta Q_{\gamma_{\tau'}}$ 的表观发散度与 γ_i 的表观发散度相同, 这是因为 QED 中发散度只取决于子图的外线, 所以 δQ_{γ_τ} 的幂次等于 $d(\gamma_\tau)$, 而且有

$$d\left(\gamma_i\Big/\prod_{\tau'}\gamma_{\tau'}\right) + \sum_{\tau'}d(\gamma_{\tau'}) = d(\gamma_i) \Rightarrow d(\widetilde{\gamma}_i) = d(\gamma_i).$$

假设 γ_i 是 $U(\gamma)_V$ 中包含某些 V 中元素的最小元素, 令 V_i 是 V 中被 γ_i 包含的那些元素的集合.

我们把 $I_{\gamma_i/\prod_{\tau'}\gamma_{\tau'}} \times \prod_{\tau'} \delta Q_{\gamma_{\tau'}}$ 写成 $\tilde{I}_{\tilde{\gamma}_i}$, 得到

$$
\begin{aligned}
& I_\gamma / \prod_{\gamma_\tau \in V} \gamma_\tau \times \prod_{\gamma_\tau \in V} \delta Q_{\gamma_\tau} \\
= & I_\gamma / \prod_i \gamma_i \times (\prod_i (I_{\gamma_i} / \prod_{\tau' \in V_i} \gamma_{\tau'} \times \prod_{\tau' \in V_i} \delta Q_{\gamma_{\tau'}})) \\
= & I_\gamma / \prod_i \gamma_i \times \tilde{I}_{\tilde{\gamma}_i} \\
= & I_{\widetilde{\gamma}} / \prod_i \widetilde{\gamma}_i \times \widetilde{I}_{\widetilde{\gamma}_i} = \widetilde{I}_{\widetilde{\gamma}}, \text{因为 } \gamma / \prod_i \gamma_i \text{与} \widetilde{\gamma} / \prod_i \widetilde{\gamma}_i \text{ 的线元相同.}
\end{aligned} \tag{7.6.44}
$$

当 V 为空集时, $\widetilde{\gamma}_i$ 就是 $\gamma_i, \widetilde{I}_{\widetilde{\gamma}_i}$ 就是 $I\gamma_i$. 由 (7.6.41) 我们得到

$$
Q_\gamma|_{\text{传统}} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)} \sum_V \sum_{U(\gamma)_V} \prod_{\tilde{\lambda} \in U(\tilde{\gamma}), \tilde{\lambda} \neq \tilde{\gamma}} -t^{d(\tilde{\lambda})} \{\tilde{I}_{\tilde{\gamma}}\}. \tag{7.6.45}
$$

每一个正常林 $U(\gamma)_V$ 它的元素 γ_i 包含 V 的一些元素或与 V 的元素分离, 但是它的元素中不包括任何 V 的元素. 当 V 的元素 γ_τ 都缩为一点时会变为一个 $U(\widetilde{\gamma})$. 这时 γ 变为约化图 $\widetilde{\gamma}$. 当 V 为空集时, $\widetilde{\gamma} = \gamma$, $U(\gamma)_{V=\phi} = U(\gamma)$ 是原图 γ 的正常林. 对给定的 V, 由于不同的 $U(\gamma)_V$ 的求和 $\sum_{U(\gamma)_V} = \sum_{U(\widetilde{\gamma})}'$(求和号 $\sum'$ 表示 $\widetilde{\gamma}$ 上必须有由 V 的所有元素对应的所有派生顶角), (7.6.45) 式变为

$$
Q_\gamma|_{\text{传统}} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)} \sum_V \sum_{U(\tilde{\gamma})}' \prod_{\tilde{\lambda} \in U(\tilde{\gamma}), \tilde{\lambda} \neq \tilde{\gamma}} -t^{d(\tilde{\lambda})} \tilde{I}_{\tilde{\gamma}} \tag{7.6.46}
$$

由于 $\sum_{U(\widetilde{\gamma})}'$ 是对有确定派生顶角 V 里的元素参加的 $\widetilde{\gamma}$ 对应的 $U(\widetilde{\gamma})$ 求和, 所以当不限定 V 时有 $\sum_V \sum_{U(\gamma)_V} = \sum_{\widetilde{\gamma}} \sum_{U(\widetilde{\gamma})}$, 得

$$
Q_\gamma|_{\text{传统}} = \delta Q_\gamma - t^{d(\gamma)} \sum_{\widetilde{\gamma}} \sum_{U(\tilde{\gamma})} \prod_{\tilde{\lambda} \in U(\tilde{\gamma}), \tilde{\lambda} \neq \tilde{\gamma}} -t^{d(\tilde{\lambda})} \tilde{I}_{\tilde{\gamma}}. \tag{7.6.47}
$$

这是一个有确定的一些派生顶角参加的普通的 BPHZ 方案给出的抵消项之和加上对 k 空间积分收敛的 δQ_γ.

现考虑 $d(\gamma) \geqslant 0$ 的情形

$$R_\gamma|_{传统} = I_\gamma + \sum\nolimits'_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}|_{传统} + Q_\gamma|_{传统} = \bar{R}_\gamma|_{传统} + Q_\gamma|_{传统}, \tag{7.6.48}$$

由 (7.6.41) 式, 得

$$R_\gamma|_{传统} = \delta Q_\gamma + (1 - t^{d(\gamma)})\bar{R}_\gamma|_{传统}.$$

对比 (7.6.40) 式, 我们发现 $\bar{R}_\gamma|_{传统}$ 就是 (7.6.40) 式中 $-t^{d(\gamma)}$ 后面的式子, 因而也就是 (7.6.47) 式中 $-t^{d(\gamma)}$ 后的式子. 由 (7.6.47) 式得到

$$\bar{R}_\gamma|_{传统} = \sum_{\tilde{\gamma}} \sum_{U(\tilde{\gamma})} \prod_{\tilde{\lambda}\in U(\tilde{\gamma}),\tilde{\lambda}\neq\tilde{\gamma}} -t^{d(\tilde{\lambda})} \tilde{I}_{\tilde{\gamma}} \equiv \sum_{\tilde{\gamma}} \bar{R}_{\tilde{\gamma}}|_{\mathrm{BPHZ}}, \tag{7.6.49}$$

因此,

$$\begin{aligned} R_\gamma|_{传统} &= \delta Q_\gamma + (1 - t^{d(\gamma)}) \sum_{\widetilde{\gamma}} \sum_{U(\widetilde{\gamma})} \prod_{\widetilde{\lambda}\in U(\widetilde{\gamma}),\widetilde{\lambda}\neq\widetilde{\gamma}} -t^{d(\widetilde{\lambda})} \widetilde{I}_{\widetilde{\gamma}} \\ &= \delta Q_\gamma + \sum_{\widetilde{\gamma}} (1 - t^{d(\widetilde{\gamma})}) \sum_{U(\widetilde{\gamma})} \prod_{\widetilde{\lambda}\in U(\widetilde{\gamma}),\widetilde{\lambda}\neq\widetilde{\gamma}} -t^{d(\widetilde{\lambda})} \widetilde{I}_{\widetilde{\gamma}} \\ &= \delta Q_\gamma + \sum_{\widetilde{\gamma}} R_{\widetilde{\gamma}}|_{\mathrm{BPHZ}}, \end{aligned} \tag{7.6.50}$$

其中, $\widetilde{\gamma}$ 是复原图与 γ 相同的有派生顶角参加的费恩曼图. 当没有派生顶角时 $\widetilde{\gamma} = \gamma$. 指导中第二个等号是由于 $d(\widetilde{\gamma}) = d(\gamma)$.

第二项是标准的 BPHZ 方案的 $R_{\widetilde{\gamma}}|_{\mathrm{BPHZ}}$ 的求和, 只是微扰包括 $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 以及派生顶角 $-e^3\alpha_2(1)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ 等, 根据 BPHZ 方案的收敛性质, 对 k 的积分是收敛的, 由 7.6.2 节的分析 δQ_γ 的积分也是有限的, $\Longrightarrow R_\gamma|_{传}$ 对 k 的积分收敛 (δQ_γ 的例子见 (7.6.13) 式的被积函数对 x 的积分). 当 $d(\gamma) < 0$ 时, 情况也类似. 这时 $t^{d(\gamma)} = t^{d(\widetilde{\gamma})} = 0$. 由 (7.5.10) 式, $R_\gamma|_{传统} = \bar{R}_\gamma|_{传统} = \sum_{\widetilde{\gamma}} \bar{R}_{\widetilde{\gamma}}|_{\mathrm{BPHZ}} = \sum_{\widetilde{\gamma}} R_{\widetilde{\gamma}}|_{\mathrm{BPHZ}}$. 第 8 章证明了右边各项对 k 的积分都收敛, 因此 $R_r|_{传统}$ 也收敛.

7.6.5　传统 QED 重整化的具体方案

最后我们介绍传统 QED 重整化中的骨架图概念.

△ 费恩曼图 γ 的顶点有两种, 一种顶点, 其顶角的顶角线全部是 γ 的内线称为内顶点, 否则称为边界顶点. 从 γ 的点与 γ 外的点相连一定要经过边界顶点, 走过边界顶点和这一顶点的外线.γ 的点 (不一定是顶点) 除边界顶点以外的点都称为内部点. 对于 QED 的正规图 γ_1(强连接图), 一个边界顶点的外线只有一根.

△ 考虑两个 QED 的正规图 γ_1 和 γ_2, γ_2 不被 γ_1 包含, 即 $\gamma_2/\gamma_1 \neq \varnothing$. 如果有公共点, 那么 $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$ 是正规图. (在这里, 我们用 γ_a/γ_b 代表属于 γ_a 但不属于 γ_b 的点组成的集合.) 由 γ_1 的内部点通过 γ 的线元与 γ_2/γ_1 的点相连时, 一定可以

通过 γ_1 的两个不同的边界顶点. 如果只能通过 γ_1 的一个边界顶角 P, P 的 γ_1 的外线是必经之路. 这根过 P 顶点唯一的外线不属 γ_1, 但必须属于 γ_2(否则该线不属于 γ). 只要将该线切断就把 γ 分割为两个不相连接的部分, 然而 γ 是强连接的图, 这是矛盾的.

由于上述连接通道中 γ_1 的边界顶角的外线一定属于 γ_2, 因而是 γ 的内线, 所以对于 γ, 该顶点是内顶点, 结论是, 当 $\gamma_2/\gamma_1 \neq \varnothing$ 且 $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \varnothing$ 时, γ_1 的两个边界点和相应的两根外线都成为 γ 的内顶点和内线了. 我们有

$$\gamma\text{的外线数}n_\gamma \leqslant \gamma_1\text{的外线数}n_{\gamma_1} + \gamma_2\text{的外线数}n_{\gamma_2} - 2. \tag{7.6.51}$$

(小于号在 $\gamma_1/\gamma_2 \neq \varnothing$ 时, 或者 γ_1 有不止两个边界通道可以由 γ_1 的内点到达 γ_2/γ_1 的点时, 可能出现.)

推论：当 $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \varnothing$, 且互不包含时, 令 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, 则有

$$n_\gamma \leqslant n_{\gamma_1} + n_{\gamma_2} - 4, \tag{7.6.52}$$

△ 我们讨论一个 QED 的正规图 Γ, 考虑它的所有的真空极化 $\pi_{\mu\nu}$、电子自能 Σ 和顶角修正 Λ^μ 这三类真子图, 有如下结果.

(1) 当三类图中任意两个 γ_1 和 γ_2 相交时 $(\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \varnothing)$,$(\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2)$ 不可能是真空图或者有一根外线的图 (蝌蚪图), 因为 Γ 是强连接的.

(2) 当 $\gamma_1 = \pi_{\mu\nu}$ 或 Σ 与三类图中的任何一个 γ_2 相交时, 不可能交叉 (交叉是相交但互不包含), 因为按 (7.6.52) 式, 在 γ_1 与 γ_2 交叉时, 令 $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$, 有 $n_\gamma \leqslant n_{\gamma_1} + n_{\gamma_2} - 4 = 2 + n_{\gamma_2} - 4 \leqslant 2 + 3 - 4 = 1$, 按 (1) 这不可能. 因此, 必须是 $\gamma_1 \supset \gamma_2$ 或 $\gamma_2 \subset \gamma_1$.

(3) 当 γ_1 和 γ_2 都是 Λ^μ 而且相交时, 如果 $\gamma_1 \supset \gamma_2$, 则 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma_1$; 如果 γ_1 与 γ_2 交叉, 则 $n_\gamma \leqslant 3 + 3 - 4 = 2$. 由 (1), γ 只能是 $\pi_{\mu\nu}$ 或 Σ.

(4)Γ 的这三类子图互相相交形成和集时, 求和集的任何一步给出的只能是这三类图中的一个.

(5) 在 Γ 中这三类真子图的关系中, 只有两个顶角修正图可以交叉, 这时和集是真空极化或电子自能, 其余只能是互相包含或分离.

(6)$\Gamma = \Lambda^\mu$ 的这三类真子图形成的和集 $\cup\gamma_i \neq \Gamma$, 这是因为求和集的结果是唯一的. 设最后一步是 $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \Gamma$, 而 γ_1 和 γ_2 都是 Γ 的真子图, 必须 γ_1 与 γ_2 交叉, 由 (5) 它们的和集不可能是顶角修正, 因而不等于 Γ.

△ 对于一个 QED 的正规图 Γ, 考虑其 $\pi_{\mu\nu}$、Σ、和 Λ^μ 真子图 $\gamma_1, \cdots, \gamma_l$ 的并集的分离部分 $\delta_1, \cdots, \delta_c$. 由前面 (4), δ_τ 也是这三类图中的一个.

将 $\cup_j\gamma_j$ 的线元收缩为一点, 得到的图 Γ_s 称为 Γ 的骨架图. 由于 $\cup_j\gamma_j$ 是唯一的, 与求和的次序、方式无关, 所以用任何方式将三类真子图缩为一点, 得到的都是 Γ_s.

顶角修正 Λ^μ 的骨架图 Λ^μ_s 也是顶角修正图, 因为：①由 (6)Γ_s 不平庸, 其顶角仍是 QED 的顶角 (内线上增添了一些点, 也就是两根外线的顶角, 这些不算); ②正规图收缩后仍然得到正规图 (类似地, 任何 QED 正规图 Γ 的非平庸的 Γ_s 都是 QED 的正规图); ③边界点和外线没有变, 与之对比, $\pi_{\mu\nu}$ 和 Σ 的骨架图可能是平庸的. (7.6.49) 式可写成

$$R_\gamma|_{传统} = I_\gamma + \sum_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_\gamma|_{传统}.$$

求和范围为一切 γ 的发散正规子图集合, 当 $d(\gamma)\geqslant 0$ 时, 也包括 $\{\gamma\}$.

又可以写成

$$R_\gamma|_{传统} = \sum\nolimits^{*}_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_\gamma|_{传统}, \tag{7.6.53}$$

其中, 求和号 $\sum^*$ 的范围包括一切 γ 的互相分离的发散的正规子图形成的集合. 若 $d(\gamma)\geqslant 0$, 也包括 γ 自己, 同时包括空集 (空集令 $\prod_{\tau=1}^{c} Q_\gamma|_{传统}=1$). 按这个方式, 还可以写出

$$\bar{R}_\gamma|_{传统} = \sum\nolimits^{*'}_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}} I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_\gamma|_{传统}, \tag{7.6.54}$$

$\sum^{*'}_{\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}}$ 可以包括空集, 但不包括 γ 自己形成的一个元素的集合 $\{\gamma\}$. 考虑 QED 的正规图 Γ, 令 $\delta_1,\cdots,\delta_c$ 为 Γ 的由前述的三类图真发散正规子图形成的并集的连接部分, 当 Γ 不是真空图时, 由 (4), δ_τ 也属于这三类图. 我们有如下结果：

$$\bar{R}_\Gamma|_{传统} = I_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c} \prod_{\tau=1}^{c} R_{\delta_\tau}|_{传统}, \tag{7.6.55}$$

$$R_\Gamma|_{传统} = Q_\Gamma|_{传统} + \bar{R}_\Gamma|_{传统}. \tag{7.6.56}$$

如果当 $d(\Gamma)<0$ 时, 定义 $Q_\Gamma|_{传统}=0$, 则 (7.6.56) 式也包括 $d(\Gamma)<0$ 的情形.

证明：Γ 的分离的发散正规子图肯定分属于各个 δ_τ, 这些发散子图形成的集合是各个 δ_τ 内某个分离的发散正规子图集合 (包括空集) 的并集, 因此有

$$\begin{aligned}
\prod_{\tau=1}^{c} \sum\nolimits^{*(\tau)}_{\{\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau c_\tau}\}} = \sum\nolimits^{*'(\Gamma)}_{\{\gamma_1\cdots\gamma_l\}}, \prod_{\tau=1}^{c} R_{\delta_\tau} &= \prod_{\tau} \sum\nolimits^{*(\tau)}_{\{\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau c_\tau}\}} I_{\delta\tau/\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau c\tau}} \prod_{i} Q_{\gamma_{\tau_i}}|_{传统} \\
&= \prod_{\tau} \sum\nolimits^{*(\tau)}_{\{\gamma_{\tau_1}\cdots\gamma_{\tau c_\tau}\}} I_{\delta\tau}/I_{\gamma_{\tau_1}}\cdots I_{\gamma_{\tau c\tau}} \prod_{i}^{(\tau)} Q_{\gamma_{\tau_i}}|_{传统} \\
&= \sum\nolimits^{*'(\Gamma)}_{\{\gamma_1\cdots\gamma_l\}} \Big(\prod_{\tau=1}^{c} I_{\delta_\tau}\Big) \Big/ \prod_{j=1}^{l_\Gamma} I_{\gamma_j} \prod_{j=1}^{l_\Gamma} Q_{\gamma_j}|_{传统}
\end{aligned}$$

其中, $\sum^{*(\tau)}$、$\prod^{(\tau)}$ 是在 δ_τ 内进行的, $\sum^{*'(\Gamma)}$、$\prod^{(\Gamma)}$ 是相对于 Γ 图的. 是 $\sum^{*'(\Gamma)}$ 而不是 $\sum^{*(\Gamma)}$ 是由于要求 γ_j 是 Γ 的真子图, 因而不包括集合 $\{\Gamma\}$. 考虑到 $I_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c} = I_\Gamma/I_{\delta_1}\cdots I_{\delta_c}$, 得到 $I_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c}\prod_{\tau=1}^{c} R_{\delta_\tau} = \sum^{*(\Gamma)'} I_{\Gamma/\gamma_1\cdots\gamma_l}\prod_j Q_{\gamma_j}|_{传统}$. 由此我们得到 (7.6.55) 式. 注意: $\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c=$ 骨架图 Γ_s.

由积分变元公式 (8.1.26) 式得

$$\begin{aligned}\bar{F}_\Gamma|_{传统}=&\int\prod_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c=\Gamma_s\text{的独立线元}l_{abc}}\mathrm{d}^4k_{abc}^\Gamma I_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c}\\&\times\prod_{\tau=1}^{c}\int\prod_{\delta_\tau\text{的独立线元}l_{a'b'c'}}\mathrm{d}^4k_{a'b'\sigma'}^{\delta_\tau}R_{\delta_\tau}|_{传统},\end{aligned}\tag{7.6.57}$$

$$\begin{aligned}F_\Gamma|_{传统}=&\int\prod_{\Gamma\text{的独立线元}}\mathrm{d}^4k_{abc}^\Gamma Q_\Gamma|_{传统}+\bar{F}_\Gamma|_{传统}\\=&O_\Gamma|_{传统}+\bar{F}_\Gamma|_{传统}.\end{aligned}\tag{7.6.58}$$

△ 对于 Γ 是顶角修正图时, 可以直接用

$$\bar{u}(p)[\widetilde{\Lambda}_i^\mu(p,p)+Z_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu]u(p)=0$$

求出

$$Z_{2i}|_{顶角}\gamma^\mu = Q_{\Gamma=\Lambda_i^\mu}|_{传统}.\tag{7.6.59}$$

由于当 Γ 是顶角修正时, δ_τ 一定不是整个 Γ, 而是 Γ 的真子图, 属于上述三类图之一, 因而如果对这三种子图的

$$F_{\delta_\tau}|_{传统}=\int\prod_{\delta_\tau\text{的独立线元}l_{abc}}\mathrm{d}^4k_{abc}^\Gamma R_{\delta_\tau}|_{传统}$$

都已知, 就可以用 (7.6.57) 式得到

$$\bar{F}_\Gamma|_{传统}=\int\prod_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c\text{的独立线元}l_{abc}}\mathrm{d}^4k_{ab\sigma}^{\Gamma_s}I_{\Gamma/\delta_1\cdots\delta_c}\prod_{\tau=1}^{c}F_{\delta_\tau}|_{传统}\tag{7.6.60}$$

和 (7.6.58) 式, 求得 Γ 的有限的费恩曼积分 $F_\Gamma|_{传统}$. 这是高一级的顶角修正的有限费恩曼积分. 然后, 由 Ward 恒等式 (7.6.20) 式

$$(p_\mu-p_\mu^{'})\sum_i\Lambda_i^\mu(p^{'},p)=\sum(p^{'})-\sum(p)$$

可以求出电子自能 $\sum(p)$ 之差. (7.6.20) 式是在 $\bar{J}_\Gamma=J_\Gamma+\sum_i^{'}J_{\Gamma_i}$, 也就是包括真子图的约化顶角的图之后也成立. 如果当整个 Λ_i^μ 也取抵消项 $Z_{2i}|顶角\gamma^\mu$ 时, 令

$\sum(p)$ 的抵消项常数 $Z_2 = \sum_i Z_{2i}|$顶角, 那么 (7.6.20) 式在有一切抵消项的式子中都成立, 因此有

$$(p_\mu - p'_\mu)\sum_i \widetilde{\Lambda_i^\mu}(p', p) = \widetilde{\sum}(p') - \widetilde{\sum}(p). \tag{7.6.61}$$

对 p'^μ 取微商并令 $p' = p$, 得

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}\widetilde{\sum}(p) = -\sum_i \Lambda_i^\mu(p, p). \tag{7.6.62}$$

根据附录 6.6F 给出的 $\Lambda_i^\mu(p,p)$ 及 $\sum(p)$ 的一般形式, 以及 $\widetilde{\sum}(\not p)|_{\not p=m} = 0$, 可以由积分给出 $\widetilde{\sum}(p)$.

$\prod_{\mu\nu}$ 的传统方式重整化可以用同样思路. $\prod_{\mu\nu}$ 的任意一段费米线上插上一根光子线形成三根光子外线的 QED 的正规图, 设新加的顶角为 γ^λ, 我们称这图形为 $\Delta^\lambda(k', k)$. 我们对一个确定的 $\prod_{\mu\nu}$ 可以得到一系列这样的 Δ_i^λ. 我们可以用 $C_i(k-k')_\lambda\Delta_i^\lambda(k', k)$ (C_i 是插入光子线的那段电子线上分配到的 $\pi_{\mu\nu}(k)$ 的动量 k 的份额, 即该段内线动量为 $C_i k + \cdots$) 使 Δ_i^λ 的顶角 γ^λ 所在的原属 $\prod_{\mu\nu}$ 的费米线上的动量由 $k + \cdots$ 改变为 $k' + \cdots$, 这样一直到所有费米线都作这样的改变为止, 得到

$$(k-k')_\lambda\sum_i C_i\Delta_i^\lambda(k', k) = \prod_{\mu\nu}(k') - \prod_{\mu\nu}(k). \tag{7.6.63}$$

$\Delta_i^\lambda(k', k)$ 是有三个边界顶点的正规图, 可以完全适用前面关于 Λ_i^μ 的规律, 先由 (7.6.60) 式求得 $\bar{F}_\Gamma|_{传统}$, 然后对整个 Δ^λ 取抵消项 $-t^{d(\Delta^\lambda)}\bar{F}_{\Delta^\lambda}|_{传统}$, 这一项由于如下理由, 实际为零. Δ^λ 的表观发散变为 1. 但是由于满足类似 (6.4.8) 式的条件, 以及附录 6.6F 给出的形式, 它只能是以如下形式出现：

$$\Delta_\lambda \sim [k_\lambda k_\mu k_\nu + (ak_\lambda g_{\mu\nu} + bk_\mu g_{\lambda\nu} + ck_\nu g_{\lambda\mu})k^2]f(k^2)$$

因此, $t^{(1)}\Delta_\lambda = 0$. 传统方式与 BPHZ 方式对两者抵消项是相同的, 所以有 $F_{\Delta_i^\lambda}|_{传统} = \widetilde{\Delta}_i^\lambda = \bar{F}_{\Delta_i^\lambda}|_{传统}$.

我们可以对 $\prod_{\mu\nu}$ 的一切约化图给出与 (7.6.63) 式类似的式子, 得到

$$(k-k')_\lambda\sum_i C_i\widetilde{\Delta}_i^\lambda(k', k) = \widetilde{\prod}_{\mu\nu}(k') - \widetilde{\prod}_{\mu\nu}(k), \tag{7.6.64}$$

由它的微分 $\dfrac{\partial}{\partial k_\lambda}\widetilde{\pi}_{\mu\nu}(k) = -\sum_i C_i\widetilde{\Delta}_i^\lambda(k,k)$ 以及 $\widetilde{\pi}(0) \to 0$, 可以由积分求出 $\widetilde{\pi}_{\mu\nu}(k)$, 完成对真空极化的高一阶的重整化.

现在完成了所有三类图的重整化, 就可以用公式 (7.6.60) 式给出其他正规图的重整化, 由于 QED 中需要对 $\bar{J}_\Gamma$ 引入新抵消项消除紫外发散的图 Γ 只有真空图、$\prod_{\mu\nu}$、$\sum$ 和 Λ^{μ_i}, 除真空图我们都已经给出重整化的方案, 真空图对 S 矩阵无贡献, 其他的图因为不需要对 $\bar{J}_\Gamma$ 引入额外的抵消项, 因此有

$$F_\Gamma|_{传统} = \bar{F}_\Gamma|_{传统}. \tag{7.6.65}$$

至此, 传统方式重整化的方法完成. 我们还缺少一个环节, 这就是 BPHZ 方案给出的 R_Γ 在积分中的收敛性. 由于 BPHZ 的工作以及 Weinberg 定理, 我们得以证明这样重整化的结果得到任意阶都是有限的. 这是一个复杂的证明, 我们将在第 8 章介绍.

习题

1. 为什么三顶角的 Δ_i^λ 不适用 Furry 定理?

2. 为什么费米子圈 $\Delta_i^\lambda(k',k)$ 在 λ 顶角不适用规范不变性给出的公式 (6.4.8)?

解: (1) Furry 定理需要一个反向的电子圈的 $\widetilde{\Delta}_i^\lambda$ 与原图 Δ_i^λ 抵消, 而在 (7.6.63) 式的构图中每一个 Δ_i^λ 都是确定的, 不存在抵消的 $\widetilde{\Delta}_i^\lambda$. 在 $\pi_{\mu\nu}$ 的同级所有构图中, 的确有的构图与 $\widetilde{\Delta}_i^\lambda$ 相关, 但由于电子线反向, 该线上的 C_i 就变为 $-C_i$, 所以 Δ_i^λ 与 $\widetilde{\Delta}_i^\lambda$ 的项不是相加而是相减, 与 Furry 定理的要求不同.

(2) (6.4.8) 式要求相关费米子圈 (某个 Δ_i^λ) 对入射顶角固定的情况下 (固定 k',k,q,μ,ν,λ) 费米子圈取所有可能的连接方式. 现在的公式 (7.6.63) 式中只取一种连接方式, 所以不能给出 $(k-k')\Delta_i^\lambda(k',k)=0$ 的结果. 如果想取所有方式, 其他方式给出的会得到 $\widetilde{\pi}(k)-\widetilde{\pi}(k')$ 与 (7.6.63) 式相消, 虽然得到 0, 但不能否定 (7.6.63) 式.

3. 同一个 $\Pi_{\mu\nu}(k)$, 可以将入射动量 k 以不同的分布穿过电子圈上的费米线到达出射顶角. 这样可以导致不同的类似 Ward 恒等式的等式 (7.6.63), 它们给出的最后 $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(k)$ 是否相同?

解: 对于积分变元 $k_{ab\sigma}$, 不同的选择只相当于这些积分变元上迭加不同常数. 在泡利–维拉斯正常化 (即改变粒子质量然后迭加的方法) 中, 这样的积分变量的变化不改变正常化后的结果 (因为这是一个收敛的无穷积分). 而之后选取抵消项的方式只与积分结果有关, 用 Ward 恒等式求 $\Pi_{\mu\nu}(k)$ 的方式及初始条件也是只与积分结果有关. 因此它们给出的 $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(R)_R$ 相同, 从而 $\widetilde{\Pi}_{\mu\nu}(k)$ 也相同.

对 $\widetilde{\Sigma}(p)$ 的处理及 $\Delta^\lambda,\Lambda^\mu$ 等也都一样.

在第 8 章中 BPHZ 方法可以用不同的正则分布来求发散积分的抵消项. 以上分析可以用来推断它们都给出同一个结果.

第 8 章　BPHZ 方案的收敛性

在本章, 我们证明 Zimmermann 定理, 并介绍 Weinberg 定理, 从而证明 R_Γ 的 k 空间积分收敛. 这是 BPHZ 重整化方案的核心问题.

8.1　外动量的正则分布与费恩曼积分的积分变量

我们首先回顾一下正规图. 正规图 Γ 由顶角 $\{V_a\}$ 和线 $\{L_{ab\sigma}\}$ 给出. 这是一张连接图, 而且将任何线中间切断仍是连接的. 因此每条线的端点必定属于 Γ, 即 Γ 的外线除非特别声明, 并不属于 Γ.

如果 Γ 不是正规图, 它的重整化问题可以由低阶正规图的结果得到, 那么我们只要处理正规图的重整化.

对费恩曼图 Γ(不一定是正规图), 用 $\mathscr{L}(\Gamma)$ 和 $\mathscr{V}(\Gamma)$ 分别表示它的线元和顶角的集合. 我们用 $\{V_a\}(a=1,\cdots,n)$ 表示费恩曼图的 n 个顶角, 用 $L_{ab\sigma}$ 表示从 V_a 到 V_b 的一根线. 由于这两顶角之间的线可能不止一根, 所以用 $\sigma=1,2,\cdots$ 来区分它们.

在微扰论中, 对应于一张连接的 n 顶角费恩曼图, 除与外线有关的一些因子外, 微扰的贡献为

$$\begin{aligned}
S_{;\Gamma}^{(n)} = & \frac{1}{S(\Gamma)}\int \prod_{L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\Gamma)}\left\{\frac{\mathrm{d}^4 l_{ab\sigma}}{(2\pi)^4}\Delta_F(l_{ab\sigma})\right\} \\
& \times \prod_{V_a\in\mathscr{V}(\Gamma)}\left\{P_a(l_{ab'\sigma'})\times(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{\substack{b\sigma\\ L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\Gamma)}}^{a} l_{ab\sigma}-q_a\right)\right\} \\
\equiv & \frac{1}{S(\Gamma)}\int \prod_{L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\Gamma)}\frac{\mathrm{d}^4 l_{ab\sigma}}{(2\pi)^4}\prod_{V_a\in\mathscr{V}(\Gamma)}(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_{b\sigma}^{a} l_{ab\sigma}-q_a\right)I(\{l_{ab\sigma}\},\{l_{ab'\sigma'}\}).
\end{aligned} \tag{8.1.1}$$

其中, $l_{ab\sigma}$ 是线元 $L_{ab\sigma}$ 的 4-动量, q_a 是输入 V_a 顶角的 Γ 外线动量之和, $L_{ab'\sigma'}$ 是 V_a 的顶角线 (包括 Γ 的外线和内线),

$$\Delta_F(l_{ab\sigma}) = \frac{P_{ab\sigma}(l_{ab\sigma})}{l_{ab\sigma}^{o2}-\vec{l}_{ab\sigma}^{\,2}-\mu_{ab\sigma}^2+\mathrm{i}\varepsilon(\vec{l}_{ab\sigma}^{\,2}+\mu_{ab\sigma}^2)} \tag{8.1.2}$$

是 $L_{ab\sigma}$ 上的费恩曼传播子, $P_{ab\sigma}$ 是动量的多项式, P_a 是依赖于顶角 V_a 的多项式,

宗量是该顶角的各条顶角线的动量①. 我们要求 P_a 对于各条顶角线是因式化的:

$$P_a(l_{ab\sigma}) = \prod_{b\sigma} P_{a,b\sigma}(l_{ab\sigma}). \tag{8.1.3}$$

由于 δ^4 函数的出现, 积分变量并不都独立, Γ 的各线动量必须满足

$$\sum_{b\sigma}^{a} l_{ab\sigma} = q_a, \quad a = 1, \cdots, n. \tag{8.1.4}$$

其中, $\sum\limits_{b\sigma}^{a} l_{ab\sigma}$ 表示在 V_a 点对 $b\sigma$ 求和.

我们标记时假定 $l_{ab\sigma}$ 是由 V_a 流向 V_b 的 4-动量, 因此有

$$l_{ab\sigma} = -l_{ba\sigma}. \tag{8.1.5}$$

Γ 的各个线上的 4–动量满足的这组方程称为流方程. 我们可以选定一些线元, 把它们的 4–动量作为独立积分变元. 其余线元先进行积分, 消去与之相连的顶角上对应的 δ^4 函数, 最终将先积分的线元的动量都写成独立线元动量的线性函数, 同时留下一个 δ^4 函数. 这些独立线元的选取不是任意的, 它们的总数与 Γ 的独立回路数 l 相等. 我们可以任选一根线的 $l_{ab\sigma}$ 作为积分变量. 它的积分涉及两个顶角 V_a、V_b 的两个 δ^4 函数:

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 l_{ab\sigma}}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4 \left(l_{ab\sigma} + {\sum_{b'\sigma'}}'^{a} l_{ab'\sigma'} - q_a \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(\underbrace{l_{ba\sigma}}_{=-l_{ab\sigma}} + {\sum_{a''\sigma''}}'^{b} l_{ba''\sigma''} - q_b \right) \times f. \tag{8.1.6}$$

式中, ${\sum}'^{a}$ 表示对顶角 V_a 的除 $L_{ab\sigma}$ 以外的顶角线求和, ${\sum}'^{b}$ 也类似. 积分之后积去第二个 δ^4 函数, 在其余部分的函数中用

$$l_{ab\sigma} = {\sum_{a''\sigma''}}'^{b} l_{ba''\sigma''} - q_b, \tag{8.1.7}$$

代入得到

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left({\sum_{b'\sigma'}}'^{a} l_{ab'\sigma'} + {\sum_{a''\sigma''}}'^{b} l_{ba''\sigma''} - q_a - q_b \right) \times f, \tag{8.1.8}$$

这就等于让 $L_{ab\sigma}$ 缩成一点, 使 V_a 和 V_b 并成一个顶角 $V_{(ab)}$, $L_{ab\sigma}$ 消失, 其余各线流出动量不变, 而流入的外动量相加一样. 在数学上, 这个过程相当于把流方程 (8.1.4) 式中的一个, 即 (8.1.7) 式代入其余部分. 这个过程可以不断继续, 每减少一

①在前面的推导中, 传播子的分母为 $l_{ab\sigma}^{o2} - \vec{l}_{ab\sigma}^{\,2} - \mu_{ab\sigma}^{\,2} + \mathrm{i}\varepsilon$, 为了后面的收敛性推导, 改为现在这个式子.

根线, 同时减少一个顶角. 一直到所有顶角并成一个顶角为止. 留下的 δ^4 函数是 $(2\pi)^4\delta^4\left(\sum_a q_a\right)$, 要求

$$\sum_a q_a = 0. \tag{8.1.9}$$

这个过程表明, 在 (8.1.9) 式条件满足时, 方程组 (8.1.4) 式和 (8.1.5) 式有解. 我们可以沿一个选定的独立回路做以上操作. 沿该回路的各边顺次积分. 当该回路的所有顶角都并在一起时, 一定会留下一个首尾相接的线元. 它的 4–动量应该不在合并之后的顶角的 δ^4 函数内. 因为该线两端对此顶角上的输出动量正好抵消. 所以这根线上的动量可以任意设定. 这是独立线元. 它的动量可以作为费恩曼积分的独立变元. 当一个回路处理完毕时, 其他独立回路依然存在. 因为只是把处理的回路缩成了一点. 我们可以依任何次序处理所有的独立回路. 每一个回路缩成一个点就会得到一根独立线元在该点首尾相连接. 因此当整个 Γ 缩成一点时, 这些独立线元的数目正好等于独立的回路数. 而线元的总数等于在前面积分消去 δ^4 函数的线元数 (它们与消去的顶角数一致) 加上独立线元数. 由于最后留下一个顶角, 所以有

$$\text{线元数 } L = \text{顶角数 } n + \text{独立回路数 } l - 1. \tag{8.1.10}$$

由于积分消去 δ^4 函数的过程相当于用 (8.1.7) 式进行代入法的消元过程来处理流方程 (8.1.4) 式和 (8.1.5) 式. 我们得到如下定理.

定理 1 非齐次流方程组 (8.1.4) 式、(8.1.5) 式在输入流守恒条件 (8.1.9) 式满足时有解, 相应的齐次方程有 l 组线性独立解. 非齐次方程的解等于齐次方程解加上任意一个特解. 选定的独立线元上的动量可以任意设定. 当独立线元上的动量设定之后, 其余线元的动量就确定了.

在非齐次流方程的所有解中, 有一个解 $\{l_{ab\sigma}(\min)\}$ 使

$$\mathscr{M} = \sum_{L_{ab\sigma}\in\Gamma} (l_{ab\sigma}^{\mu})^2, \quad \mu = 0,1,2,3 \tag{8.1.11}$$

取极小值, 这个解 $l_{ab\sigma}(\min) = \{q_{ab\sigma}^{\Gamma}\}$ 称为正则解. 正则解给出的在各条线上的动量称为输入动量集合 $\{q_a\}$ 在 Γ 各线元上的正则分布. 证明见附录 8.1A.

定理 2 正则解 $\{q_{ab\sigma}^{\Gamma}\}$ 存在并唯一, 而且是输入 $\{q_a^{\Gamma}\}$ 的齐次线性函数. 于是任何解可表示为

$$l_{ab\sigma} = q_{ab\sigma}^{\Gamma} + k_{ab\sigma}^{\Gamma}, \tag{8.1.12}$$

其中, $k_{ab\sigma}^{\Gamma}$ 是齐次方程的解.

类似地, 对于 Γ 的任何正规子图 γ, 它的每根线上的动量也可分解为非齐次和齐次两部分

$$l_{ab\sigma} = q^{\gamma}_{ab\sigma} + k^{\gamma}_{ab\sigma}, \tag{8.1.13}$$

其中, 非齐次解 $q^{\gamma}_{ab\sigma}$ 是 γ 的各顶角输入 $\{q^{\gamma}_a\}$ 给出的 γ 中的正则分布, 是输入 $\{q^{\gamma}_a\}$ 的线性函数.

在 (8.1.12) 式中, $\{k^{\ \Gamma}_{ab\sigma}\}$ 遵从的齐次线性方程组 (也叫无源流方程) 为

$$\sum_{b\sigma}{}^{a} k^{\ \Gamma}_{ab\sigma} = 0, \tag{8.1.14}$$

$$k^{\ \Gamma}_{ab\sigma} = -k^{\Gamma}_{ba\sigma}. \tag{8.1.15}$$

对于 Γ 的正规子图 γ, 也有类似的结果.

(8.1.1) 式在积去 $n-1$ 个 δ^4 函数后变为

$$S^{(n)}_{;\Gamma} = \frac{1}{S(\Gamma)} \int \prod_{\text{独立线元}} \frac{\mathrm{d}^4 l_{ab\sigma}}{(2\pi)^4} I^{\circ}(l_{ab\sigma}(\text{独立线元})) \times (2\pi)^4 \delta^4(\sum q_a). \tag{8.1.16}$$

其中, I° 是将 (8.1.1) 式中的函数 I 中的非独立线元动量用独立线元动量的线性函数代入以后得到的函数.

从 (8.1.16) 式看, 这个积分是关于 $\{l_{ab\sigma}\}$ 的函数对 $l_{ab\sigma}$ 的多重积分, 它不依赖于参数化的方式, 即外动量在各条内线上的分布. 在泡利–维拉斯正常化之后也是如此.

考虑 Γ 的一些相互分离的 (即没有公共点, 当然也就没有公共内线的) 正规子图集合 $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$, 由于在 (8.1.1) 式中的顶角多项式 $P_a(l_{ab'\sigma'})$ 是对该顶角的顶角线因式化的, 我们可以把这些线明确地分成三部分：

(1) Γ 的外线;

(2) Γ 的内线, 但是对 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$ 是外线;

(3) 是某个 γ_τ 的内线, 从而可以把 I° 写成

$$I^{\circ}(\Gamma) = I^{\circ}_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \times \prod_{\tau=1}^{c} I^{\circ}_{\gamma_\tau}. \tag{8.1.17}$$

其中, $\bar{\Gamma} = \Gamma/\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 是由 Γ 的线元除去各个 γ_τ 的线元得到的线元与它们的端点形成的图形. $I^{\circ}_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}$ 由 $\bar{\Gamma}$ 的线元上的费恩曼传播子以及 $\bar{\Gamma}$ 的顶角多项式中属于上述 (1)、(2) 类顶角线上的多项式因子构成. 而 γ_τ 的费恩曼被积函数部分 $I^{\circ}_{\gamma_\tau}$ 由 γ_τ 内线的费恩曼传播子与 γ_τ 的顶角的顶角多项式中属于第 (3) 类顶角线的因子构成.

备忘录 1

在后面对 γ_τ 的外动量 $q_a^{\gamma_\tau}$ 作泰勒展开时, γ_τ 的顶角多项式中 γ_τ 的外线部分 (2) 的动量只能作为常数看待. 因为 $q_a^{\gamma_\tau}$ 是 V_a 点外线输入动量之和. 由它并不能确定各个外线输入的动量.

由于 $q_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$ 只是输入动量的函数, 我们可以把 (8.1.16) 式写成

$$S_{;\ \Gamma}^{(n)} = \frac{1}{S_\Gamma}\int \prod_{\text{独立线元}} \frac{\mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}}{(2\pi)^4} I^\circ(k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} + q_{ab\sigma}^{\ \Gamma}) \times (2\pi)^4 \delta^4(\sum_a q_a). \tag{8.1.18}$$

我们注意到, 由于 (8.1.6) 式～(8.1.8) 式的变化不改变积分中每个积分变元要除以 (2π) 而每个 δ 函数要乘以 (2π) 的形式. 因而, 函数 I 本身在积去 δ^4 函数的过程中始终不变:

$$I^\circ = I,$$

只是宗量改变而已. 因此, 尽管选取独立线元的方式可以有很多种, 但是因为最后的积分不变, 而且被积函数值不变, 所以 (当积分存在时) $\prod\limits_{\text{独立线元}} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$ 这个积分元不变, 即

$$\prod_{\text{独立}} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma} = \prod_{\text{独立}} \mathrm{d}^4 k'_{ab\sigma}. \tag{8.1.19}$$

当 Γ 包含几个相互分离的正规子图 $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 时, 类似的分析可以对各个子图进行. 对输入子图 γ_τ 的外动量 $\{q_a^{\gamma_\tau}\}$, 它们有各自的正则分布 $q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$ 和 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$ (在做以下分析时, 我们认为 Γ 的各线元上的动量 $l_{ab\sigma}$ 是相同的, 即 $l_{ab\sigma}^{\ \Gamma} = l_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$, 当 $L_{ab\sigma} \in \gamma_\tau \subset \Gamma$).

注意: 当 Γ 的一个顶角 V_a 同时也是 γ_τ 的顶角时, 外动量输入对 Γ 和 γ_τ 是不同的, 令 q_a^Γ 为 Γ 的外动量, $q_a^{\gamma_\tau}$ 为 γ_τ 的外动量. 我们把属于 Γ 的内线但是不属于 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$ 的内线的集合用 $\mathscr{L}(\bar\Gamma = \Gamma/\gamma_1, \cdots, \gamma_c)$ 表示, 有

$$q_a^{\gamma_\tau} = q_a^\Gamma - \sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\bar\Gamma)}}^{a} l_{ab\sigma}. \tag{8.1.20}$$

求和号遍及过顶角 V_a 的所有 $\bar\Gamma$ 的线元.

另一方面, 当 Γ 的输入动量为 $\{q_a^\Gamma\}$ 而且各条 Γ 的线元动量处于正则分布 $\{q_{ab\sigma}^{\ \Gamma}\}$ 时, 各个 γ_τ(这时它们的输入动量为 $\{q_a^{\gamma_\tau}\}$) 的线元动量也处于正则分布 $\{q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}(0)\}$. 这是因为在输入 $\{q_a^{\gamma_\tau}\}$ 不变时, 在 γ_τ 内 $\sum (l_{ab\sigma}^{\ \mu})^2$ 必须也处于极小值 (否则, 比如改为 $l'_{ab\sigma}$ 可以使 $\sum_{\gamma_\tau} (l_{ab\sigma}^{\prime\mu})^2 < \sum_{\gamma_\tau} (l_{ab\sigma}^{\ \mu})^2$, 由于并不改变 γ_τ 以外的 $l_{ab\sigma}$, 所以 Γ 就存在一个比 $\mathscr{M} = (l_{ab\sigma}^{\ \mu})^2$ 更小的解, 这是矛盾的). 因此, 有

$$q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}(0) = q_{ab\sigma}^{\ \Gamma}. \tag{8.1.21}$$

根据 (8.1.20) 式, 对于输入为 $\{q_a^\Gamma\}$ 的一般解 $l_{ab\sigma} = q_{ab\sigma}^{\ \Gamma} + k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$, γ_τ 的输入的改变为

$$\Delta q_a^{\gamma_\tau} = -\Delta \sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\bar\Gamma)}}^{a} l_{ab\sigma} = -\sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\bar\Gamma)}} k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}. \tag{8.1.22}$$

由于正则分布是线性地依赖于输入的, 从而 γ_τ 的各线的正则分布的改变就是 $\Delta q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$ = 由 $\{\Delta q_a^{\gamma_\tau}\}$ 作为输入给出的正则分布. 又由于, 当 $L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\gamma_\tau) \subset \mathscr{L}(\Gamma)$ 时有

$$l_{ab\sigma} = q_{ab\sigma}^{\ \Gamma} + k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} = q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau} + k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}, \tag{8.1.23}$$

我们得到十分重要的定理

定理 3 子图 γ_τ 的线元上的 $k_{ab\sigma}^{\gamma_\tau}$ 与 $k_{ab\sigma}^{\Gamma}$ 之差

$$\Delta k_{ab\sigma} = k_{ab\sigma}^{\gamma_\tau} - k_{ab\sigma}^{\Gamma} = -(q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau} - q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}(0)) = -\Delta q_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$$

等于各个顶角 V_a 的输入为 $\left\{-\Delta q_a^{\gamma_\tau} = \sum\limits_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\bar\Gamma)}}^{a} k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}\right\}$ 给出的正则分布.

由于正则分布线性地依赖于输入, 所以有

推论 1

$$\begin{aligned} k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau} &= k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} + \left[\left\{-\sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\bar\Gamma)}}^{a} k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}\right\}(V_a\in\mathscr{V}(\gamma_\tau))\ \text{的齐次线性函数}\right] \\ &= k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} + [\text{在}\ \bar\Gamma\ \text{中与}\ \gamma_\tau\ \text{相连的各条线元的}\ k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}\ \text{的齐次线性函数}] \\ &= \{k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}\}\ \text{的齐次线性函数}. \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

当 $\Gamma \supset \gamma \supset \gamma_\tau$ 时, $k_{ab\sigma}^{\gamma_\tau}$ 也是 $\{k_{ab\sigma}^{\gamma}\}$ 的齐次线性函数. 我们可以用下述方法选 Γ 中的独立积分线元 $L_{ab\sigma}$. 先在各个 γ_τ 内选定各自的独立积分线元, 然后在 Γ 中将它们缩为一个点, 使 Γ 变为 $\tilde\Gamma$, 这时 $\tilde\Gamma$ 又形成一个流方程的系统 (证明: 对于满足流方程的系统, 流入每个顶点的线元动量的代数和为零, 由此可以推导出流入一个封闭面的各线上动量流之和总是为零, 因此对于 γ_τ 而言, 就有 $\sum_a q_a^{\gamma_\tau} = 0$, 所以在 γ_τ 缩为一点之后, 这个"顶点"也满足流方程. 见 (8.1.6) 式~(8.1.8) 式的推导和推导后面的叙述), $\tilde\Gamma$ 的线元与 $\bar\Gamma$ 的线元相同, 再在这个系统内选取剩余部分, 即 $\tilde\Gamma$ 上的独立线元, 将得到的 $\tilde\Gamma$ 各线的动量给予 $\bar\Gamma$ 的对应线元. 然后我们再来部署各个 γ_τ 线元上的 $l_{ab\sigma}$. 由 γ_τ 自己的独立线元的动量就可以唯一地确定 γ_τ 其余线元的动量, 而不改变 γ_τ 的输入 $\{q_a^{\gamma_\tau}\}$. 这样处理的结果是, 在 γ_τ 内的

$l_{ab\sigma}(l_{ab\sigma} \notin \bar{\Gamma})$ 可能受到 $\bar{\Gamma}$ 上的独立线元的动量的影响, 但是在 $\bar{\Gamma}$ 上的线元的动量 $l_{ab\sigma}(l_{ab\sigma} \in \bar{\Gamma})$ 不受 γ_τ 内独立线元上的动量取值的影响 (由于 $\tilde{\Gamma}$ 的流方程是一个独立系统). 因此, $\bar{\Gamma}$ 上线元的 $l_{ab\sigma}$ 只与 $\Gamma/\gamma_1, \cdots, \gamma_c \equiv \bar{\Gamma}$ 上的独立线元的 $l_{ab\sigma}$ 有关而与处于 γ_τ 内的独立线元的 $l_{ab\sigma}$ 无关. 从而, $\bar{\Gamma}$ 上各线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$ 只与 $\bar{\Gamma}$ 上的独立线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}(L_{ab\sigma} \in \{\bar{\Gamma}$ 的独立线元集合$\})$ 有关而与各 γ_τ 内的独立线元上的 $k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}(L_{ab\sigma} \in$ 各 γ_τ 内独立线元集合) 无关. 由定理 3 的推论, 在 γ_τ 内的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$ 与 $k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$ 的差与 $\bigcup_{\tau=1}^{c} \gamma_\tau$ 内的独立线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$ 无关. 由 Jacobi 行列式计算, 我们得到如下定理.

定理 4　可以如下选取独立线元, 满足

$$\begin{aligned}\prod_{\Gamma\text{的独立线元}} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} &= \prod_{\bar{\Gamma}\text{内独立线元}}^{1} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} \prod_{\bigcup \gamma_\tau\text{内独立线元}}^{2} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} \\ &= \prod_{\bar{\Gamma}\text{内独立线元}}^{1} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} \prod_{\tau=1}^{c} \prod_{\gamma_\tau\text{内独立线元}}^{2} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}. \end{aligned} \tag{8.1.25}$$

推论 2　在以后研究的 Γ 林中, 我们总可以安排独立线元和相应的积分变量, 满足

$$\prod_{\Gamma\text{内独立线元}} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} = \prod_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c\text{独立}} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \Gamma} \times \prod_{\tau=1}^{c} \prod_{\gamma_\tau/\cdots\text{独立}} \mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau} \times \prod \cdots. \tag{8.1.26}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\cdots}}{(2\pi)^4} \equiv \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \mathrm{d}k_3 \mathrm{d}k_4, I^\circ = I_\Gamma$(或者也可以令 $\mathrm{d}^4 k_{ab\sigma}^{\cdots} = \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \mathrm{d}k_3 \mathrm{d}k_4$, 将 $(2\pi)^4$ 因子吸收到 I° 中, 变为 I_Γ), 就得到

$$\begin{aligned} S_{;\ \Gamma}^{(n)} &= (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum q_a\right) \frac{1}{S(\Gamma)} \int \mathrm{d}k_1 \ldots \mathrm{d}k_n I_\Gamma(k, q) \\ &\equiv (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum q_a\right) S_\Gamma^{(n)}. \end{aligned} \tag{8.1.27}$$

其中

$$I_\Gamma = \prod_{\substack{ab\sigma \\ L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\Gamma)}} \Delta_F^{ab\sigma} \prod_{\substack{a \\ V_a \in \mathscr{V}(\Gamma)}} P_a = I_\Gamma(l_{ab\sigma}|_{L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\Gamma)}). \tag{8.1.28}$$

8.1.1　备忘录 2

关于代换算子 S_γ：当 $\gamma \supset \gamma'$ 时, 由定理 3 的推论, $k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 是 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma}\}$ 的齐次线性函数, $q_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 是 q_a^γ 和 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma}\}$ 的齐次线性函数, 如果用 $K^{\gamma'}$ 表示集合 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}\}$, K^γ 表示集合 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma}\}$, $q^{\gamma'}$ 表示集合 $\{q_{ab\sigma}^{\ \gamma'}\}$, 则有

$$K^{\gamma'} = K_\gamma^{\gamma'}(K^\gamma), \quad q^{\gamma'} = q_\gamma^{\gamma'}(K^\gamma q^\gamma). \tag{8.1.29}$$

有时我们需要把 $K^{\gamma'}$ 和 $q^{\gamma'}$ 的函数 $f(K^{\gamma'}q^{\gamma'})$ 用代换算子变成 $K^{\gamma}q^{\gamma}$ 的函数,

$$S_{\gamma}f(K^{\gamma'},q^{\gamma'})=f(K_{\gamma}^{\gamma'}(K^{\gamma}),q_{\gamma}^{\gamma'}(K^{\gamma}q^{\gamma})). \tag{8.1.30}$$

在代换过程中, 我们总是认为原图 Γ 的各条内线的 4–动量 $l_{ab\sigma}$ 不变, Γ 的各顶角的输入 $\{q_a^{\Gamma}\}$ 也不变. 从而 Γ 的所有子图的顶角输入和 4–动量也不变.

由于在代换过程中, γ 的各点输入外动量和各线元动量 $l_{ab\sigma}$ 并没有变. 因此 γ' 的各点输入 $q_a^{\gamma'}$ 也没有变, 所以其正则分布 $q_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 没有变, 从而 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}=l_{ab\sigma}-q_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 也不变. 因此, 当 $\gamma\supset\gamma''\supset\gamma'$ 时, 有

$$S_{\gamma}S_{\gamma''}=S_{\gamma}. \tag{8.1.31}$$

8.1.2 备忘录 3

在以后的推导过程中, 对正则分布只要求：

(1) 对输入 $\{q_a^{\gamma}\}$ 是线性的, 唯一的;

(2) 如果在 γ 上已达到正则分布, 对在 γ 的子图 γ' 内也达到正则分布;

(3) 具有对称性的图, 正则分布也有相应的对称性 (这条可适当放宽). 这种分布可能不止一种, 比如令

$$\mathscr{M}=\sum_{ab\sigma}\rho_{ab\sigma}(l_{ab\sigma}^{\ \mu})^2, \tag{8.1.32}$$

$\rho_{ab\sigma}>0$ 只依赖于 $L_{ab\sigma}$ 的类型 (比如电子线, 光子线分属两种类型), 也同样满足以上条件.

这个论断的正确性可以这样理解：如果把每根 $L_{ab\sigma}$ 分裂为相同的 $n_{ab\sigma}$ 根 $L'_{ab\sigma i}$, 其动量为 $l'_{ab\sigma i}=l'_{ab\sigma}$ 与 i 无关, $n_{ab\sigma}$ 只与 $L_{ab\sigma}$ 的类型有关. 这样做不会妨碍后面的一切推导. 这时为了使流守恒不变, 每根的流 $n_{ab\sigma}l'_{ab\sigma}=l_{ab\sigma}$, 而

$$\mathscr{M}=\sum_{a>b,\sigma}\sum_{i=1}^{n_{ab\sigma}}l'^2_{ab\sigma i}=\sum_{a>b,\sigma}l'^2_{ab\sigma}n_{ab\sigma}=\sum_{a>b,\sigma}\frac{1}{n_{ab\sigma}}l^2_{ab\sigma}, \tag{8.1.33}$$

所以 $\{l'^2_{ab\sigma i}\}$ 的一个标准的正则解给出一个 $l^2_{ab\sigma}$ 的解, 满足 $\sum\limits_{b\sigma}^{a}l_{ab\sigma}=q_a$, $\mathscr{M}=\sum\limits_{a>b,\sigma}l'^2_{ab\sigma}n_{ab\sigma}$ 取极小值, 可以得到 $\sum\limits_{a>b,\sigma}\dfrac{N}{n_{ab\sigma}}l^2_{ab\sigma}$ 取极小值, 其中 N 是任何正数. 我们可以把 $\dfrac{N}{n_{ab\sigma}}$ 取得与任何一组有理数 $\{\rho_{ab\sigma}\}$ 相同. 这就证明了对任何大于零的有理数集合 $\{\rho_{ab\sigma}\}$ 论断正确. 由于我们处理的都是连续函数, 所以一般的 $\{\rho_{ab\sigma}\}$ 也成立.

对于量子电动力学, 我们可以取 ρ(电子线)$\ll 1$, 光子线的 $\rho=1$. 在这种极限下, 我们可以把电子线 (开的或者闭的) 先缩成一点, 得到一个光子线的网络, 在其

上求得相关的标准正则解. 各点的输入外动量由电子外线和光子外线的输入共同确定 (电子圈缩成的点上只有光子线输入), 由此我们得到光子线的动量正则分布. 然后再将这些光子的动量作为电子线的输入, 进一步计算电子线上的动量分布. 对于开的电子线, 可以直接从一端推算到另一端. 对电子圈, 需要先设某一段电子线上的动量为 x, 把其余各段电子线上的动量写成 $x+\cdots$, 最后求这根电子线上 $\rho\sum l_{ab\sigma}^2$ 的极小值, 这样就把各根电子线的问题分离了, 可以减少计算量. 前面关于量子电动力学的例子除单圈真空极化以外, 都符合这个方法 (单圈图没有正规子图, 怎么定正则分布都可以). 当取 $\mathscr{M}=\sum\limits_{a>b,\sigma}\rho_{ab\sigma}l_{ab\sigma}^2$ 时, 相应的方程变为

$$\rho_{ab\sigma}l_{ab\sigma}=\lambda_a-\lambda_b,\quad \sum_{b\sigma}^{a}l_{ab\sigma}=q_a.$$

这是一个电流回路的方程. $\rho_{ab\sigma}$ 相当于 $l_{ab\sigma}$ 的电阻, λ_a 相当于 V_a 的电势. q_a 相当于在 V_a 流入的电流. 我们可以在电路中各条线上任意标上一些标号, 相同标号的 $\rho_{ab\sigma}$ 相同. 令标号为 $1,2,\cdots,n$(在 Γ 图中给内线标号时, 一些数字可以重复使用), 然后假定

$$\rho(1)\ll\rho(2)\ll\rho(3)\cdots\ll\rho(n), \tag{8.1.34}$$

就可以把费恩曼图 Γ 的内线分为 n 组, 各组求正则分布时方程是互相独立的, 先把 $m<n$ 的线缩成一点, 求得标号为 n 的各线的正则分布. 然后把它们当输入, 求标号为 $n-1$ 的各线的正则分布 ($m<n-1$ 各线仍看成缩成一点)$\cdots\cdots$, 一直到完成.

附录 8.1A　关于正则分布

考虑条件极小值问题：在满足条件

$$\sum_{b\sigma}^{a}l_{ab\sigma}^{\ \mu}=q_a^\mu \tag{8.1A.1}$$

的前提下, 要求 $\mathscr{M}(\mu)=\sum\limits_{a<b,\sigma}^{1}(l_{ab\sigma}^{\ \mu})^2$(求和对一切 $\{a,b\}|_{a<b}$), 取极小值. 由于 $\mathscr{M}(\mu)\geqslant 0$, 所以极值问题有解.

该问题等价于 (我们略去指标 μ , 因为对 $\mu=0,1,2,3$ 方程相同)

$$\mathscr{M}'=\sum_{a<b,\sigma}^{1}l_{ab\sigma}^{\ 2}-\sum_{V_a\in\mathscr{V}(\Gamma)}^{a}\lambda_a'\left(\sum_{b>a,\sigma}^{2}{}^{a}l_{ab\sigma}-\sum_{b<a,\sigma}^{3}{}^{a}l_{ba\sigma}-q_a\right)$$

对于一切 $\{\lambda_a'\}$ 和 $\{l_{ab\sigma}\}$ 的无条件极值问题. 其中, 求和范围是

$$\sum^{1} \text{对一切 } a,b|_{a<b},$$
$$\sum^{2} \text{对一切 } b,|_{b>a},$$
$$\sum^{3} \text{对一切 } b,|_{b<a}.$$

$\delta\mathscr{M}'=0$ 给出

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{a<b,\sigma} 2l_{ab\sigma}\delta l_{ab\sigma} - \sum_a \lambda'_a\Big(\sum_{b>a,\sigma}^{a} \delta l_{ab\sigma} - \sum_{b<a,\sigma}^{a} \delta l_{ba\sigma}\Big) - \sum_a \delta\lambda'_a(\cdots)\\ &= \sum_{a<b,\sigma}^{1} \delta l_{ab\sigma}(2l_{ab\sigma} - \lambda'_a + \lambda'_b) - \sum_a \delta\lambda'_a(\cdots)\\ \Rightarrow l_{ab\sigma} &= \lambda_a - \lambda_b. \end{aligned} \tag{8.1A.2}$$

将 (8.1A.2) 式代入 (8.1A.1) 式给出

$$\sum_{b\sigma}^{a}(\lambda_a - \lambda_b) = q_a. \tag{8.1A.3}$$

这是对 $\{\lambda_a\}$ 的非齐次线性方程组. 方程组一定有解, 因为极值问题有解. 如果有两组边条件和两组解 $\{\lambda_a^1, q_a^1\}\{\lambda_a^2, q_a^2\}$, 则 $\{\lambda_a^1+\eta\lambda_a^2, q_a^1+\eta q_a^2\}$ 也是 (8.1A.3) 式的解. 从这点可以推论, 如果 $\{q_a\}$ 给出两组不同的解 $l_{ab\sigma,1}$ 和 $l_{ab\sigma,2}$, 则 $l_{ab\sigma} = l_{ab\sigma,1} - l_{ab\sigma,2}$ 给出零输入 $\{q_a - q_a\} = \{0\}$ 的非零解. 由于是非零解, 因此 λ_a 不全相等. 我们收缩一切 $l_{ab\sigma}=0$ 的线, 使这种线的两个端点合并为一个顶点, 并让这样的线消失. 这种线的两端一定对应同一个 λ_a, 我们将这个 λ_a 赋予合并成的新顶点, 最后得到的结果将仍然满足流方程. 然后取一个由最大 λ 收缩得到的顶角 V_a, 该点的所有顶角线动量一定都是流出去的, 这一顶点 V_a 不可能满足无源流方程 $\sum_{b\sigma}^{a} l_{ab\sigma}=0$, 引出矛盾, 因此有定理 2.

定理 2 满足 $\sum_a q_a = 0$ 的流方程, 存在唯一的正则解 $l_{ab\sigma}=q^\Gamma_{ab\sigma}$, 它线性地依赖于输入 $\{q_a\}$.

8.2　R_Γ 的显示表达式

我们有 Zimmermann 由 $I_\Gamma \to R_\Gamma$ 的方案：

$$R_\Gamma = I_\Gamma(k\,q) + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c} I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}(k\,q)\prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}(K^{\gamma_\tau}, q^{\gamma_\tau}). \tag{8.2.1}$$

求和范围包括 Γ 包含的互相分离的 $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 的一切组合, 其中 γ_τ 都是重整化部分 (即 γ_τ 是正规图且 $\mathrm{d}(\gamma_\tau) \geqslant 0$), 如果 Γ 自己就是重整化部分, 也包括 Γ 自己. 我们知道, 代换算子 S_Γ 的作用是将

$$K^{\gamma_\tau} = \{k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}, L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\gamma_\tau)\}, \quad q^{\gamma_\tau} = \{q_a^{\gamma_\tau}, V_a \in q(\gamma_\tau)\}$$

换成 Γ 的相应量的函数：

$$k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau} = f_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}(K^\Gamma), \quad q_a^{\gamma_\tau} = g_a^{\gamma_\tau}(K^\Gamma, q^\Gamma).$$

其中, K^Γ 和 q^Γ 是变量集合：

$$\begin{aligned} K^\Gamma &= \{k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}, L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\Gamma)\}, \\ q^\Gamma &= \{q_a, V_a \in \mathscr{V}(\Gamma)\}. \end{aligned}$$

$k_{ab\sigma}^{\ \Gamma}$ 是积分动量 $k = \{k, \cdots, k_m\}$ 的线性函数, 通常用齐次线性函数, 于是用 S_Γ 可以把 R_Γ 写成 $(k\,q)$ 的函数：

$$R_\Gamma(k, q) = S_\Gamma R_\Gamma. \tag{8.2.2}$$

在 (8.2.1) 式中, I_Γ 已经在 (8.1.28) 式中定义, 我们还定义

$$I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = \prod_{L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c) \equiv \mathscr{L}(\bar{\Gamma})} \Delta_{F_{ab\sigma}} \times \prod_{V_a \in \mathscr{V}(\bar{\Gamma})} \mathscr{P}_a \tag{8.2.3}$$

其中, $\mathscr{L}(\bar{\Gamma}) \equiv \mathscr{L}(\Gamma/\gamma_1, \cdots, \gamma_c)$ 包括所有属于 Γ而不属于任何 $\gamma_\tau(\tau = 1, \cdots, c)$ 的 Γ 的内线. $\mathscr{V}(\bar{\Gamma})$ 包括所有属于 $\bar{\Gamma}$的线的端点. 而 $\mathscr{P}_a$ 是 $\bar{\Gamma}$ 的线元的动量的多项式, 由于对费恩曼图规则中对顶角要求满足 (8.1.3) 式, 因此可以做到

$$I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = I_\Gamma / \prod_{\tau=1}^{c} I_{\gamma_\tau}.$$

由 (8.2.1) 式, 当 Γ 是重整化部分, 即正规图 Γ 的表观发散度 $d(\Gamma) \geqslant 0$ 时, 费恩曼积分函数的有限部分为

$$R_\Gamma = I_\Gamma(k\,q) + Q_\Gamma(K^\Gamma, q^\Gamma) + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' \underbrace{I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}}_{= I_\Gamma / \prod_{\tau=1}^{c} I_{\gamma_\tau}} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}(K^{\gamma_\tau}, q^{\gamma_\tau}), \tag{8.2.4}$$

这里 $\sum'$ 表示求和遍及 Γ 的一切互相分离的重整化部分 (即表观发散度 $d \geqslant 0$ 的正规图) $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 的集合 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$, 但不包括 Γ 自己形成的集合 $\{\Gamma\}$, 也不包括空集合 $\varnothing$.

当 Γ 不是重整化部分, 即 $d(\Gamma)<0$ 时,

$$R_\Gamma = I_\Gamma(k\,q) + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}(K^{\gamma_\tau}, q^{\gamma_\tau}) \tag{8.2.5}$$

在这两个式子里, 对重整化部分 γ(即 γ 是正规图, 而且 $d(\gamma)\geqslant 0$), Q_γ 的定义为

$$\begin{aligned} Q_\gamma(K^\gamma q^\gamma) &= -t_{q^\gamma}^{\mathrm{d}(\gamma)}\left\{I_\gamma(K^\gamma q^\gamma) + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}(K^\gamma q^\gamma)\times S_\gamma \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}(K^{\gamma_\tau}, q^{\gamma_\tau})\right\} \\ &= -t_{q^\gamma}^{\mathrm{d}(\gamma)} S_\gamma \left\{I_\gamma + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}\right\}. \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

求和号 $\sum'$ 表示的求和范围与 (8.2.4) 式类似.

这是一个用迭代方式规定的定义. S_γ 是把它右边的函数中的 $K^{\gamma_\tau}\to K_\gamma^{\gamma_\tau}(K^\gamma)$, $q^{\gamma_\tau}\to q_\gamma^{\gamma_\tau}(K^\gamma q^\gamma)$ 做变量代换, 使之变为 K^γ 即 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma}, L_{ab\sigma}\in\mathscr{L}(\gamma)\}$ 和 q^γ 即 $\{q_a^\gamma, V_a\in v(\gamma)\}$ 的函数.

$t_{q^\gamma}^{\mathrm{d}(\gamma)}$ 是将右边的函数对 γ 的输入动量 q_a^γ 的独立量的 4 个分量作直到 $d(\gamma)$ 级泰勒展开. 由于对一个连接图 γ, 输入动量要满足 $\sum\limits_{V_a\in v(\gamma)} q_a^\gamma = 0$, 所以当 γ 有 N 个顶角时, 独立的 q_a^γ 只有 $N-1$ 个. 泰勒展开的独立变量最多只有 $4(N-1)$ 个 (有些顶角可能没有外线).

由于定义出来的 Q_γ 是外动量的多项式, 又由于 R_Γ 的这种形式, 我们可以用在拉氏密度 $\mathscr{L}(I)$ 中添加场量及其微商的多项式的方式, 即添加 “人工” 顶角的方式, 使成为抵消项而在微扰计算中自动进入各阶费恩曼被积函数, 最后形成 R_Γ. 这就是重整化的基本思想.

在 $d(\Gamma)\geqslant 0$ 时, (8.2.4) 式可以写成

$$\begin{aligned} R_\Gamma &= I_\Gamma + (-t_{q^\Gamma}^{d(\Gamma)} S_\Gamma)\left\{I_\Gamma + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}\right\} + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau} \\ &= A+B+C. \end{aligned}$$

第一项和第三项合在一起, 有 $B=-t_{S_\Gamma}^{\Gamma}(A+C)$, 给出

$$R_\Gamma = (1-t_{q^\Gamma}^{d(\Gamma)} S_\Gamma)\left\{I_\Gamma + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}\right\}. \tag{8.2.7}$$

在 $d(\Gamma)<0$ 时,

$$R_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}. \tag{8.2.8}$$

令

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\gamma_1,\cdots,\gamma_c}{}' I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} Q_{\gamma_\tau}, \tag{8.2.9}$$

则当 $d(\Gamma) \geqslant 0$ 时有

$$R_\Gamma = (1 - t_{q^\Gamma}^{d(\Gamma)} S_\Gamma)\bar{R}_\Gamma, \tag{8.2.10}$$

当 $d(\Gamma) < 0$ 时有

$$R_\Gamma = (1-0)S_\Gamma \bar{R}_\Gamma. \tag{8.2.11}$$

如果当 $d(\gamma) < 0$ 时, 定义 $t^{d(\gamma)} = 0$, 两个式子就可以统一由 (8.2.10) 式表示. 在 (8.2.6) 式定义 Q_γ 时, 求和号 $\sum'$ 是对集合 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$ 而言. 当选定一个 γ 的相互分离的表观发散度 $\geqslant 0$ 的正规子图的集合 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$ 时, 就给出一项. 注意后面的 Q_{γ_τ} 之间是相乘的, 如果对所有的 γ_τ , 又选定了 γ_τ 的相互分离的发散正规子图 (即表观发散变 $\geqslant 0$ 的正规子图) 的集合时, 则对该 Q_{γ_τ} 又只得到一项. 这个过程可以不断做下去, 直到对某些子图 γ' 不再选择 (不是不可能选择!) 子图为止. 这时相关的 $Q_{\gamma'}$ 为

$$Q_{\gamma'} = -t_{q^{\gamma'}}^{d(\gamma')}\{I_{\gamma'}\}. \tag{8.2.12}$$

所以, 我们最终得到的在多重求和中的一项, 是要建立在下列过程完成的基础上.

- 在 γ 中选定 γ 包含的互相分离的真正规子图 $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$;
- 在 $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 中各自选定包含于它们的相互分离的真正规子图 $\gamma_{11}, \cdots, \gamma_{1c(1)}, \cdots, \gamma_{c1}, \cdots, \gamma_{cc(c)}$;
- 在所有 γ_{ij} 中选定 $\gamma_{ij1}, \cdots, \gamma_{ijc(ij)}$;
- ······
- 一直到所有的这些费恩曼图 $\gamma, \cdots,$ 不再选自己的分离的正规子图为止;
- 所有这些正规子图 γ' 都要求其表观发散度 $d(\gamma') \geqslant 0$.

这样我们就可以确定 Q_γ 中的许多求和中的一项, Q_γ 要求对一切这样的项求和. 从集合的观点而言, 我们要求先确定一个集合, 它的元素是 γ 的真发散正规子图, 这些子图之间或者相互分离 (没有公共顶点、线) 或者一个包含另一个：也就是对集合中的任意两个子图 γ' 和 γ'' 要求 $\gamma' \cap \gamma'' = \varnothing, \gamma' \supset \gamma'', \gamma \subset \gamma''$ 三者必须满足一个条件, 这称为互不交叉, 这样的集合称为 γ 的限制正常林, 用记号 N_r 表示. 如果把要求中的 "γ 的真发散正规子图" 中的 "发散" 要求去掉, 也就是只要求是 γ 的真的正规子图的集合, 而且互不交叉, 得到的集合称为 γ 的正常林, 用 N 表示. 正常林可以是空集, 当一个 γ 的正常林添加一个元素 γ 自己时, 得到的集合称为满林. 满林肯定不包括空集, 因为它至少必须有 γ 自己.

我们看到, 一旦 γ 的一个限制正常林给出, 就得到 Q_γ 的一项, 而 Q_γ 是对一切这种林求和：

$$Q_\gamma = \sum_{U(\gamma)\in N_r} (-t_{q^\gamma}^{d\,(\gamma)} S_\gamma) I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} \Big\{ (-t_{q^{\gamma_\tau}}^{d\,(\gamma_\tau)} S_{\gamma_\tau}) I_{\gamma_\tau/\gamma_{\tau 1},\cdots,\gamma_{\tau c(\tau)}} \times \prod_{i=1}^{c(\tau)} \{ (-t_{q^{\gamma_{\tau_i}}}^{d\,(\gamma_{\tau_i})} S_{\gamma_{\tau_i}}) I_{\gamma_{\tau_i}/\gamma_{\tau_i 1},\cdots,\gamma_{\tau_i c(\tau_i)}} \times \cdots \} \Big\}. \tag{8.2.13}$$

其中, N_r 是限制正常林, 包括 $U(\gamma) = \varnothing$.

在 (8.2.13) 式中, $U(\gamma) = \{\varnothing\}$ 的项就是 (8.2.6) 式右边的第一项.

对于每一个 $U(\gamma)$, 我们可以按定理 4(8.1.26) 式选择独立积分变元. 在适当的泡利–维拉斯正常化之后. 在 (8.2.13) 式泰勒展开前后的各级函数在欧氏空间都绝对可积, 最终给出 Q_γ 在 k 空间的积分. 这个积分与各级子图中如何分布输入动量无关, 因为它们是 $l_{ab\sigma}$ 的函数并且对独立的 $l_{ab\sigma}$ 求积分. 而且在逐级由里向外积分的结果, 每一级都给出的是该子图的输入动量的函数, 因为流方程和积分的唯一参量就是它们, 而积分也是对 $dl_{ab\sigma}$ 作的. 因此, 它们只能给出输入动量的函数. 在作泰勒展开之后, 也还是得到输入动量的多项式. 这个函数或多项式, 不依赖把动量 $l_{ab\sigma}$ 参数化的方式, 不依赖于如何把 $l_{ab\sigma}$ 分为 $k_{ab\sigma}$ 和 $q_{ab\sigma}$ 的方式. 所以最终结果也不依赖于参数化方式. 这些分析对 $\overline{R}_\gamma$ 和 R_γ 也适用.

如果我们认定 $-t_{q^{\gamma'}}^{\mathrm{d}\,(\gamma')} S_{\gamma'}$ 这个算子只作用于 $U(\gamma)$ 中 γ' 及 γ' 所包含的那些子图 $\{\gamma''\}$ 给出的相应量上 (这些量都只与这些图 γ'' 的线元的 $l_{ab\sigma}$和 $k_{ab\sigma}^{\gamma''}$, $q_{ab\sigma}^{\gamma''}$ 有关), 我们可以把它们按次序都写到最前面. 次序是, 如果 $\gamma' \supset \gamma''$, 则写成 $(-t_{q^{\gamma'}}^{d(\gamma')} S_{\gamma'}) \cdots (-t_{q^{\gamma''}}^{d(\gamma'')} S_{\gamma''})$, 如果互不包含, 则这两个算子是对易的, 可以按任何次序写. 考虑到

$$I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = I_\gamma / (I_{\gamma_1} I_{\gamma_2} \cdots I_{\gamma_c}), \tag{8.2.14}$$

我们把 Q_γ 写成

$$Q_\gamma = -t_{q^\gamma}^{d\,(\gamma)} S_\gamma \left[I_\gamma + \sum_{\substack{U(\gamma)\in N_r \\ U(\gamma)\neq\{\varnothing\}}} \prod_{\lambda\in U(\gamma)} (-t_{q^\lambda}^{d\,(\lambda)} S_\lambda) I_\gamma \right], \tag{8.2.15}$$

也就是, 令

$$\bar{R}_\gamma = I_\gamma + \sum_{\substack{U(\gamma)\in N_r \\ U(\gamma)\neq\{\varnothing\}}} \prod_{\lambda\in U(\gamma)} (-t_{q^\lambda}^{d\,(\lambda)} S_\lambda) I_\gamma \tag{8.2.16}$$

则有

$$Q_\gamma = -t_{q^\gamma}^{d\,(\gamma)} S_\gamma \bar{R}_\gamma. \tag{8.2.17}$$

为了今后的推导, 我们重定义泰勒展开, 令

$$t_{q^\gamma}^{\gamma} = \begin{cases} t_{q^\gamma}^{d(\gamma)}, & \text{当 } d(\gamma) \geqslant 0; \\ 0, & \text{当 } d(\gamma) < 0. \end{cases} \tag{8.2.18}$$

于是 (8.2.7) 式和 (8.2.8) 式可以统一写成

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma_{q^\Gamma} S_\Gamma)\bar{R}_\Gamma = (1 - t^\Gamma_{q^\Gamma})S_\Gamma \bar{R}_\Gamma. \tag{8.2.19}$$

而公式

$$\bar{R}_\gamma = I_\gamma + \sum_{\substack{U(\gamma)\in N_r \\ U(\gamma)\neq\{\varnothing\}}} \prod_{\lambda\in U(\gamma)} (-t^{d(\lambda)}_{q^\lambda} S_\lambda) I_\gamma. \tag{8.2.20}$$

可以改写成

$$\bar{R}_\gamma = I_\gamma + \sum_{U(\gamma)\in N, U(\gamma)\neq\{\varnothing\}} \prod_{\lambda\in U(\gamma)} (-t^{d(\lambda)}_{q^\lambda} S_\lambda) I_\gamma \tag{8.2.21}$$

这里, N 代表正常林, 求和号是对一切非空集的正常林 U_γ 求和, 当 $U(\gamma)$ 包含表观发散度小于 0 的 γ' 时, 该项实际为 0 . 所以 (8.2.21) 式与 (8.2.20) 式相等. (8.2.21) 式右边第一项相当于 $U(\gamma) = \varnothing$ 的项 (这实际上是一种定义).

8.3 Γ 林按 k 空间的子空间 T 的分类

8.3.1 动量 $l_{ab\sigma}$,$k^\gamma_{ab\sigma}$,$q^\gamma_{ab\sigma}$ 对 t 和对 tq 的幂次

$l_{ab\sigma}$ 是如下的一组线性方程组的解,

$$\sum_{b\sigma}^{a} l_{ab\sigma} = q^\Gamma_a, \quad l_{ab\sigma} = -l_{ba\sigma}. \tag{8.3.1}$$

当连接图 Γ 的总输入外动量为 0 时, 即

$$\sum_{\substack{a \\ V_a\in\mathscr{V}(\Gamma)}} q^\Gamma_a = 0,$$

方程 (8.3.1) 式有解, 而且当 Γ 形成回路时有不止一个解. 通解是

$$l_{ab\sigma} = l^{\,0}_{ab\sigma} + \Delta l_{ab\sigma}. \tag{8.3.2}$$

其中, $l^{\,0}_{ab\sigma}$ 是一个特解, $\Delta l_{ab\sigma}$ 是下述齐次方程的特解:

$$\sum_{b\sigma}^{a} \Delta l_{ab\sigma} = 0, \quad \Delta l_{ab\sigma} = -\Delta l_{ba\sigma}. \tag{8.3.3}$$

这个方程又叫无源流方程.

这个特解的独立解的数目与 Γ 的独立的回路数 $l(\Gamma)$ 相等. 因此要确定 $l_{ab\sigma}$, 须确定这些 l 个 (齐次方程的) 解的迭加系数. 正好物理问题中也要引进同样数目的积分动量 $\{k_1, \cdots, k_l\}$. 这些积分动量与 $l_{ab\sigma}$ 的关系是线性的. 它们形成一个 $4l$

维的 k 空间. 在第一节中, 我们给出一个选取 k 参量的例子. 这实际上不是唯一的. 在 k 空间的任何超平面上, 这些积分动量可以参数化为

$$k_i^\mu = a_i^\mu + b_{ij}^\mu t_j, \quad i=1,\cdots,l, \quad j=1,\cdots,h, \quad \mu=0,1,2,3. \tag{8.3.4}$$

我们在后面遇到的与 γ' 相关的函数 F , 都是 γ' 的线元 $L_{ab\sigma}$ 的动量 4–矢量 $l_{ab\sigma}, k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 和 $q_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 的各个分量的有理函数. 由 (8.1.23) 式和 (8.3.4) 式有

$$l_{ab\sigma}^{\ \mu} = k_{ab\sigma}^{\ \mu\ \gamma'} + q_{ab\sigma}^{\ \mu\ \gamma'}(q^{\gamma'}) = (a_{ab\sigma}^{\gamma'\mu} + c_{ab\sigma j}^{\gamma'\mu} t_j) + (d_{ab\sigma,a'}^{\gamma'} q_{a'}^{\mu\gamma'}). \tag{8.3.5}$$

简写为

$$l_\alpha = a_\alpha^{\gamma'} + c_{\alpha\beta}^{\gamma'} t_\beta + d_{\alpha\beta'}^{\gamma'} q_{\beta'}^{\gamma'}. \tag{8.3.6}$$

其中, $a_\alpha^{\gamma'}, c_{\alpha\beta}^{\gamma'}, \mathrm{d}_{\alpha\beta'}^{\ \gamma'}$ 都与子图 γ' 的选择有关, 而且

$$a_\alpha^{\gamma'} + c_{\alpha\beta}^{\gamma'} t_\beta = k_\alpha^{\gamma'}, \quad d_{\alpha\beta'}^{\gamma'} q_{\beta'}^{\gamma'} = q_\alpha^{\gamma'}, \quad \alpha = ab\sigma\mu. \tag{8.3.7}$$

当 $c_{\alpha\beta}t_\beta$ 不恒为 0 (写成 $c_{\alpha\beta}t_\beta \not\equiv 0$), 也就是至少有一个 μ 和一个 j 对应的 $c_{ab\sigma\mu,j}^{\ \gamma'} \neq 0$, 从而沿 t_j 方向上趋于 ∞ 时, 矢量 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma} \to \infty$, 我们称 $L_{ab\sigma}$ 相对于 T, γ' 是变量, 或者称 $l_{ab\sigma}$ 相对于 T, γ' 是变量. 反之, 如果对给定 $ab\sigma$, $c_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ 对一切 μ 和 $\beta = 1, \cdots, h$ 成立, 则在 T 上取不同的 t_i 时, $k_\alpha^{\gamma'}$ 不变. 我们称 $L_{ab\sigma}$ 相对于 T, γ' 是常量. 从以上定义看出, 一根线 $L_{ab\sigma}$ 是否是变量, 不仅取决于 T 的选择, 而且取决于 γ' 的选择.

当 $L_{ab\sigma}$ 是变量时, $l_{ab\sigma}$ 对 t 的幂次为 1 次, 当 $L_{ab\sigma}$ 为常量时, 它对 t 的幂次为 0 次.

另一方面, 作为 $\{q_a^{\gamma'}\}$ 的齐次线性函数, $q_{ab\sigma}^{\gamma'}$ 对于 $q^{\gamma'}$ 幂次也是确定的 (0 次或 1 次). 由此, 我们可以确定 $l_{ab\sigma}$ 对 $q^{\gamma'}$ 的幂次, 以及对 $t, q^{\gamma'}$ 的总幂次 (总幂次也是 0 次或 1 次, 当 $k_{ab\sigma}^{\gamma'}$ 对 t 的幂次为 0 , 且 $q_{ab\sigma}^{\gamma'}$ 对 $q^{\gamma'}$ 的幂次为 0 时, 即 $q_{ab\sigma}^{\gamma'} \equiv 0$ 时, $l_{ab\sigma}$ 对 $t, q^{\gamma'}$ 总幂次为 0 , 否则为 1).

进一步, 我们可以定义有理函数 F 对 t 的幂次, 它是 F 作为 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(t)$ 和 $q_{ab\sigma}^{\ \gamma}(q^\gamma)$ 的有理函数通分之后分子 (多项式) 对 t 的幂次的最高项的幂次减去分母对 t 的幂次最高项的幂次. 也可以定义 F 对 $tq^{\gamma'}$ 总幂次, 它是分子 $tq^{\gamma'}$ 最高次项的 $tq^{\gamma'}$ 幂次减去分母的相应幂次. 因此, F 对 t 的幂次或者对 tq 的幂次都不仅仅取决于 T , 也取决于 γ' 的选择.

这里有一个例外是, 在代换 S_γ 作用过程中, 如果一个函数仅仅是 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 的函数, 与 $q_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 无关, 当 $\gamma \supset \gamma'$ 时, $k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 可以写成 K^γ 也就是 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma}\}$ 的线性组合. 但是因为 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}$ 这个量没有变, 所以

$$\varphi(\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma'}\}) = \varphi(K^{\gamma'}) = \varphi(K^{\gamma'}(K^\gamma)) = \tilde{\varphi}(K^\gamma) \tag{8.3.8}$$

对 t 的幂次是不变的, 因为它对 t 的依赖关系没有变.

8.3.2　当 T 确定后, Γ 林的完备化和基底

我们在下面要由一个 Γ 林 U 生成它的完备化 $C=\bar{U}$ 和它的基底 $\underline{U}$. 在这里复习一下 Γ 林 $U(\Gamma)$ 的定义. 对一个正规图 (强连接图) $\Gamma, U(\Gamma)$ 是一个由 Γ 的正规子图为元素的集合. 这个集合里的任意两个元素 γ_1 和 γ_2 都不交叉, 也就是说, 以下三种情况一定有一种情况存在:

$$\gamma_1 \supset \gamma_2, \quad \text{或}\ \gamma_2 \supset \gamma_1, \quad \text{或}\ \gamma_1 \cap \gamma_2 = \varnothing. \tag{8.3.9}$$

在这里, 两个正规图都包括它们各自的顶点和连线 (内线), 外线不算, 比如 $\gamma_1\cap\gamma_2=\varnothing$ 表示它们不但没有公共内线, 而且没有公共顶点. 正规图是这样的连接图, 它的任何内线的两端点都是该图的顶点. 将任何内线切断, 该图仍然是连接图. 我们把图 δ (不一定是正规图) 的连线的集合记为 $\mathscr{L}(\delta)$. 把它的顶点的集合记为 $\mathscr{V}(\delta)$, $U(\Gamma)$ 可以包括 Γ 自己, 这时 $U(\Gamma)$ 称为满林, 否则称为正常林. 空集也算是一种正常林. $U(\Gamma)$ 的元素 γ 所包含的 $U(\Gamma)$ 的元素形成的子集合也形成林, 记为 $U(\gamma)$. 对于 $U(\gamma)$ 中的 γ 的真子图 γ_τ, 如果 $U(\gamma)$ 中没有更大元素 γ', 使 $\gamma\supset\gamma'\supset\gamma_\tau$, 称 γ_τ 是 $U(\gamma)$ 的极大元素, 如果 $U(\gamma)$中没有更小的元素 γ'', 使 $\gamma\supset\gamma_\tau\supset\gamma''$, 称 γ_τ 为极小元素. 我们强调极大或极小元素 γ_τ 是 γ 的真子图, 就是说 γ 自己不是 $U(\gamma)$ 的极大元素 (所以对于满林而言, Γ 绝不是满林 $U(\Gamma)$ 的极大元素), 也不能是极小元素. $U(\gamma)$ 可以有几个极大元素 $\gamma_\tau, \tau=1,\cdots,c$, 每个 γ_τ 都是一个正规图, 而 γ_i 和 γ_j 之间有 $\gamma_i\cap\gamma_j=\emptyset$, 也就是它们之间互不连接. 由属于 γ 而不属于 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 的线及其端点 (这些端点可能属于某些 γ_τ) 形成的图叫 $\bar{\gamma}$. 它的线的集合记为 $\mathscr{L}(\bar{\gamma})$. 我们把 $U(\gamma)$ 的极大元素 γ_τ 称为 γ 的下一级元素而把 γ 称为 γ_τ 的上一级元素. 给定超平面 T , 设 $U(\gamma)$ 的极大元素为 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c, \bar{\gamma}=\gamma\backslash(\gamma_1\cup\gamma_2\cdots\cup\gamma_c)$, 如果 $\bar{\gamma}$ 的线中相对 T,γ 有常量, 称为 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$; 否则称 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$. 当 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$,$\bar{\gamma}$ 的一切线元相对 T,γ 都是变量.

如果 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$, 用 $S(\gamma U)$ 记为 $\bar{\gamma}(U)$ 中相对于 T,γ 是常量的线元形成的集合. 把 $\delta_1,\cdots,\delta_{c'}$ 记为 $\gamma\backslash S(\gamma U)$ 的连接部分, 也就是属于 γ 而不属于 $S(\gamma U)$ 的子图的连接部分.

具体地, δ_τ 的构造是这样的, 它的线元来源是两部分: 一部分是 $\bar{\gamma}$ 中对 T,γ 是变量的线, 另一部分是 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 的线 (指内线). 也就是

$$\mathscr{L}(\cup\delta_{\tau'})=[\mathscr{L}(\bar{\gamma})\backslash\mathscr{L}(S(\gamma U))]\cup\mathscr{L}(\cup\gamma_\tau).$$

然后, 考虑由这些线元加上它们两端端点形成的图, 它们的连接部分就是 $\delta_1,\cdots,\delta_{c'}$. 所以它们也可看成是由 γ 的对 T,γ 是变量的线与 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 的线形成的集合再加上这些线两端端点给出的图.

γ 中 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma}\} = K^\gamma$ 给出齐次方程 (8.3.3) 式的解, 也就是一个没有外动量 (无源) 的满足动量流守恒的方程的解. 所以在 γ 中, 变量线元上的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(\{t_j\})$ 对每个 $\{t_j\}$ 的取值都给出一个解.

命题 1　γ 中的变量线元形成的图的连接部分一定是强连接的. 理由如下:

首先, 这些线元的 $\Delta k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(\{t_j\}) = k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(\{t_j\}) - k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(\{0\})$ 形成一个齐次 (无源) 流方程解. 如果不是强连接的, 则一定会有一根线 L_0, 把它切断后图形分成不相连的两部分 (称为非正规线). 但是, 因为该线是变量, 一定有某个 t_l 变化时, 该线的动量 l_0 要变化. 但是, 对于一个封闭的没有外源的系统, 任意用截面分成两部分, 通过截面的各线的动量代数和应为零, 所以 Δl_0 不可能不为 0.

命题 2　Γ 内两个以上正规图 $\{g_i\}$, 如果有公共的顶点 (有公共线一定有公共顶点), 则形成的图仍然是正规图. 理由是: 如果该图有一根非正规线, 这根线属于某一个 g_i, 切断后 g_i 是连接的 (因为 g_i 是强连接的). 由 g_i 的任一顶点一定可以走到它的任何其他顶点, 从而可以走遍 $\{g_i\}$ 的所有顶点 (费恩曼图的线元 (指内线) 的中间部分一定没有顶点, 而两端一定是顶点), 因此整个图还是连接的.

由以上两个命题, 我们知道

命题 3　$\delta_{\tau'}$ 都是正规图, 也就是强连接的包括所有线元端点的图.

命题 4　$\delta_{\tau'}$ 是由 γ 的对 T,γ 是变量的线元集合与 $U(\gamma)$ 的极大元素 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 的线元集合的和集形成的图的连接部分.

注意: 如果 $\bar{\gamma}$ 中有对 T,γ 是变量的元素, 这些线元所属的 $\delta_{\tau'}$ 一定不是 $U(\gamma)$ 的元素.

我们知道

命题 5　如果 $\delta_{\tau'}$ 与 γ_τ 有公共点, 则 $\delta_{\tau'} \supseteq \gamma_\tau$. 如果考虑添加不属于 $U(\Gamma)$ 的 $\delta_{\tau'}$ 到 $U(\gamma)$ 中去, 形成新的 $U(\gamma)$, 则这些 $\delta_{\tau'}$ 是新的 $U(\gamma)$ 的极大元素 (在这里有 $\Gamma \supset \gamma \supset \{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$). 所以, $\delta_{\tau'}$ 有三类:

(1)$\delta_{\tau'}$ 不包含任何 $U(\gamma)$ 的元素;

(2)$\delta_{\tau'} \supset \gamma_\tau$ 中的一些 (一个或几个);

(3)$\delta_{\tau'} =$其中一个 γ_τ.

定义 1　我们把 (1) 和 (2) 的那些 δ_τ 称为 $\mathscr{A}(U)$ 的元素, 也就是, $\mathscr{A}(U)$ 是一个集合, 它的元素是那些 $\delta_{\tau'}$, 它们是 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$ 的 $\gamma\backslash S(\gamma U)$ 的连接部分, 而且 $\delta_{\tau'} \notin U(\gamma)$(当然也不属于 $U(\Gamma)$).

上面说的第 1 类 $\delta_{\tau'}$, 它不包含任何 $U(\gamma)$ 的极大元素, 当然也就不包含 $U(\gamma)$ 乃至 $U(\Gamma)$ 的任何元素. 因此这种 $\delta_{\tau'} \subset \bar{\gamma}$ [①] . 按定义, 它的每根线都相对 T,γ 是变量.

① $\bar{\gamma}$ 的每根线的端点都认为属于 $\bar{\gamma}$.

对第 2 类 $\delta_{\tau'}$, 它包含某些极大元素 $\gamma_i, \cdots, \gamma_j$, 形成一个林 $U(\delta_{\tau'})$, 其极大元素就是那些 $\gamma_i, \cdots, \gamma_j$. 对 $\delta_{\tau'} \supset (\gamma_i \cup \cdots \cup \gamma_j)$ 而言, 其 $\bar{\delta}_{\tau'}$ 的线元每根相对 T, γ 都是变量, $\bar{\delta}_{\tau'} = \delta_{\tau'} \backslash (\gamma_i \cup \cdots \cup \gamma_j)$.

现在我们要问, 上面所述的两种图, 第一种情况的 $\delta_{\tau'}$ 和第二种情况下的 $\bar{\delta}_{\tau'}$, 它们的线元相对于 T 和 $\delta_{\tau'}$ 是否仍然是变量呢? 答案是肯定的. 我们有

命题 6　对第一类 $\delta_{\tau'}$ 和第二类 $\delta_{\tau'}$ 的 $\bar{\delta}_{\tau'}$, 它们的线元相对于 $\delta_{\tau'}$ 都是 T 上的变量.

证明 1　对上述集合中的线元 $L_{ab\sigma}$, 我们有

$(1) L_{ab\sigma} \in \bar{\gamma}$;

$(2) L_{ab\sigma} \notin \bar{\gamma}$ 中相对 γ, T是常量的集合 $S(\gamma U)$.

因此, $L_{ab\sigma}$ 相对 γ, T 是变量, $k^{\gamma}_{ab\sigma}$ 在 T 上不恒为常数. 我们只须考察这些线元上的 $k^{\delta}_{ab\sigma} - k^{\gamma}_{ab\sigma} = \delta k^{\delta}_{ab\sigma}$ 即可. 另外, γ 中除去所有 δ_τ 之后的余集 $\bar{\bar{\gamma}} (\subset \bar{\gamma})$ 中的线元一定相对于 γ, T 是常量. 因为是变量的那些线元都归纳到某些 δ_τ 之中了.

$$\text{当 } L_{ab\sigma} \in \bar{\bar{\gamma}} \text{时}, k^{\gamma}_{ab\sigma} \text{与 } t \text{ 无关}. \tag{8.3.10}$$

当 γ 的输入固定, γ 内的线元的动量由正则分布改变为一般流方程的解的时候, δ 的顶角 V_a 输入改变为 (见 (8.1.22) 式)

$$q^{\gamma}_a - q^{\delta}_a = -\Delta q^{\delta}_a = -\sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma} \in \gamma \backslash \{\delta_1 \cup \cdots \cup \delta_{\tau'}\} = \bar{\bar{\gamma}}}} k^{\gamma}_{ab\sigma}, \text{ 这个改变也与 } t \text{ 无关}. \tag{8.3.11}$$

由定理 3 及其推论, 在 δ 内, $k^{\delta}_{ab\sigma} - k^{\gamma}_{ab\sigma}$ 等于这些量在 δ 内的正则分布, 它是这些量的齐次线性函数. 因此

$$k^{\delta}_{ab\sigma} - k^{\gamma}_{ab\sigma} \text{与 } t \text{ 无关}. \tag{8.3.12}$$

由于这些线元相对于 $T\gamma$ 是变量, 即 $k^{\gamma}_{ab\sigma}$ 在 T 平面上是变量, 所以 $k^{\delta}_{ab\sigma}$ 也是.

由定义,

$$L_{ab\sigma} \text{ 相对于 } \delta_\tau, T \text{ 是变量}. \tag{8.3.13}$$

我们注意到, 在进行上述分析时, 所得的结果与 $\gamma, \gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 属于哪一个 Γ林无关. 也就是说, 只要 Γ林中有 γ 和 $\gamma_1, \cdots, \gamma_c$, 而且 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_c\}$ 是 $U(\gamma)$的极大元素集合, 不管 $U(\Gamma)$的其他元素是什么, 都能同样确定 γ 是否属于 $\mathscr{W}$, 如果是, 都能给出同一组 $\delta_{\tau'}$, 并且确定同样的 $\mathscr{A}(U)$的元素.

证明 2　因为在我们的分析中, 对 Γ 图的每根线元 $L_{ab\sigma}$ 上的 $l_{ab\sigma}$, 每个顶角 V_a 上的输入 q_a 对一切 $U(\Gamma)$ 都是相同的, 因此对于 γ, 在上述分析中各个顶角 V_a 输入的动量 q^{Γ}_a以及 γ 的外线 $L_{ab\sigma}$ 上的 $l_{ab\sigma}$ 都不变, 因而 q^{γ}_a 是确定的, 内线的正则分布就不变. 又由于内线的 $l_{ab\sigma}$ 没有变. 因而 $k^{\gamma}_{ab\sigma}$ 不变.

考虑一个满林 $U(\Gamma)$, 用上述程序找到 $\mathscr{A}(U)$再将 U 添加 $\mathscr{A}(U)$ 的所有元素(也就是不等于原来 $U(\Gamma)$ 元素的所有 δ_τ), 容易看出, 得到的集合仍然是一个 Γ 林.

备忘录　即使 $U(\Gamma)$ 的元素都是满足 $d \geqslant 0$ 的, 也完全可能 $\mathscr{A}(U)$ 的元素不满足这个式子, 这就是要引入 (8.2.18) 式和 (8.2.21) 式的原因 (当 $d<0$, 定义 $t^d=0$).

这个由添加元素的得到的 Γ 林, 称为 $U(\Gamma)$ 的一个完备化, 写成 $\bar{U}$. 如果 $U(\Gamma)$ 不是满林 (不包含 Γ), 我们先添加 Γ 使它变为满林 U'. 然后再得到 $\bar{U}'$, 我们也叫 $\bar{U}'$ 是 U 的完备化:

$$\bar{U}=\begin{cases} U\cup\mathscr{A}(U), & 当\Gamma\in U;\\ U'\cup\mathscr{A}(U'), & 当\Gamma\notin U.\end{cases} \tag{8.3.14}$$

我们现在找出 $\bar{U}$ 中这样的元素 $\gamma'\notin\mathscr{W}(\bar{U})$, 且在 $\bar{U}$ 中包含 γ' 的最小元素 (也就是 γ' 的上一级元素) $\gamma\supset\gamma'$ 满足 $\gamma\in\mathscr{W}(\bar{U})$. 满足上述条件的这些元素 γ' 的集合称为 $\mathscr{B}(U)$. 约定 $\Gamma\notin\mathscr{B}(U)$. 在 $\bar{U}$ 中除去 $\mathscr{B}(U)$ 的所有元素得到的集合称为 U 的基底,

$$\underline{U}=\bar{U}\backslash\mathscr{B}(\bar{U}). \tag{8.3.15}$$

由于 Γ 林减少一些元素仍然得到 Γ 林, 所以这个基底 $\underline{U}$ 也是一个 Γ 林.

注意 1　由定义, 由 $U(\Gamma)$ 的元素 $\gamma\in\mathscr{W}$ 构造的 δ_τ 是 $\gamma\backslash S(\gamma U)$ 的连接部分. 如果它与某个 $U(\gamma)$ 的元素 $\gamma_{\tau'}$ 相交, 那么它将包含 $\gamma_{\tau'}$. 因此, 在 $\bar{U}$ 中, 这些元素都是 $\bar{U}(\gamma)$ 的极大元素 ($\bar{U}(\gamma)$ 是 $\bar{U}(\Gamma)$ 中由 γ 及其包含的 $\bar{U}(\Gamma)$ 中的元素给出的集合).

定理 5　$\bar{U}(\Gamma)$ 具有如下性质.

它的任何元素 γ 与 $\bar{U}(\gamma)$ 的极大元素 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 的差 $\bar{\gamma}$ 中的所有线元. 当 $\gamma\in\mathscr{W}(\bar{U})$ 时, 都相对 γ 是 T 的常量; 当 $\gamma\notin\mathscr{W}(\bar{U})$ 时, 这些线元都相对 γ 是 T 的变量.

证明 3　(1) 若 $\gamma\in U(\Gamma)$.

(a) 当 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$时, 由于添加了 $\{\delta_{\tau'}\}$, 把原来的 $\bar{\gamma}=\gamma\backslash(\bigcup_\tau\gamma_\tau)$ 的线元中的对 γ 是变量线元除掉了, 将它们并入 $\{\delta_{\tau'}\}$. 所以余下的线元在新的 $\bar{U}(\gamma)$ 的新 $\bar{\gamma}$ 即前面的 $\bar{\gamma}$ 中都对 γ 是 T 的常量. 因而符合定理.

(b) 当 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$ 时, 在 γ 与它的 $U(\gamma)$ 的极大元素之间不用添加元素. 而由于 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$, 原来的 $\bar{\gamma}$ 上所有线元相对 γ 都是 T 的变量. 所以符合要求.

(2) 若 $\gamma\notin U(\Gamma)$, 也就是它是添加的元素 $\delta_{\tau'}$, 前面命题 6 已经证明, 它们的 $\bar{\delta}_{\tau'}$ 上的所有线元相对 $\delta_{\tau'}$ 都是 T 的变量. 符合定理要求.

定义 2　如果一个 Γ 林 U 包含 Γ 自己, 也就是它是个满林, 而且每个元素 γ 与它在 $U(\gamma)$ 中的极大元素之间的 $\bar{\gamma}$ 的线元相对于 γ 都是 T 上的常量或者都是 T 上的变量, 则称这个林 U 为完备林.

由前面的讨论可见

定理 6　任何 $U(\Gamma)$ 的完备化得到的 $\bar{U}$ 都是完备林.

我们现在在一个完备林 $\bar{U}$ 中任意去掉一些 $\mathscr{B}(\bar{U})$ 的元素 $\tau_1,\cdots,\tau_n$. 余下的集合当然还是一个 Γ 林, 而且是满林. 令这个满林为 $U_1\{\Gamma\}$. 我们要证明下述定理.

定理 7　$U_1\{\Gamma\}$ 的完备化 $\bar{U}_1(\Gamma)=\bar{U}$.

证明 4　首先 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 都有一个性质:

包含它们的最小的 $\bar{U}(\Gamma)$ 的元素比如 γ 都属于 $\mathscr{W}(\bar{U})$, 所以不在被除掉之列;

$\tau_1,\cdots,\tau_n$ 所包含的最大元素比如 γ' 也不属于 $\mathscr{B}(\bar{U})$, 所以也不在被除掉之列;

考虑这个 γ , 由于 γ 在 $\bar{U}$ 中属于 $\mathscr{W}(\bar{U})$, 因此 $\bar{\gamma}(\bar{U})=\gamma\backslash\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 中有相对于 T,γ 是常量的线元. 在 U_1 中, 新的 $\bar{\gamma}$ 范围扩大了, $\bar{\gamma}(U_1)\supseteq\bar{\gamma}(\bar{U})$.

因此, γ 在 U_1 中也属于 $\mathscr{W}(U_1)$. 在 $\bar{\gamma}(U_1)$ 中属于 $\bar{\tau}_i=\tau_i\backslash\gamma_{1i}\cdots\gamma_{ci}$ 的线元, 它们相对于各自的 τ_i 是 T 上的变量, 然后由定理 3 的推论, 它们对应的差 $k_{ab\sigma}^{\ \tau_i}-k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$ 是 $\bar{\gamma}(\bar{U})$ 上的线元上 $k_{a'b'\sigma'}^{\ \gamma}$ 的线性齐次函数, 而这些线元是 T,γ 上的常量, 所以 $k^{\tau_i}_{ab\sigma}-k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$ 与 t 无关. 所以这些 $L_{ab\sigma}$ 不管相对于 γ 或者相对于 τ_i 都是 T 上的变量. 从而由 U_1 进行完备化生成 δ_i 的过程中这些线元全都添加进 δ_i 中去了. 因此, 所有减去的 τ_i 都能复原.

由以上叙述可见, 对任何一个正常林 $U(\Gamma)$ 都可以用添加 Γ 变成满林 $U'(\Gamma)$, 再用添加满林的 $\mathscr{A}(U')$ 的方法得到一个完备化 $\bar{U}(\Gamma)$. 要从满林开始作完备化的原因是可能 $\Gamma\in\mathscr{W}(U)$, 而 $\Gamma/\gamma_1\cdots\gamma_L=\bar{\Gamma}$ 上有对 Γ,T 是变量的线元 $L_{ab\sigma}$, 因此需要在这里添加的 $\mathscr{B}(U)$元素. 由一个完备林 $\bar{U}(\Gamma)$, 可以用除去一些 $\mathscr{B}(\bar{U})$ 的元素 τ_i , 再去掉 Γ 得到一系列的正常林 $U_i(\Gamma)$. 而所有这些正常林 U_i 的完备化都是 $\bar{U}(\Gamma)$(基底 $\underline{U}(\Gamma)$ 不是正常林而是满林, 因为约定 Γ 自己不属于 $\mathscr{B}(\bar{U})$). 因而一切正常林都可以用这种方式确定地配分到完备林 $\bar{U}(\Gamma)$ 的名下.

一切正常林都可以找到一个完备化, 空集 $U_{\varnothing}(\Gamma)=\varnothing$ 也是一个正常林, 它的完备化要添加的元素如下：空集添加 Γ 后得到只有 Γ 一个元素的满林 $U'_{\varnothing}=\{\Gamma\}$. 然后, 若 $\gamma\notin\mathscr{W}$, 则

$$\bar{U}_{\varnothing}=\{\Gamma\}. \tag{8.3.16}$$

若 $\gamma\in\mathscr{W}$, 则找出 Γ 中的所有相对于 Γ 是 T 的变量的线元. 它们的连接部分 $\tau_1,\cdots,\tau_c$ 一定是正规子图, 而且 $\tau_1,\cdots,\tau_c$ 相互分离, 给出完备林

$$\bar{U}_{\varnothing}=\{\Gamma\}\cup\{\tau_1\}\cup\{\tau_2\}\cdots\cup\{\tau_c\}=\{\Gamma,\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_c\}. \tag{8.3.17}$$

在这个完备林中, 所有的 Γ 真子图 $\tau_1,\cdots,\tau_c$ 全都属于 $\mathscr{B}(\bar{U}_{\varnothing})$. 因此一个完备林 C 如果不能由 $\varnothing$ 生成, 它一定包含不属于 $\mathscr{B}(C)$ 的 Γ 的真子图.

这个完备林 (8.3.17) 式还可以由下面一系列正常林生成：

$$
\begin{aligned}
&U_1 = \{\tau_1\} \\
&U_2 = \{\tau_2\} \\
&\vdots \\
&U_{12} = \{\tau_1\} \cup \{\tau_2\} \\
&\vdots \\
&U_{12\cdots c} = \{\tau_1\} \cup \{\tau_2\} \cup \cdots \cup \{\tau_c\}.
\end{aligned} \tag{8.3.18}
$$

我们看到, 一个 Γ 林 U 的完备化与超平面 T 的选择密切相关. 当 T 取得不同, 它的完备化 $\bar{U}$ 也不同.

同样, 一个 Γ 林中, $\mathscr{W}(U)$、$S(\gamma U)$、$\mathscr{A}(U)$、$\mathscr{B}(U)$ 等的形成也与 T 的选取密切相关.

对于多数取向的超平面 T , 所有的线元都会是变量, 因此所有的满林都是完备林, 只有对一些特别的超平面, 完备林才有丰富的结构. 但是要证明 R_Γ 在积分下收敛, 必须要求对一切 T 的选择, R_Γ 对 t 的幂次都小于 T 的维数的负值, 所以需要作如此详细的分析.

由前面的讨论我们知道, 任何一个正常林 $U(\Gamma)$ 都有一个确定的完备化 $\bar{U}(\Gamma)$. 因此凡是对于所有 Γ 的正常林 $U(\Gamma)$ 的求和就可以变为先对完备林 C 的求和, 再在同一个 C 下对共有这个 C 作为自己完备林的那些正常林 U 的求和

$$
\sum_{\substack{U(\Gamma)\\ U\in N}} = \sum_{C(\Gamma)} \qquad \sum_{\substack{U(\Gamma). \\ \left\{\begin{array}{l} U(\Gamma)\ \in N \\ \bar{U}(\Gamma) = C \end{array}\right.}} \tag{8.3.19}
$$

我们现在改写 $\bar{R}_\Gamma$ 的公式, 我们有 (8.2.21) 式

$$
\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\substack{U(\Gamma)\in N \\ U(\Gamma)\neq\{\varnothing\}}} \prod_{\lambda\in U(\Gamma)} (-t^\lambda_{q^\lambda} S_\lambda) I_\Gamma. \tag{8.3.20}
$$

我们现在将 (8.3.20) 式的求和先对完备林 $C(\Gamma, T)$ 求和, 在同一 C 中再对完备化等于该 C 的正常林求和. 我们知道, 由 (8.3.19) 式, 这与直接对正常林 U 求和是一样的, 得到

$$
\bar{R}_\Gamma = \sum_{C\neq C_\varnothing} \left(\sum_{\substack{U(\Gamma)\in N \\ U(\Gamma)\neq\varnothing \\ \bar{U}(\Gamma)=C}} \prod_{\lambda\in U(\Gamma)} (-t^\lambda_{q^\lambda} S_\lambda) I_\Gamma \right) + \sum_{\substack{U(\Gamma)\in N \\ U(\Gamma)\neq\varnothing \\ \bar{U}(\Gamma)=C_\varnothing}} \prod_{\lambda\in U(\Gamma)} (-t^\lambda_{q^\lambda} S_\lambda) I_\Gamma + I_\Gamma. \tag{8.3.21}
$$

在此式中, $C_\varnothing$ 是由空集 $\varnothing$ 完备化得到的完备林, $C \neq C_\varnothing$ 是其余完备林. 考虑到 (见 (8.1.31) 式) 当 $\gamma \supset \gamma'$ 时, 有

$$S_\gamma S_{\gamma'} = S_\gamma. \tag{8.3.22}$$

我们也可以改写此式为

$$\bar{R}_\Gamma = \sum_{C\neq C_\varnothing}\left(\sum_{\substack{U(\Gamma)\in N\\ U(\Gamma)\neq\varnothing\\ \bar{U}(\Gamma)=C}}\prod_{\lambda\in C} g^\lambda(C,U)S_\lambda I_\Gamma\right) + \sum_{\substack{U(\Gamma)\in N\\ U(\Gamma)\neq\varnothing\\ \bar{U}=C_\varnothing}}\prod_{\lambda\in C_\varnothing} g^\lambda(C_\varnothing,U)S_\lambda I_\Gamma + I_\Gamma. \tag{8.3.23}$$

其中

$$\begin{aligned} g^\lambda &= 1, \qquad \text{当 } \lambda\in C, \lambda\notin U; \\ g^\lambda &= -t^\lambda_{q^\lambda}, \quad \text{当 } \lambda\in C, \lambda\in U. \end{aligned} \tag{8.3.24}$$

由于对同一个 C, 正常林 U 的获得是将 C 中扣除 Γ, 再扣除任意数量的 C 中的 $\mathscr{B}(C)$ 的元素而得到的, 因此, 对于 $\lambda\in\mathscr{B}(C)$, 都有两种选择: 除掉或者不除掉, 相应地在 (8.3.23) 式中的 g^λ 取 1 或者 $-t^\lambda_{q^\lambda}$, 求和 $\sum_{U(\Gamma)\in N}$ 实际上就是对一切这种可能性求和. 因此, 有

$$\begin{aligned} \bar{R}_\Gamma &= \sum_{C\neq C_\varnothing}\Big(\prod_{\substack{\lambda\in C\\ \lambda\neq\Gamma}} f_\lambda S_\lambda I_\Gamma\Big) + \prod_{\substack{\lambda\in C_\varnothing\\ \lambda\neq\Gamma}} f_\lambda S_\lambda I_\Gamma \\ &= \sum_C\Big(\prod_{\substack{\lambda\in C\\ \lambda\neq\Gamma}} f_\lambda S_\lambda I_\Gamma\Big). \end{aligned} \tag{8.3.25}$$

其中

$$\begin{aligned} f_\lambda &= -t^\lambda_{q^\lambda}, \qquad \text{当 } \lambda\notin\mathscr{B}(C); \\ f_\lambda &= 1-t^\lambda_{q^\lambda}, \quad \text{当 } \lambda\in\mathscr{B}(C). \end{aligned} \tag{8.3.26}$$

(8.3.25) 式给出

$$S_\Gamma\bar{R}_\Gamma = \sum_C Y_\Gamma(C), \tag{8.3.27}$$

其中

$$\begin{aligned} Y_\Gamma(C) &= S_\Gamma\prod_{\substack{\lambda\in C\\ \lambda\neq\Gamma}} f_\lambda S_\lambda I_\Gamma \\ &= I_{\Gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} S_\Gamma\prod_{i=1}^{c}\{f_{\gamma_i}S_{\gamma_i}\prod_{\substack{\lambda\in U(\gamma_i)\}.\\ \lambda\neq\gamma_i}} f_\lambda S_\lambda I_{\gamma_i}\}. \end{aligned} \tag{8.3.28}$$

式中, $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 是 $U(\Gamma)=C(\Gamma)$ 的极大元素, $U(\gamma_i)$ 是包含于 γ_i 的 $U(\Gamma)=C(\Gamma)$ 的元素形成的子林. 由 (8.2.19) 式

$$R_\Gamma(k,q)=(1-t_{q^\Gamma}^\Gamma)S_\Gamma\bar{R}_\Gamma,$$

有

$$R_\Gamma(k,q)=\sum_C(1-t_{q^\Gamma}^\Gamma)Y_\Gamma(C)=\sum_C X_C,\quad X_C=(1-t_{q^\Gamma}^\Gamma)Y_\Gamma(C). \tag{8.3.29}$$

我们的任务就是证明每个 X_C 对 t 的幂次小于 $(-1)\times T$ 平面的维数. 为此, 须研究 Y_Γ 的性质. 为了这个目的, 对于完备林 $C(\Gamma)$ 的子集合 $U(\gamma)$, 即如下 γ' 的集合: $\gamma'\in C(\Gamma)$, 且 $\gamma'\subseteq\gamma$, 我们类比 (8.3.28) 式定义 Y_γ (容易看出, $U(\gamma)$ 也具有完备林在定理 5 中所说的性质).

定义 3　当 $U(\gamma)$ 包含 γ 的真子图时,

$$Y_\gamma=S_\gamma\prod_{\substack{\lambda\in U(\gamma)\\ \lambda\neq\gamma}}f_\lambda S_\lambda I_\gamma. \tag{8.3.30}$$

其中, f_λ 和 S_λ 由 (8.3.26) 式给出, $U(\gamma)$ 是 $C(\Gamma)$ 派生出来的具有完备林性质的林.

我们有

$$Y_\gamma=I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}S_\gamma\prod_{\tau=1}^{c}(f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}). \tag{8.3.31}$$

其中, $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 是 $U(\gamma)$ 中的极大元素, 当 γ 下面不包含其他子图时, 我们定义 $Y_\gamma=I_\gamma$.

习题　请用 (8.3.30) 证明 (8.3.31) 式.

现在, 让我们小结一下这一节的内容, 首先约定当 $d<0$ 时, 泰勒展开 $t_q^d\equiv 0$. 对于 BPHZ 给出的 R_Γ, (8.2.4) 式和 (8.2.5) 式可以统一写成 (8.2.10) 式, 即

$$R_\Gamma=(1-t_{q^\Gamma}^{d(\Gamma)}S_\Gamma)\bar{R}_\Gamma. \tag{8.3.32}$$

其中, $\bar{R}_\Gamma$ 可以用迭代方式定义

$$\begin{aligned}\bar{R}_\gamma&=I_\gamma+\sum_{\gamma_1\cdots\gamma_c}{}' I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c}\prod_{\tau=1}^{c}Q_{\gamma_\tau}\\&=I_\gamma+\sum_{\gamma_1\cdots\gamma_c}{}' I_{\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c}\prod_{\tau=1}^{c}-t_{q^{\gamma_\tau}}^{d(\gamma_\tau)}S_{\gamma_\tau}\bar{R}_{\gamma_\tau}.\end{aligned} \tag{8.3.33}$$

其中, $\gamma_1\cdots\gamma_c$ 是 γ 的真子正规图, 而且互相分离. 求和号 $\sum'$ 是对一切这样的集合 $\{\gamma_1\cdots\gamma_c\}$ 求和. 第一项 I_γ 可以认为是相当于该集合为空集时的一项, 因此 $\bar{R}_\gamma$ 是许多项的求和. Q_{γ_τ} 是重整化时引进的抵消项, 它是 q_{γ_τ} 的多项式.

由于该式是由迭代关系定义的, 定义中的 $\bar{R}_{\gamma_\tau}$ 又是许多项的求和. 因此, 最终 $\bar{R}_\gamma$ 是许多项的求和. 这和式中的一项形成一个林 $U(\gamma)$ 给出 (8.2.21) 式

$$\bar{R}_\gamma = I_\gamma + \sum_{U(\gamma)\in N, U(\gamma)\neq\{\phi\}} \prod_{\lambda\in U(\gamma)} (-t_{q^\lambda}^{d(\lambda)} S_\lambda) I_\gamma. \tag{8.3.34}$$

当一个动量积分空间 k 中的子平面 T 确定之后, 相对于正规图 γ 可以确定 γ 的内线 $L_{ab\sigma}$ 是 T 的变量还是常量. 这种区分对于 $t_{q^\gamma}^{d(\gamma)}$ 的结果中的 t 幂次很重要.

本节的定理 6 说明, 可以在 Γ 的一个林 $U(\Gamma)$ 中添加一些正规子图, 使得新的完备化 $\bar{U}$ 是完备林, $\bar{U}$ 具有一个重要性质：它的任何一个 γ 与下一级 $\gamma_1\cdots\gamma_c$ 之间的线元即 $\gamma/\gamma_1\cdots\gamma_c$ 的线元都是变量或者都是常量.

注意：对 $U(\Gamma)$ 在完备化时添加的新元素, 在 $\bar{R}_\gamma$ 的用 $U(\gamma)$ 的表达式 (8.3.34) 式中是没有地位的. 对这样的新元素 λ, 对应于 (8.3.34) 式中 $(-t_{q^\lambda}^{d(\lambda)} S_\lambda)$ 的部分只能取为 1 或者 S_λ, 因此, (8.3.28) 式

$$Y_\Gamma(C) = S_\Gamma \prod_{\substack{\lambda\in C\\ \lambda\neq\Gamma}} f_\lambda S_\lambda I_\Gamma \tag{8.3.35}$$

是属于同一个 C 的 $U(\Gamma)$, 即 $\bar{U}(\Gamma) = C$ 的 $U(\Gamma)$ 的 $\bar{R}_\Gamma$ 中的一些项的求和, 因而有

$$\bar{R}_\Gamma = \sum_C Y_\Gamma(C). \tag{8.3.36}$$

对于 C 的子图 γ, 定义

$$Y_\gamma = S_\gamma \prod_{\substack{\lambda\in U(\gamma)\\ \lambda\neq\gamma}} f_\lambda S_\lambda I_\gamma, \tag{8.3.37}$$

其中, $U(\gamma)$ 是完备林 $\bar{U}(\Gamma) = C$ 的所有被 γ 包含的正规子图. 这个式子可以用迭代方式定义为 (8.3.31) 式

$$Y_\gamma = I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} S_\gamma \prod_{\tau=1}^{c} (f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}). \tag{8.3.38}$$

注意：我们注意到, 这个式子中的算子 f_{γ_τ} 是线性算子. 如果 Y_{γ_τ} 有一个改变：$Y'_{\gamma_\tau} = \Delta Y_{\gamma_\tau} + Y_{\gamma_\tau}$, 而且在迭代过程中后继运算 f_{γ_τ} 不变, 则 γ_τ 的上一级 γ 的 Y_γ 将有改变

$$\Delta Y_\gamma = \sum_i I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} S_\gamma \prod_{\tau=1}^{c} (f_{\gamma_\tau} \Delta Y_{\gamma_\tau}). \tag{8.3.39}$$

我们现在考察, 如果在重整化时引进的抵消项 $Q_{\gamma_\tau} = -t_{q^\gamma}^{d(\gamma)} \bar{R}_{\gamma_\tau}$ 中做一个改变：

$$Q'_{\gamma_\tau} = \Delta Q_{\gamma_\tau} + Q_{\gamma_\tau} \tag{8.3.40}$$

假设某个完备林 $U(\Gamma)=C$ 包含 γ_τ, 则在 (8.3.38) 式中在 $f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}$ 的位置上就会迭加一个 ΔQ_{γ_τ}. 这是因为 $Y_\Gamma(C)$ 是 (8.3.34) 式 $\bar{R}_\Gamma$ 中那些隶属于 C 的那些 U_γ 的求和项组成, 当 C 包含 γ_τ 时, 这些项一定在 f_λ 中有 $-t_{q_{\gamma_\tau}}^{d(\gamma_\tau)}$ 出现, 这个地点就多出改变量 ΔQ_{γ_τ}.

如果在后继运算中一切包含 γ_τ 的 γ 都同等地对待 Q_{γ_τ} 和 ΔQ_{γ_τ}, 则在 γ_τ 的上一级 γ 将有改变, 由 (8.3.38) 式有

$$
\begin{aligned}
Y'_{\gamma_\tau} &= \Delta Y_{\gamma_\tau} + Y_{\gamma_\tau}, \\
\Delta Y_{\gamma_\tau} &= I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} S_\gamma \prod_{\tau=1}^{c} \Delta Q_{\gamma_\tau}.
\end{aligned}
\tag{8.3.41}
$$

值得注意的是产生这种改变的 $Y_\Gamma(U)$ 将不止一个, 而且不影响后继的 f_{γ_τ} 的形式. 所有以 γ_τ 为元素的完备林 $U=C$ 都将产生这个改变. 我们知道, 不同的重整化点对应的抵消项的差别正是这一些 ΔQ_{γ_τ}, 在下一节我们也会分析这样的改变对 Zimmerman 定理可能有什么影响.

8.4 Zimmermann 定理

在上节, 我们得到费恩曼被积函数的有限部分 (8.3.29) 式

$$
R_\Gamma = (1-t^{d(\Gamma)})S_\Gamma \bar{R}_\Gamma = \sum_{U=C\in\mathscr{C}} (1-t^{d(\Gamma)})Y_\Gamma(U). \tag{8.4.1}
$$

在本节将证明对每个完备林 $U=C$, 相关的 $X_C=(1-t^\Gamma)Y_\Gamma$(它是 T 平面参数 t_i 的有理函数), 其 t 幂次满足不等式

$$
\deg_t(1-t^\Gamma)Y_\Gamma(U) < -\dim(T). \tag{8.4.2}
$$

从而证明 Zimmermann 定理：

$$
\deg_t R_\Gamma = \deg_t(1-t^\Gamma)\bar{R}_\Gamma < -\dim(T).
$$

对于 $\gamma\in U=C$, Y_γ 由迭代公式给出

$$
Y_\gamma = I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} S_\gamma f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.3}
$$

其中, $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 是 $U(\gamma)$ (它是 $U=C$ 中被 γ 包含的元素的集合) 的极大元素. 如果 γ 不包含比它更小的元素, 则 $Y_\gamma=I_\gamma$. 注意：γ 不是 $U(\gamma)$ 的极大元素. 从 (8.4.3) 式可以知道 Y_γ 可以表示为

$$
Y_\gamma(K^\gamma, q^\gamma) = \frac{A}{B_1B_2}. \tag{8.4.4}
$$

其中，A 是 $K^\gamma=\{k_{ab\sigma}^{\gamma}\}$ 和 $q^\gamma=\{q_a^\gamma\}$ 的多项式，

$$B_1=\prod_{L_{ab\sigma}\in\delta}(l_{ab\sigma}^{\ 2}-\mu_{ab\sigma}^{\ 2}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{l_{ab\sigma}}^{\ 2}+\mu_{ab\sigma}^{\ 2}))\equiv\prod_{L_{ab\sigma}\in\delta}C_{ab\sigma},\tag{8.4.5}$$

$$\begin{aligned}B_2&=\prod_{\substack{\varphi\in U(\gamma)\\ \varphi\neq\gamma}}\prod_{L_{ab\sigma}\in\varphi}({k_{ab\sigma}^{\varphi}}^{2}-\mu_{ab\sigma}^{\ 2}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{k_{ab\sigma}}^{\ 2}+\mu_{ab\sigma}^{\ 2}))^{C(\varphi,ab\sigma)}\\&\equiv\prod_{\substack{\varphi\in U(\gamma)\\ \varphi\neq\gamma}}\prod_{L_{ab\sigma}\in\varphi}(C_{ab\sigma}^{\ 0})^{C(\varphi,ab\sigma)}.\end{aligned}\tag{8.4.6}$$

δ 是 γ 的内线的集合 $\mathscr{L}(\gamma)$ 的子集合, $C(\varphi,ab\sigma)$ 是非负整数. 下面我们用递推公式 (8.4.3) 式进行分析. (8.4.4) 式的主要信息在其分母上. (8.4.3) 式中 $I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}$ 提供的分母是 $\bar{\gamma}$ 的线元传播子 $\Delta_{ab\sigma}(l_{ab\sigma})$ 的分母 (见 (8.1.1) 式和 (8.2.3) 式)

$$C_{ab\sigma}\equiv l_{ab\sigma}^{\ 2}-\mu_{ab\sigma}^{\ 2}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_{ab\sigma}^{\ 2}+\mu_{ab\sigma}^{\ 2})$$

可以归结到 (8.4.4) 式的 B_1 中去，B_1 的其余部分由 $f_\tau Y_\tau$ 决定.

当 $\gamma_\tau\notin\mathscr{B}(U)$, $f_{\gamma_\tau}=-t^{\gamma_\tau}$, 这是一个泰勒展开, 先要将 Y_{γ_τ} 取对 q 的偏商再令 $q=0$, 这个偏微商将 Y_{γ_τ} 中由传播子的分母 $\prod\limits_{L_{ab\sigma}\in\delta(\gamma_\tau)}C_{ab\sigma}$ 变为 $\prod(C_{ab\sigma})^{C(\gamma_\tau,ab\sigma)}$ 然后取成 $q=0$ 的值, 也就是

$$\prod_\delta C_{ab\sigma}\rightarrow\prod_\delta C_{ab\sigma}^{C(ab\sigma)}\rightarrow\prod_\delta(C_{ab\sigma}^{\ 0})^{C(ab\sigma)}.\tag{8.4.7}$$

这样, 这个分母就会在后继的运算中留下了, 因为它只是 K^γ 的函数. 然而当 $\gamma_\tau\in\mathscr{B}(U), f_{\gamma_\tau}=1-t^{\gamma_\tau}$, 就会留下 Y_{γ_τ} 中的传播子的分母部分 $\prod_{L_{ab\sigma}\in\delta(\gamma_\tau)^{C_{ab\sigma}}}$. 因此, 当 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$ 时, 由于 γ 的极大元素都不属于 $\mathscr{B}(U)$, 所以, $S_\gamma f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}$ 的分母中没有 $C_{ab\sigma}$, 只有由 $k_{ab\sigma}^{\varphi}$ 给出的 $C_{ab\sigma}^{\ 0}$, 从而 B_1 中的 δ 只包含 $\bar{\gamma}$ 中的线元. 反之, 当 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$, 则 δ 除了包含 $\bar{\gamma}$ 中的线元外, 还包含属于 $\mathscr{B}(U)$ 即不属于 $\mathscr{W}(U)$ 的那些 γ_τ 的 $\bar{\gamma_\tau}=\gamma_\tau/\gamma_{\tau 1}\cdots,\gamma_{\tau c_\tau}$ 的线元, 最终使 Y_γ 得到 (8.4.4) 式的形式.

为了推导 Zimmermann 定理

$$\deg_t R_\Gamma<-\dim T,\tag{8.4.8}$$

我们介绍几个概念. 定义 γ 图的表观发散度

$$d(\gamma)=\deg_l I_\gamma+4l(\gamma),\tag{8.4.9}$$

其中, $\deg_l$ 是 I_γ 作为 $l_{ab\sigma}$ 的有理函数的 l 的幂次, 而 $l(\gamma)$ 是 γ 的独立回路数, 或者独立线元的数目. 类似地定义

$$d(\bar{\gamma}) = \deg_l I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} + 4l(\bar{\gamma}), \tag{8.4.10}$$

给出

$$d(\gamma) = d(\bar{\gamma}) + \sum_{\tau=1}^{c} d(\gamma_\tau). \tag{8.4.11}$$

这是因为 $I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = I_\gamma / \prod_{\tau=1}^{c} I_{\gamma_\tau}$. 由 (8.1.25) 式又有 $l(\gamma) = l(\bar{\gamma}) + \sum_{\tau=1}^{c} l(\gamma_\tau)$. 我们知道每一根线元都有 $l_{ab\sigma} = q_{ab\sigma}^{\ \gamma} + k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(t)$, 其中, $k_{ab\sigma}^{\gamma\mu}(t) = a + b_j t_j$. 把 $b_j t_j$ 看成是 T 空间的矢量, 我们定义 $M(\gamma)$ 为 γ 的所有线元 (内线) 的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(t)$ 所占有的 T 空间的维数, 即由这些线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(t)$ 生成的子空间的维数. 类似地, 定义 $M(\bar{\gamma})$ 为 $\bar{\gamma}$ 上线元占有的 T 空间的维数, 即由这些线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(t)$ 生成的子空间的维数.

由于 $\gamma(\bar{\gamma})$ 的线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}(k_{ab\sigma}^{\bar{\gamma}})$ 是 $\gamma(\bar{\gamma})$ 的独立线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$ 的线性迭加, 所以得到

$$4l(\gamma) \geqslant M(\gamma), \quad 4l(\bar{\gamma}) \geqslant M(\bar{\gamma}), \quad 4l(\Gamma) \geqslant M(\Gamma) = \dim T. \tag{8.4.12}$$

我们有如下命题.

命题 7

$$M(\gamma) \leqslant M(\bar{\gamma}) + \sum_{\tau=1}^{c} M(\gamma_\tau). \tag{8.4.13}$$

证明 5 由定理 3, 在任何 γ_τ 中, 线元 $L_{ab\sigma}$ 上 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}$ 与 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$ 之差为

$$\begin{aligned} k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau} - k_{ab\sigma}^{\ \gamma} &= \left\{ - \sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\bar{\gamma})}}^{a} k_{ab\sigma}^{\ \gamma} \right\} \text{给出的正则分布} \\ &= \left\{ - \sum_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma} \in \mathscr{L}(\bar{\gamma})}}^{a} k_{ab\sigma}^{\ \gamma} \right\} \text{的线性迭加.} \end{aligned} \tag{8.4.14}$$

因而由 $\{k_{ab\sigma}^{\ \gamma_\tau}\}$ 和 $k_{ab\sigma}^{\bar{\gamma}}$, 即在 $\bar{\gamma}$ 上的线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$ 可以组合成所有 γ 的线元的 $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$. 两个子空间合成的子空间的维数不会大于这两个子空间维数之和, 因而有命题 7.

当 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, 由于这时 $\bar{\gamma}$ 上的线元都是 T 面上的常量 ($U = C$ 是完备林), $k_{ab\sigma}^{\ \gamma}$ 与 t_j 无关. 我们有

$$\deg_t I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = 0. \tag{8.4.15}$$

当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 令

$$I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = \frac{A}{B}, \tag{8.4.16}$$

其中, A 是 $\bar{\gamma}$ 上线元动量 $l_{ab\sigma}$ 的多项式,

$$B = \prod_{L_{ab\sigma}\in\bar{\gamma}} (l_{ab\sigma}^{\,2} - \mu_{ab\sigma}^{\,2} + \mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_{ab\sigma}^{\,2} + \mu_{ab\sigma}^{\,2})). \tag{8.4.17}$$

由于这些 $\bar{\gamma}$的线元都是 T 上的变量 ($U = C$ 是完备林), 在经过 Wick 转动之后, B 作为 q, t 的多项式, 其 tq 幂次为

$$\begin{aligned}\deg_{tq} B &= \sum_{L_{ab\sigma}\in\bar{\gamma}} \deg_{tq}(-l_{ab\sigma,4}^{2} - \vec{l}_{ab\sigma}^{\,2} - \mu_{ab\sigma}^{\,2} + \mathrm{i}\epsilon(\cdots)) \\ &= \sum_{L_{ab\sigma}\in\bar{\gamma}} (2) = \deg_l B,\end{aligned} \tag{8.4.18}$$

第二个等式是由于实数平方和不可能相消, 而对于每一个 4–矢量 $l_{ab\sigma}$, 至少有一个分量 $l_{ab\sigma}^{\mu}$ 是 t 的一次式. 所以, 作为平方和, t 的最高次项肯定是 2 次. 另一方面, 分子肯定有 ($l_{ab\sigma}$ 是 tq 的一次或零次式)

$$\deg_{tq} A \leqslant \deg_l A. \tag{8.4.19}$$

这是由于 A 是 l 的多项式, l 的 tq 幂次是 0 或者 1 次. 所以, 当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 由 (8.4.10) 式和 (8.4.12) 式得

$$\deg_{tq} I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \leqslant \deg_l I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} = d(\bar{\gamma}) - 4l(\bar{\gamma}) \leqslant d(\bar{\gamma}) - M(\bar{\gamma}). \tag{8.4.20}$$

为了证明 Zimmermann 定理, Zimmermann 首先建立了如下引理.

引理 1　对于 $\gamma \in U(\Gamma)$, $U = C \in \mathscr{C}$ 是完备林,

(1) 当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 有

$$\deg_{tq} Y_\gamma \leqslant d(\gamma) - M(\gamma); \tag{8.4.21}$$

(2) 当 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, 有

$$\deg_t Y_\gamma < -M(\gamma). \tag{8.4.22}$$

我们用数学归纳法证明这条引理. 假设函数 Y 对 γ 的极大元素 γ_τ 都满足引理 1, 考察对 γ 是否满足.

8.4.1　$\gamma \notin \mathscr{W}(U)$

当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 在 $\bar{\gamma}$ 的所有线元相对于 γ 都是 T 的变量, 由 Y_γ 的迭代公式

$$Y_\gamma = I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \prod_{\tau=1}^{c} S_\gamma f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}, \tag{8.4.23}$$

有

$$\deg_{tq} Y_\gamma = \deg_{tq} I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} + \sum_{\tau=1}^{c} \deg_{tq} S_\gamma f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.24}$$

由于 $\bar{\gamma}$ 上的线元都是 T 的变量, 有 (8.4.20) 式

$$\deg_{tq} I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} \leqslant d(\bar{\gamma}) - M(\bar{\gamma}). \tag{8.4.25}$$

因此, 只要证明对于 $U(\gamma)$ 的每一个极大元素 γ_τ 都有

$$\deg_{tq} S_\gamma f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau} \leqslant d(\gamma_\tau) - M(\gamma_\tau) \tag{8.4.26}$$

就行了.

如果这个式子能够成立, 由 (8.4.11) 式

$$d(\bar{\gamma}) + \sum_{\tau} d(\gamma_\tau) = d(\gamma) \tag{8.4.27}$$

及命题 7(8.4.13) 式

$$M(\bar{\gamma}) + \sum M(\gamma_\tau) \geqslant M(\gamma) \tag{8.4.28}$$

就可以导出相对于 γ 的 (8.4.21) 式:

$$\deg_{tq} Y_\gamma \leqslant d(\gamma) - M(\gamma). \tag{8.4.29}$$

下面我们证明 (8.4.26) 式.

因为 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 所以它的极大元素 $\gamma_\tau \notin \mathscr{B}(U)$, 由 (8.3.26) 式$f_{\gamma_\tau} = -t^{\gamma_\tau}$. γ_τ 有两种可能:

(1) $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$;

(2) $\gamma_\tau \in \mathscr{W}(U)$.

我们将分别证明这两种情况 (8.4.26) 式都成立.

1. $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$

当 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$, 这时有 (由归纳假设)

$$\deg_{tq} Y_{\gamma_\tau} \leqslant d(\gamma_\tau) - M(\gamma_\tau).$$

下面我们证明一个命题.

命题 8 对于完备林 $U \in \mathscr{C}$ 的元素 γ_τ , 如果 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$, 则有

$$\deg_{tq}(-t^d Y_{\gamma_\tau}) \leqslant \deg_{tq} Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.30}$$

证明 6 以下分析当 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$ 时, 函数 $-t^d Y_{\gamma_\tau}$ 的 tq 幂次.

函数 $''-t^dY''_{\gamma_\tau}$ 是函数 $Y_{\gamma_\tau}(q^{\gamma_\tau}, K^{\gamma_\tau})$ 对 q^{γ_τ} 的 d 级泰勒展开. 泰勒展开有几个步骤:

- 取函数对 q 的微商并在结果中令 $q=0$;
- 将这样得到的系数 (它只是 K^{γ_τ} 的函数, 与 q^{γ_τ}无关) 乘以 $q_a^{\gamma_\tau}$ 的单项式;
- 将得到的结果求和.

考虑 (8.4.4) 式

$$Y_{\gamma_\tau} = \frac{A}{B_1 B_2}, \tag{8.4.31}$$

其中, A 是 q^{γ_τ} 和 K^{γ_τ} 的多项式,

$$B_1 = \prod_{L_{ab\sigma}\in\delta} (l_{ab\sigma}^{\ 2} - \mu_{ab\sigma}^{\ 2} + \mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_{ab\sigma}^{\ 2} + \mu_{ab\sigma}^{\ 2})) \equiv \prod_{L_{ab\sigma}\in\delta(\gamma_\tau)} C_{ab\sigma},$$

$$B_2 = \prod_{\substack{\varphi \\ \varphi\subset U(\gamma_\tau) \\ \varphi\neq\gamma_\tau}} \prod_{L_{ab\sigma}\in\varphi} (k_{ab\sigma}^{\varphi\ 2} - \mu_{ab\sigma}^{\ 2} + \mathrm{i}\epsilon(\vec{k}_{ab\sigma}^{\varphi\ 2} + \mu_{ab\sigma}^{\ 2}))^{C(\varphi,ab\sigma)} \text{ 与 } q^{\gamma_\tau} \text{ 无关.}$$

由于 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$, 根据 (8.4.4) 式下面的一段分析, $\delta = \bar{\gamma}_\tau \equiv \gamma_\tau/\gamma_1, \cdots, \gamma_c$, 又由于 $U=C$ 是完备林, $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$, 所以 γ_τ 的 B_1 涉及的线元全部是 T 上的变量. 因为 B_2 与 q 无关, 我们有

$$-t^d Y_{\gamma_\tau} = \frac{1}{B_2}\left(-t^d \frac{A}{B_1}\right). \tag{8.4.32}$$

由于 A 和 B_1 是 q, t 的多项式, 我们有

$$\deg_{tq} \partial_q A \leqslant \deg_{tq} A - 1, \quad \deg_{tq} \partial_q B_1 \leqslant \deg_{tq} B_1 - 1, \tag{8.4.33}$$

从而有

$$\begin{aligned}\deg_{tq} \partial_q \frac{A}{B_1} &= \deg_{tq} \frac{B_1\partial_q A - A\partial_q B_1}{B_1^2} \\ &\leqslant \max[\deg_{tq} \partial_q A + \deg_{tq} B_1, \deg_{tq} A + \deg_{tq} \partial_q B_1] - 2\deg_{tq} B_1 \\ &\leqslant \deg_{tq} A - \deg_{tq} B_1 - 1 = \deg_{tq} \frac{A}{B_1} - 1 \qquad (8.4.34) \\ &\Rightarrow \deg_{tq} \partial_q^n \frac{A}{B_1} \leqslant \deg_{tq} \frac{A}{B_1} - n. \qquad (8.4.35)\end{aligned}$$

其中, ∂_q^n 是 $\partial^n/\partial q_{i_1}\cdots\partial q_{i_n}$ 的简写, $\{q_i\} = \{q_{a,\mu}\}$.

另一方面, 当 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$ 时, 根据前面的分析 B_1 的所有线元都相对于 γ_τ 是 T 上的变量, 在 Wick 转动之后有

$$\deg_{tq} B_1 = \deg_{tq}(B_1|_{q=0}). \tag{8.4.36}$$

这是由于在 Wick 转动之后,

$$\begin{aligned}C^0_{ab\sigma}=&[l^2_{ab\sigma}-\mu^2_{ab\sigma}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}^2_{ab\sigma})]|_{q=0}\\=&[-k^{\gamma_\tau}_{ab\sigma 4}{}^2-\vec{k}^{\gamma_\tau}_{ab\sigma}{}^2-\mu^2_{ab\sigma}+\epsilon(\vec{k}^{\gamma_\tau}_{ab\sigma}{}^2+\mu^2_{ab\sigma})]\end{aligned} \tag{8.4.37}$$

是实数的平方和的形式, 各项不可能相消. 当 $L_{ab\sigma}$ 相对 T,γ_τ 是变量时, 按定义 $k^{\gamma_\tau}_{ab\sigma}$ 的各个分量中至少有一个 $k^{\gamma_\tau}_{ab\sigma,\mu}$ 是 t 的 1 次式, 所以有

$$\deg_t C^0_{ab\sigma}=\deg_{tq} C^0_{ab\sigma}=2=\deg_{tq} C_{ab\sigma}=\deg_l C_{ab\sigma}, \tag{8.4.38}$$

因此, B_1 的 tq 幂次在取 $q=0$ 时不变.

由于 $\partial^n_q\dfrac{A}{B_1}$ 可以写成 $\dfrac{Q}{P}$, 其中 P 是 B_1 的 $n+1$ 次方, Q 是 t,q 的多项式, 所以有 $\deg_{tq}P|_{q=0}=\deg_{tq}P, \deg_{tq}Q|_{q=0}\leqslant\deg_{tq}Q$, 给出 $\deg_{tq}\partial^n_q\dfrac{A}{B_1}|_{q=0}=\deg_{tq}\dfrac{Q}{P}|_{q=0}\leqslant \deg_{tq}\dfrac{Q}{P}\leqslant\deg_{tq}\dfrac{A}{B_1}-n$, 从而有

$$\deg_{tq}\left(-t^d\frac{A}{B_1}\right)=\max_{n\leqslant \mathrm{d},\partial^n_q}\left(n+\deg_{tq}\partial^n_q\frac{A}{B_1}\right)\leqslant\deg_{tq}\frac{A}{B_1}, \tag{8.4.39}$$

其中, max 是对一切 $n(\leqslant d)$ 和一切形式的 $\partial^n/\partial q_{i_1}\cdots\partial q_{i_n}$ 取极大, 因此有

$$\deg_{tq}(-t^d Y_{\gamma_\tau})\leqslant\deg_{tq}Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.40}$$

注意: (8.4.40) 式只须 γ_τ 属于完备林 U 中且 γ_τ 不属于 $\mathscr{W}(U)$ 即可, 与它的上一级元素 γ 是否属于 $\mathscr{W}(U)$ 无关.

又由于 $-t^{d(\gamma_\tau)}Y_{\gamma_\tau}$ 是 q^{γ_τ} 的多项式, 其系数是 k^{γ_τ} 的有理式, 与 q^{γ_τ} 无关. 这个有理式在 S_γ 作用下不变. 因而在 S_γ 下这系数部分的 tq 幂次不变. 作为多项式的 q 幂次部分在 S_γ 下, 由于 q^{γ_τ} 是 q^γ 和 t 的 0 次式 1 次式, tq 幂次也不会增大. 所以有

$$\begin{aligned}\deg_{tq}S_\gamma f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}=&\deg_{tq}S_\gamma(-t^{d(\gamma_\tau)}Y_{\gamma_\tau})\leqslant\deg_{tq}(-t^{d(\gamma_\tau)}Y_{\gamma_\tau})\\\leqslant&\deg_{tq}Y_{\gamma_\tau}\leqslant d(\gamma_\tau)-M(\gamma_\tau).\end{aligned} \tag{8.4.41}$$

2. $\gamma_\tau\in\mathscr{W}(U)$

当 $\gamma_\tau\in\mathscr{W}(U)$, 这时由归纳假设 $\deg_t Y_{\gamma_\tau}<-M(\gamma_\tau)$.

由于 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$, 所以 $\gamma_\tau\notin\mathscr{B}(U)$,

$$f_{\gamma_\tau}=-t^{\gamma_\tau}. \tag{8.4.42}$$

对于完备林 $U\in\mathscr{C}$ 的元素 γ_τ 我们有如下命题.

命题 9　当 $\gamma_\tau \in U$, U 为完备林时, 我们有 (注意它与命题 8 的差别)

$$\deg_t(-t^{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}) \leqslant \deg_t Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.43}$$

对于 (8.4.43) 式中 Y_{γ_τ} 的表达式, 我们有

$$f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau} = \frac{1}{B_2}\left(-t^{\gamma_\tau}\frac{A}{B_1}\right).$$

类似前面关于 $-t^{\gamma_\tau}\frac{A}{B_1}$ 的 tq 幂次分析, 对 q, t 的多项式 A 和 B , 有

$$\deg_t \partial_q \frac{A}{B_1} \leqslant \max(\deg_t B_1 \partial_q A, \deg_t A \partial_q B_1) - 2\deg_t B_1,$$

由 $\deg_t \partial_q A \leqslant \deg_t A, \deg_t \partial_q B_1 \leqslant \deg_t B_1$ 得 $\deg_t \partial_q \dfrac{A}{B_1} \leqslant \deg_t \dfrac{A}{B_1}$,

$$\Rightarrow \deg_t \partial_q^n \frac{A}{B_1} \leqslant \deg_t \frac{A}{B_1}.$$

在 Wick 转动之后有

$$\begin{aligned}
\deg_t C^0_{ab\sigma} &= \deg_t(-k^{\gamma_\tau}_{ab\sigma,4}{}^2 - \vec{k}^{\gamma_\tau}_{ab\sigma}{}^2 - \mu^2_{ab\sigma} + \mathrm{i}\epsilon(\vec{k}^{\gamma_\tau}_{ab\sigma}{}^2 + \mu^2_{ab\sigma}))\\
&= \begin{cases} 2 & (\text{当 } L_{ab\sigma} \text{ 相对 } T, \gamma_\tau \text{ 是变量})\\ 0 & (\text{当 } L_{ab\sigma} \text{ 相对 } T, \gamma_\tau \text{ 是常量}) \end{cases}\\
&= \deg_t(-l^2_{ab\sigma,4} - \vec{l}^2_{ab\sigma} - \mu^2_{ab\sigma} + \mathrm{i}\epsilon(\vec{l}^2_{ab\sigma} + \mu^2_{ab\sigma}))\\
&= \deg_t C_{ab\sigma}.
\end{aligned}$$

由此得到

$$\deg_t B_1|_{q=0} = \deg_t B_1 \tag{8.4.44}$$

$\partial_q^n \dfrac{A}{B_1}$ 可以写成 $\dfrac{Q}{P}$, P 是 B_1 的 $n+1$ 次方. Q 是 tq 的多项式. 由 (8.4.44) 式有

$$\deg_t P|_{q=0} = \deg_t P$$

对于任何 tq 的多项式 Q 有

$$\deg_t Q|_{q=0} \leqslant \deg_t Q.$$

从而得到

$$\deg_t \partial_q^n \frac{A}{B_1}|_{q=0} \leqslant \deg_t \partial_q^n \frac{A}{B_1} \leqslant \deg_t \frac{A}{B_1}.$$

以上是对于泰勒展开的系数部分分析. 泰勒展开是将这些系数乘以 q 相应的单项式. 因此, 我们有

$$\begin{aligned}\deg_t(-t^{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}) &= \deg_t\frac{1}{B_2}+\deg_t\left(-t^{\gamma_\tau}\frac{A}{B_1}\right)\\ &= \deg_t\frac{1}{B_2}+\max_{n\leqslant d(\gamma_\tau),\partial_q^n}\left(\deg_t\partial_q^n\frac{A}{B_1}\right)\\ &\leqslant \deg_t\frac{1}{B_2}+\deg_t\frac{A}{B_1}\\ &= \deg_t Y_{\gamma_\tau}.\end{aligned} \tag{8.4.45}$$

命题 9 证毕. 注意：(8.4.45) 式在任何时候都成立, 与 γ, γ_τ 是否属于 $\mathscr{W}(U)$ 无关! 由于 $-t^{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}$ 是 q 的 $d(\gamma_\tau)$ 次多项式, 因此有

$$\deg_{tq}(-t^{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau})\leqslant d(\gamma_\tau)+\deg_t(-t^{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau})\leqslant d(\gamma_\tau)+\deg_t Y_{\gamma_\tau}<d(\gamma_\tau)-M(\gamma_\tau). \tag{8.4.46}$$

如前所述, S_γ 不增加 q 的多项式的 tq 幂次, 因而有

$$\deg_{tq}S_\gamma(-t^{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau})\leqslant\deg_{tq}(-t^{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau})<d(\gamma_\tau)-M(\gamma_\tau). \tag{8.4.47}$$

由 (8.4.41) 式、(8.4.47) 式可以知道, 当 γ_τ 都遵从归纳法假设 (8.4.21) 式、(8.4.22) 式时, 由 (8.4.25) 式~(8.4.29) 式的推导可以知道包含它们的上一级元素 $\gamma\notin\mathscr{W}(U)$ 也遵从 (8.4.21) 式. 下面我们讨论 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$的情形.

8.4.2 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$

我们由 Y_γ 的迭代公式 $Y_\gamma=I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}\prod_{\tau=1}^{c}S_\gamma f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}$, 有

$$\deg_t Y_\gamma=\deg_t I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}+\sum_{\tau=1}^{c}\deg_t S_\gamma f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.48}$$

由于 $\gamma\in\mathscr{W}(U)$, 而 $C(\Gamma)=U$ 又是完备林, 所以 $\bar{\gamma}$ 上所有线元相对于 γ 都是 T 上的常量. 而 $I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}$ 是这些线元的动量的函数. 所以, 当输入 q^γ 不变时也是常量, 与 t 无关. 因此有

$$\deg_t I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c}=0. \tag{8.4.49}$$

同时 $\bar{\gamma}$ 上线元动量占有的 T 空间的维数

$$M(\bar{\gamma})=0. \tag{8.4.50}$$

因此, 只要对每一个 γ_τ 都有

$$\deg_t S_\gamma f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}<-M(\gamma_\tau), \tag{8.4.51}$$

就可以得到 (当 $U(\gamma)$ 有极大元素时)

$$\deg_t Y_\gamma < 0 + \sum_{\tau=1}^{c} -M(\gamma_\tau) = -M(\bar{\gamma}) + \sum_{\tau=1}^{c} -M(\gamma_\tau) \leqslant -M(\gamma). \tag{8.4.52}$$

最后一步是由于 (8.4.13) 式, 我们下面证明 (8.4.51) 式, 分两类情况.

(1) $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$;

(2) $\gamma_\tau \in \mathscr{W}(U)$.

1. $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$

由于包含 γ_τ 的上一级元素 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$ 是在完备林 $C = U$ 中, 因此有

$$\gamma_\tau \in \mathscr{B}(U), f_{\gamma_\tau} = 1 - t^{\gamma_\tau}. \tag{8.4.53}$$

为计算 $\deg_t(1 - t^{\gamma_\tau})Y_{\gamma_\tau}$, 我们在下面证明一个命题.

命题 10 在完备林中, 当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$ 时有

$$\deg_t(1 - t^d)Y_\gamma < \deg_{tq} Y_\gamma - d. \tag{8.4.54}$$

证明如下.

考虑表达式 (8.4.31) 式,

$$Y_{\gamma_\tau} = \frac{A}{B_1 B_2}. \tag{8.4.55}$$

由于 B_2 与 q 无关, 有

$$(1 - t^d)Y_{\gamma_\tau} = \frac{1}{B_2}(1 - t^d)\frac{A}{B_1}. \tag{8.4.56}$$

由于 $U = C$ 是完备林, $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$, $U(\gamma_\tau)$ 的极大元素 γ_{τ_i} 一定不属于 $\mathscr{B}(U)$, $f_{\gamma_{\tau_i}} = -t^{\gamma_{\tau_i}}$, 根据前面 (8.4.5) 式式中的 δ 的分析, B_1 的线元就是 $\bar{\gamma}_\tau$ 上的线元, 所以在 (8.4.31) 式中 B_1 的 δ 为

$$\delta = \bar{\gamma}_\tau. \tag{8.4.57}$$

我们由命题 8 中 (8.4.39) 式知道, 当 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$ 有

$$\deg_{tq}\left(-t^d \frac{A}{B_1}\right) \leqslant \deg_{tq} \frac{A}{B_1}. \tag{8.4.58}$$

从而给出

$$\deg_{tq}(1 - t^d)\frac{A}{B_1} \leqslant \deg_{tq} \frac{A}{B_1}. \tag{8.4.59}$$

令

$$(1 - t^d)\frac{A}{B_1} = \frac{Q_1}{P_1}, \tag{8.4.60}$$

其中, P_1 和 Q_1 是 $q^{\gamma_\tau}=\{q_a^{\gamma_\tau}\}$ 和 $K^{\gamma_\tau}=\{k_{ab\sigma}^{\gamma_\tau}\}$ 的多项式. 注意 P_1, 由 B_1 中的 $C_{ab\sigma}=l_{ab\sigma}^{\ 2}-\mu_{ab\sigma}^{\ 2}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_{ab\sigma}^{\ 2}+\mu_{ab\sigma}^{\ 2})$ 和由它导出的 $C_{ab\sigma}^{\ 0}=C_{ab\sigma}|_{q^{\gamma_\tau}=0}=k_{ab\sigma}^{\gamma_\tau\,2}-\mu_{ab\sigma}^{\ 2}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{k}_{ab\sigma}^{\gamma_\tau\,2}+\mu_{ab\sigma}^{\ 2})$ 的乘幂组成, 是 $C_{ab\sigma}$ 和 $C_{ab\sigma}^{\ 0}$ 的单项式. 在 $\gamma_\tau\notin\mathscr{W}(U)$ 时 B_1 涉及的线元范围为 $\delta=\bar{\gamma}_\tau$. 对于完备林, $\bar{\gamma}_\tau$ 上的线元相对于 γ_τ 全是 T 上的变量, 因此在 Wick 转动之后, 由于在构成 P_1 的 $C_{ab\sigma}$ 中各个 $l_{ab\sigma}$ 的分量以平方和的形式出现, 关于 t 的最高幂次不会消去. 因此有

$$\begin{aligned}\deg_t C_{ab\sigma}&=\deg_t(-(l_{ab\sigma}^{\ 4})^2-\vec{l}_{ab\sigma}^2-\mu_{ab\sigma}^{\ 2}+\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_{ab\sigma}^2+\mu_{ab\sigma}^{\ 2}))=2\\&=\deg_l C_{ab\sigma}.\end{aligned}$$

类似地, 构成 P_1 的 $C_{ab\sigma}^0$ 也满足

$$\deg_t C_{ab\sigma}^{\ 0}=2=\deg_l C_{ab\sigma}.$$

动量 $l_{ab\sigma,\mu}$ 可以是 q^{γ_τ} 的 0 次或 1 次, 从而有

$$\deg_{tq} C_{ab\sigma}=2,\quad \deg_{tq} C_{ab\sigma}^{\ 0}=2,$$

给出

$$\deg_{tq} P_1=\deg_t P_1=\deg_l P_1. \tag{8.4.61}$$

对于泰勒展开, 公式 $\left\{\partial_q^m\left[(1-t^d)\dfrac{A}{B_1}\right]\right\}_{q=0}=0$ 当 $0\leqslant m\leqslant d$ 时成立.

把 Q_1 写成

$$Q_1=R_0+R_1+\cdots+R_s, \tag{8.4.62}$$

其中, R_j 是 q 的 j 次齐次式.

令 $m=0$ 得到

$$(1-t^d)\frac{A}{B_1}|_{q=0}=\frac{R_0}{P_1|_{q=0}}=0.$$

在 Wick 转动后, 由于在欧氏空间有 $\deg_{tq}C_{ab\sigma}=\deg_{tq}C_{ab\sigma}^o=2$, 所以

$$P_1=\prod_{L_{ab\sigma}\in\bar{\gamma}}\{C_{ab\sigma}\times(C_{ab\sigma}^0)^{c(ab\sigma)}\}\neq 0 \tag{8.4.63}$$

$$\Rightarrow R_0=0. \tag{8.4.64}$$

当 $m=1$ 时有

$$\left\{\frac{\partial}{\partial q}\left[(1-t^d)\frac{A}{B_1}\right]\right\}_{q=0}=\frac{\partial_q R_1|_{q=0}}{P_1|_{q=0}}=0\Rightarrow R_1=0. \tag{8.4.65}$$

由此, 一直可得到 $R_d=0$, 从而有

$$Q_1=R_{d+1}+\cdots+R_s \tag{8.4.66}$$

$$\Longrightarrow \deg_t Q_1 \leqslant \deg_{tq} Q_1 - (d+1). \tag{8.4.67}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
\deg_t(1-t^d)\frac{A}{B_1} &= \deg_t Q_1 - \deg_t P_1 \\
&< \deg_{tq} Q_1 - \deg_{tq} P_1 - d \\
&= \deg_{tq}(1-t^{\mathrm{d}})\frac{A}{B_1} - d \\
(\text{由 (8.4.59) 式}) &\leqslant \deg_{tq} \frac{A}{B_1} - d.
\end{aligned} \tag{8.4.68}$$

从 (8.4.56) 式, 由于 B_2 不是 q 的函数, 得

$$\begin{aligned}
\deg_t(1-t^d)Y_{\gamma_\tau} = \deg_t(1-t^d)\frac{A}{B_1 B_2} &= \deg_t \frac{1}{B_2} + \deg_t(1-t^d)\frac{A}{B_1} \\
&= \deg_{tq} \frac{1}{B_2} + \deg_t(1-t^d)\frac{A}{B_1} \\
&< \deg_{tq} \frac{1}{B_2} + \deg_{tq} \frac{A}{B_1} - d \\
&= \deg_{tq} \frac{A}{B_1 B_2} - d = \deg_{tq} Y_{\gamma_\tau} - d.
\end{aligned} \tag{8.4.69}$$

命题 10 得证.

由于 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, γ 又在完备林内, 因此, $\bar{\gamma}$ 上的线元都是 T, γ 的常量, 按定义这些线元的 $k^{\gamma}_{ab\sigma}$ 与 t 无关, 当 γ 的输入 $\{q^{\gamma}_a\}$ 不变时,

$$q^{\gamma_\tau}_a - q^{\gamma}_a = \sum^{a}_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\bar{\gamma}}} (-l_{ab\sigma}) = \sum^{a}_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\bar{\gamma}}} q^{\gamma}_{ab\sigma} + k^{\gamma}_{ab\sigma}$$

与 t 无关. 由定理 3, 在 γ_τ 中

$$q^{\gamma_\tau}_{ab\sigma} - q^{\gamma}_{ab\sigma} = k^{\gamma_\tau}_{ab\sigma} - k^{\gamma}_{ab\sigma} = \left\{ \sum^{a}_{\substack{b\sigma \\ L_{ab\sigma}\in\mathcal{L}(\bar{\gamma})}} k^{\gamma}_{ab\sigma} \right\}$$

的正则分布也与 t 无关. 从而根据 8.1.1 备忘录 2 中的定义, S_γ 不增加 $(1-t^d)Y_{\gamma_\tau}$ 的 t 幂次. 因此, 当 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$ 时, 我们有

$$\deg_t S_\gamma(1-t^d)Y_{\gamma_\tau} < \deg_{tq} Y_{\gamma_\tau} - d(\gamma_\tau) \leqslant -M(\gamma_\tau). \tag{8.4.70}$$

最后一步是由归纳假设 (8.4.21) 式.

2. $\gamma_\tau \in \mathscr{W}(U)$

这时 $\gamma_\tau \notin \mathscr{B}(U)$, 因而 $f_{\gamma_\tau} = -t^{\gamma_\tau}$. 由命题 9 (8.4.43) 式, 有

$$\deg_t(-t^{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}) \leqslant \deg_t Y_{\gamma_\tau}. \tag{8.4.71}$$

如前所述, 由于 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, 在 $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 上的线元都相对于 γ 是 T 上的常量. 所以, 代换 S_γ 不增加多项式 $-t^{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}$ 的 t 幂次. 从而对 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, 有

$$\deg_t S_\gamma(-t^{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}) \leqslant \deg_t(-t^{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau}) \leqslant \deg_t Y_{\gamma_\tau} < -M(\gamma_\tau). \tag{8.4.72}$$

最后一步是假定归纳法假设 (8.4.22) 式 对 γ_τ 成立. 由 (8.4.70) 式和 (8.4.72) 式, (8.4.51) 式成立. (8.4.52) 式给出：当 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$时有 $\deg_t Y_\gamma < -M(\gamma)$, 即 Y_γ 也遵从 (8.4.22) 式.

有两点值得注意.

(1) 在以上分析中, 我们都假设泰勒展开的次数 $d(\gamma_\tau) \geqslant 0$, 在小于 0 时需做一些特殊分析, 结果也对. 比如对于 8.4.2 第 1 小节 ($\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$) 情形当 $d(\gamma_\tau) < 0$ 有

$$\deg_t(1-t^d) Y_{\gamma_\tau} = \deg_t Y_{\gamma_\tau} \leqslant \deg_{tq} Y_{\gamma_\tau} < \deg_{tq} Y_{\gamma_\tau} - d.$$

第二步是由于对于 8.4.2 第 1 小节 ($\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$) 情形, 分母 B_1 中 $\deg_{tq} C_{ab\sigma} = 2 = \deg_t C_{ab\sigma}$, 而 B_2 只是 t 的多项式.

第三步是因为 $-d > 0$.

对其余情形, 由于 $t^d Y_{\gamma_\tau} = 0$, 因而当 $f_{\gamma_\tau} = -t^{\gamma_\tau}$ 时, 给出 $Y_\gamma = 0$, 这种项对 R_Γ 无贡献.

(2) 最后, 我们考察初始条件. 当 γ_τ 不包含 $U(\gamma)$ 的其他元素时有 (这时 $\bar{\gamma_\tau} = \gamma_\tau$)

$$Y_{\gamma_\tau} = I_{\gamma_\tau}.$$

因而, 当 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$ 时, 由 (8.4.20) 式的推导总有

$$\deg_{tq} Y_{\gamma_\tau} \leqslant d(\gamma_\tau) - M(\gamma_\tau), \tag{8.4.73}$$

(8.4.21) 式的初始归纳假设成立.

然而, 当 $\gamma_\tau \in \mathscr{W}(U)$ 时, Y_{γ_τ} 的 t 幂次为

$$\deg_t Y_{\gamma_\tau} = 0 = -M(\gamma_\tau), \tag{8.4.74}$$

而不是 $< -M(\gamma_\tau)$. 所以初始条件我们只有 $\deg_t Y_{\gamma_\tau} \leqslant -M(\gamma_\tau)$, 而不是 (8.4.22) 式. 这一点在推导 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$ 满足 (8.4.21) 式时是没有问题的 (见 (8.4.46) 式推导). 然而关于 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$ 的推导就不行了. γ 满足 (8.4.22) 式就必须至少有一个

$\gamma_\tau \in \mathscr{B}(U)$, 即 $\gamma_\tau \notin \mathscr{W}(U)$ 或者 $\gamma_\tau \in \mathscr{W}(U)$ 且满足 (8.4.22) 式. 归根结底, 要求 γ 中有相对于 T 面是变量的线元.

这在 $\Gamma = \gamma$ 时总是正确的, 因为这时

$$M(\Gamma) = \dim T > 0, \tag{8.4.75}$$

所以, 当 $\Gamma \in \mathscr{W}(U))$ 时总有

$$\deg_t Y_\Gamma < -M(\Gamma). \tag{8.4.76}$$

现在我们推导 Zimmermann 定理, 我们有

$$R_\Gamma = \sum_{U=C\in\mathscr{C}} (1 - t^{d(\Gamma)}) Y_\Gamma(U), \quad U = C \in \mathscr{C}. \tag{8.4.77}$$

(1) 当 $\Gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 则有

$$\deg_{tq} Y_\Gamma \leqslant d(\Gamma) - M(\Gamma).$$

由命题 10 得

$$\deg_t (1 - t^\Gamma) Y_\Gamma < \deg_{tq} Y_\Gamma - d(\Gamma) = -M(\Gamma) \tag{8.4.78}$$

(2) 当 $\Gamma \in \mathscr{W}(U)$, 则有

$$\deg_t Y_\Gamma < -M(\Gamma).$$

另一方面, 由于命题 9 中 (8.4.43) 式给出

$$\deg_t (-t^{d(\Gamma)} Y_\Gamma) \leqslant \deg_t Y_\Gamma < -M(\Gamma),$$

因此, 也有

$$\deg_t (1 - t^{d(\Gamma)}) Y_\Gamma < -M(\Gamma). \tag{8.4.79}$$

从而证明了如下定理.

定理：对任何积分参量空间的超平面 T, 费恩曼被积函数的有限部分满足

$$\deg_t R_\Gamma < -M(\Gamma) = -\dim T. \tag{8.4.80}$$

这就是 Zimmermann 定理.

注意：当由于重整化点的选取不同, 可能会使某个 γ_τ 的抵消项 Q_{γ_τ} 产生一个改变 ΔQ_{γ_τ},

$$Q'_{\gamma_\tau} = \Delta Q_{\gamma_\tau} + Q_{\gamma_\tau} \tag{8.4.81}$$

这在所有的以 γ_τ 为极大元素的 γ 的 Y_γ 产生一个改变

$$\begin{aligned} f_{\gamma_\tau} Y_{\gamma_\tau} &\to \Delta Q_{\gamma_\tau} + f_{\gamma_z} Y_{\gamma_z}, \\ \Delta Y_\gamma &= I_{\gamma/\gamma_1,\cdots,\gamma_c} S_\gamma \prod_{\tau=1}^{c} \Delta Q_{\gamma_\tau} \end{aligned} \tag{8.4.82}$$

从而导致一切包含 γ_τ 的完备林 C(这样的 C 可能不止一个！) 的 $Y_\Gamma(C)$ 产生一个改变, 如果重整化条件的选择使 ΔQ_{γ_τ} 在一切包含 γ_τ 的 γ 的后继运算 (比如求 $-t^{d(\gamma)}$) 中与 Q_{γ_τ} 相同, 就会使 (8.3.31) 式以及后继的 f_γ 不变. 由于 (8.3.31) 式Y_γ 对各个 Y_{γ_τ} 是线性依赖的, 因此求 $Y_\Gamma(C)$ 相应于 ΔQ_{γ_τ} 的依赖关系只需把它当做 $f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}$ 来处理就可以了. 根据本节的推导, 有关系的只是 $f_{\gamma_\tau}Y_{\gamma_\tau}$ 的 t 幂次或者 tq 幂次.

(1) 当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$, 我们有 $\deg_q \Delta Q_{\gamma_\tau} = d(\gamma_\tau)$①, 当 ΔQ_{γ_τ} 在 k 空间的相应积分有限时, 必须要有：对任何 T, $\deg_t \Delta Q_{\gamma_\tau} < -M(\gamma_\tau)$, 除非 $M(\gamma_\tau) = 0$. 因此满足

$$\deg_{tq} \Delta Q_{\gamma_\tau} \leqslant d(\gamma_\tau) - M(\gamma_\tau). \tag{8.4.83}$$

由于 (8.4.41) 式上面一段所说的理由, S_γ 不增加 ΔQ_{γ_τ} 的 tq 幂次,

$$\deg_{tq} S_\gamma \Delta Q_{\gamma_\tau} \leqslant d(\gamma_\tau) - M(\gamma_\tau), \tag{8.4.84}$$

因此, 相当于 (8.4.26) 式的式子成立. 我们可以导出, 当 $\gamma \notin \mathscr{W}(U)$ 时, 有

$$\deg_{tq} \Delta Y_\gamma \leqslant d(\gamma) - M(\gamma). \tag{8.4.85}$$

(2) 当 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, 当 ΔQ_{γ_τ} 在 k 空间的相应积分有限时, 必须有 $\deg_t \Delta Q_{\gamma_\tau} < -M(\gamma_\tau)$, 又由于 $\gamma \in \mathscr{W}(U)$, U 是完备林, 因此 $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_1, \cdots, \gamma_c$ 上的线元都是常量, 所以有

$$\deg_t S_\gamma \Delta Q_{\gamma_\tau} = \deg_t \Delta Q_{\gamma_\tau} < -M(\gamma_\tau), \tag{8.4.86}$$

符合 (8.4.51) 式的要求. 由 (8.4.82) 式得到

$$\deg_t \Delta Y_\gamma = O + \sum_\tau \deg_t S_\gamma \Delta Q_{\gamma_\tau} < -\sum_\tau M(\gamma_\tau) = -M(\bar{\gamma}) - \sum_\tau M(\gamma_\tau) \leqslant -M(\gamma),$$

最后一步是由于 (8.4.13) 式. 因此不管 γ 是否属于 $\mathscr{W}(U)$, 都可以完成归纳法的推导. 我们还需考虑当 $M(\gamma_\tau) = 0$ 的情形. 这时由 ΔQ_{γ_τ} 在 k 空间可积不能给出 $\deg_t \Delta Q_{\gamma_\tau} < -M(\gamma_\tau)$, 而是 $\deg_t \Delta Q_{\gamma_\tau} = -M(\gamma_\tau)$. 正如前面关于初始条件的分析一样, 我们只需考虑 γ_τ 在 $U = C$ 中的上级正规图全是 $\mathscr{W}(U)$ 的元素的情形.

当 γ_τ 的上级元素全属于 $\mathscr{W}(U)$ 的时候, $\Delta Y_\Gamma(C)$ 就与 T 平面的参量 t 无关, 因此 ΔR_Γ 不是 t 的函数, 不存在 T 平面的发散问题.

总而言之, 只要 ΔQ_{γ_τ} 的在 k 空间的相应积分值有限, 就可以保证产生的 ΔR_Γ 符合 Zimmermann 定理的要求.

①这是因为 ΔQ_{γ_τ} 与 Q_{γ_τ} 的 q 幂次应该相同, 而 $Q_{\gamma_\tau = -t^{d(\gamma_\tau)}}\bar{R}_{\gamma_\tau}$, 它的 q 幂次为 $d(\gamma_\tau)$.

附录 8.4A　泰勒展开余项的泰勒展开系数

当 $l \leqslant d$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}(1-t^d)f(q)|_{q=0}\\
=&\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}f(q)|_{q=0}-\left\{\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}\sum_{n\leqslant d}\frac{1}{n!}\sum_{j_1\cdots j_n}q_{j_1}\right.\\
&\left.\cdots q_{j_n}\left(\frac{\partial}{\partial q_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{j_n}}f|_{q=0}\right)\right\}_{q=0}\\
=&\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}f(q)|_{q=0}-\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}\frac{1}{l!}\sum_{j_1\cdots j_l}q_{j_1}\\
&\cdots q_{j_l}\left(\frac{\partial}{\partial q_{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{j_l}}f|_{q=0}\right).
\end{aligned}
\tag{8.4A.1}
$$

由于

$$
\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}\sum_{j_1\cdots j_l}q_{j_1}\cdots q_{j_l}C_{j_1\cdots j_l}=l!C_{i_1\cdots i_l} \tag{8.4A.2}
$$

对于一切与 q 无关的, 对 $j_1\cdots j_l$ 对称的系数 $C_{j_1\cdots j_l}$ 成立①. 所以, 当 $l\leqslant d$ 时

$$
\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial q_{i_l}}(1-t^d)f(q)|_{q=0}=0. \tag{8.4A.3}
$$

8.5　Wick 转动与 R_Γ 的收敛

Zimmermann 定理证明, 对于 k 空间的任何子平面 T, R_Γ 的 T 幂次总是小于 $(-)T$ 平面维数.

这基于一个假设：当线元 L_β 是 T 面上的变量时, 有

$$
\deg_t l_\beta^2=\deg_t(l_{\beta_0}^2-\overrightarrow{l_\beta}^2)=2. \tag{8.5.1}
$$

① 证明：不失一般性, 令 $q_{i_1}\cdots q_{i_l}=q_1^{l_1}q_2^{l_2}\cdots q_k^{l_k}, \sum\limits_{i=1}^{k}l_i=l$, (8.4A.2) 式左边为 $A=\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right)^{l_k}\sum\limits_{j_1\cdots j_l}g_{j_1}\cdots g_{j_l}C_{j_1\cdots j_l}$, 而 $\sum\limits_{j_1\cdots j_l}q_{j_1}\cdots q_{j_l}C_{j_1}\cdots C_{j_l}$ 中有效的项为 $q_{j_1}\cdots q_{j_l}=q_1^{l_1}q_2^{l_2}\cdots q_k^{l_k}$ 的项之和, 一共有 $\frac{l!}{l_1!\cdots l_k!}$ 项, 这个数目就是在 l 个空格中放上 l_1 个 $q_1,\cdots;l_k$ 个 q_k 的不同方式的数目, 由于 $C_{j_1\cdots j_l}$ 对指标对称, 因此这些项都相同. 因此有 $A=\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\right)^{l_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial q_k}\right)^{l_k}\frac{l!}{l_1!\cdots l_k!}q_1^{l_1}q_2^{l_2}\cdots q_k^{l_k}C_{11\cdots22\cdots k\cdots}=l!C_{11\cdots22\cdots k\cdots}=l!C_{i_1i_2\cdots i_l}$.

作为相对于 γ 是 T 平面上的变量的 $l_\beta(\beta=ab\sigma)$, 它的定义是 $k^\gamma_{\beta\mu}$ 中至少有一个 μ, 是 $T=\{t_i\}$ 的一次式. 我们在计算 t 幂次时, 总是对这样的线元 L_β, 认为 $l^2_\beta \doteq C_\beta$ 和 $l^2_{\beta_0}=(k^\gamma_{\beta 0})^2-\vec{k}^{\gamma\,2}_\beta \doteq C_{\beta_0}$ 的 t 幂次为 2. 这在 欧氏空间的实 T 面上是正确的. 但在 闵氏空间, $(l^0_\beta)^2$ 中的 t^2 项可能与 $\vec{l_\beta}^{\,2}$ 中 t^2 项相消导致 (8.5.1) 式不正确而使 R_Γ 分母中的实际 t 幂次降低.

因此, 在 闵氏空间, 对于一般的实参量 t 的 T 面, 计算得到的 R_Γ 的 t 幂次 (称为表观 t 幂次) 可以小于实际的 t 幂次. 不符合应用 Weinberg 定理的前提. 为了得到关于 R_Γ 收敛的结果, 我们还须进行 Wick 转动. Wick 转动的关键是要将 T 面的 t 参量的实质部分的 0 分量取成纯虚.

首先, Zimmermann 将场论公式中费恩曼传播子分母中的 $C_\beta={l^0_\beta}^2-\overrightarrow{l_\beta}^2-\mu^2_\beta+\mathrm{i}\epsilon$ 改为 $C_\beta={l^0_\beta}^2-\overrightarrow{l_\beta}^2-\mu^2_\beta+\mathrm{i}\epsilon(\overrightarrow{l_\beta}^2+\mu^2_\beta)$ 并且建立 $|C_\beta|$ 与 $|C_{\beta E}|=|{l^0_\beta}^2+\overrightarrow{l_\beta}^2+\mu^2_\beta+\mathrm{i}\epsilon(\overrightarrow{l_\beta}^2+\mu^2_\beta)|$ 之间的比值估计. 从而证明了当 ϵ 有限时, R_Γ 的积分绝对收敛. 因此, 在费恩曼参数化下, 对费恩曼参数的积分和对 k 空间的积分可以交换. Zimmermann 用正交变换将分母标准化, 给出来原来费恩曼积分, 证明当 $\epsilon\to 0^+$ 时极限存在, 即 R_Γ 积分收敛. 以下是具体推导.

我们有

$$l^\mu_\alpha = k^{\gamma\mu}_\alpha + q^{\gamma\mu}_\alpha, \qquad \alpha=ab\sigma \tag{8.5.2}$$

$$l^{\gamma\mu}_{\alpha_0} \equiv k^{\gamma\mu}_\alpha = C^\gamma_{\alpha j}k^\mu_j, \tag{8.5.3}$$

$$q^{\gamma\mu}_\alpha = \mathrm{d}^{\;\gamma}_{\alpha s}q^{\gamma\mu}_s, \tag{8.5.4}$$

其中, k^μ_j 是 R_Γ 的积分参量 (见第 8.1 节, (8.1.26) 式、(8.1.27) 式),

$$C^\gamma_{\alpha j}, d^\gamma_{\alpha s} \text{ 与 } \mu \text{ 无关, 而且是实数.} \tag{8.5.5}$$

费恩曼积分的有限部分为 (由 Y_γ 的构成推导出)

$$R_\Gamma=\frac{A}{B_1B_2}. \tag{8.5.6}$$

费恩曼积分为

$$F_\Gamma=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\prod_{i\mu}\frac{\mathrm{d}k^\mu_i}{2\pi}R_\Gamma=\lim_{\epsilon\to 0^+}J_\Gamma(\epsilon). \tag{8.5.7}$$

在 R_Γ 中 $A=\mathscr{P}(q^\mu_a,k^\mu_j)$ 是多项式, 其中

$$B_1=\prod_\alpha C_\alpha, \tag{8.5.8}$$

$$C_\alpha={l^0_\alpha}^2-\overrightarrow{l_\alpha}^2-\mu^2_\alpha+\mathrm{i}\tilde{\epsilon}_\alpha, \tag{8.5.9}$$

$$B_2 = \prod_{\gamma\alpha} (C^{\gamma}_{\alpha_0})^{C(\gamma,\alpha)}, \tag{8.5.10}$$

$$C^{\gamma}_{\alpha_0} = (l^{\gamma 0}_{\alpha_0})^2 - \overrightarrow{l}^{\gamma\ 2}_{\alpha_0} - \mu^2_{\alpha} + i\tilde{\epsilon}^{\gamma}_{\alpha_0}, \tag{8.5.11}$$

$$l^{\gamma}_{\alpha 0} \equiv k^{\gamma}_{\alpha}.$$

我们按 Zimmermann, 令

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha} = \epsilon(\overrightarrow{l_{\alpha}}^2 + \mu^2_{\alpha}), \tilde{\epsilon}^{\gamma}_{\alpha_0} = \epsilon(\overrightarrow{l}^{\gamma\ 2}_{\alpha_0} + \mu^2_{\alpha}) \tag{8.5.12}$$

注意：这个形式比原来费恩曼传播中要求的形式更为苛刻, 但只有这样, 才能在下文中证明积分收敛. 然后将分母 B_1B_2 写成

$$B_1B_2 = \prod_{\beta=1}^{n} C_{\beta}. \tag{8.5.13}$$

在 (8.5.13) 式中, β 遍及 B_1 的 α 和 B_1中 C_{α_0} 的 $C(\gamma,\alpha)$幂次, 比如 $C_{ab\sigma}(C_{a'b'\sigma',0})^2 = C_1C_2C_3$.

由费恩曼参数化得

$$\frac{1}{B_1B_2} = (n-1)! \int \mathrm{d}\,\alpha_1 \cdots \mathrm{d}\,\alpha_n \delta\left(\sum_{\beta} \alpha_{\beta} - 1\right) \frac{1}{\left(\sum\limits_{\beta} \alpha_{\beta} C_{\beta}\right)^n}. \tag{8.5.14}$$

这里由于 δ 函数, α 实际的积分空间 $\sum(\alpha)$ 是 $n-1$ 维. 我们把

$$\int_0^1 \prod_{\beta} \mathrm{d}\,\alpha_{\beta} \delta\left(\sum_{\beta} \alpha_{\beta} - 1\right)$$

写成

$$\int_{\sum(\alpha)} \mathrm{d}\,\alpha. \tag{8.5.15}$$

在费恩曼积分中令 $\prod_{i\mu} \dfrac{\mathrm{d}k^{\mu}_i}{2\pi} \equiv \mathrm{d}k$, 就可以把 J_{Γ} 写成

$$J_{\Gamma}(\epsilon) \equiv \int \mathrm{d}k R_{\Gamma}(\epsilon) = \int \mathrm{d}\,k(n-1)! \int_{\Sigma} \mathrm{d}\,\alpha \frac{A}{\left(\sum\limits_{\beta} \alpha_{\beta} C_{\beta}\right)^n}. \tag{8.5.16}$$

我们可以证明 (附录 8.5A)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\sum\limits_\beta \alpha_\beta({l_\beta^0}^2+\overrightarrow{l_\beta}^2+\mu_\beta^2\pm \mathrm{i}\epsilon(\overrightarrow{l_\beta}^2+\mu_\beta^2))}{\sum\limits_\beta \alpha_\beta({l_\beta^0}^2-\overrightarrow{l_\beta}^2-\mu_\beta^2\pm \mathrm{i}\epsilon(\overrightarrow{l_\beta}^2+\mu_\beta^2))}\right|\\ \equiv\ &\left|\frac{\sum\limits_\beta \alpha_\beta\widetilde{C_\beta}}{\sum\limits_\beta \alpha_\beta C_\beta}\right|\leqslant\frac{\sqrt{1+\epsilon^2}+1}{\epsilon}\equiv g(\epsilon),\end{aligned}\tag{8.5.17}$$

因此, 可以在欧氏空间考虑 R_Γ 的绝对收敛问题. 在欧氏空间, 由于 C_β 中的各个平方项不会相消, 所以 Zimmermann 定理关于 R_Γ 对 T 的幂次估算就是 R_Γ 的真实 t 幂次估值. 由 Weinberg 定理, 下述 k 空间积分绝对收敛：

$$\infty>\int \mathrm{d}k|\tilde{R}_\Gamma(\epsilon)|.\tag{8.5.18}$$

其中, $\tilde{R}_\Gamma(\epsilon)$ 是将 $R_\Gamma(\epsilon)$ 的分母中的 C_β 改为 $\tilde{C_\beta}$ 得到的表达式 (分子不变). 因此有

$$\infty>\int \mathrm{d}k\frac{|A|}{|\prod_\beta \tilde{C_\beta}|}=\int \mathrm{d}k(n-1)!\int_{\sum}\mathrm{d}\alpha\frac{|A|}{|(\sum_\beta \alpha_\beta\tilde{C_\beta})^n|}.$$

由 (8.5.17) 式看出 (8.5.16) 式对 k 和 α 的积分绝对收敛, 因此可以交换积分顺序得到

$$F_\Gamma(\epsilon)=(n-1)!\int_{\sum}\mathrm{d}\alpha\int \mathrm{d}k\frac{A}{(\sum_\beta \alpha_\beta C_\beta)^n}.\tag{8.5.19}$$

我们可以证明, 在一般情况下 (除去一个在 α 的 $n-1$ 维空间 $\sum$ 中的测度为任意小范围 $\sigma_1(\alpha)$ 以外) 可以将 k 空间适当取基底而把 $\sum\limits_\beta \alpha_\beta C_\beta$ 正交化 (附录 8.5B)：

$$\sum_\beta \alpha_\beta C_\beta=\hat{k}^2+\mathrm{i}\epsilon\hat{\vec{k}}^2+C,\tag{8.5.20}$$

其中, $C=F(q_0\alpha)-(1-\mathrm{i}\epsilon)F(\vec{q}\alpha)-(1-\mathrm{i}\epsilon)\sum\limits_\beta \alpha_\beta\mu_\beta^2$. 在 $\sigma_1(\alpha)$ 以外, 我们令

$$J_\Gamma^{(1)}=(n-1)!\int_{\sum(\alpha)\backslash\sigma_1(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\frac{1}{D(\alpha)}\int \mathrm{d}\hat{k}\frac{A}{\left(\sum \hat{k}_j^2+\mathrm{i}\epsilon\sum\hat{\vec{k}}_j^2+C\right)^n},\tag{8.5.21}$$

其中, Jacobi 行列式

$$D(\alpha)=\left|\frac{\partial\hat{k}}{\partial k}\right|$$

在 $\sigma_1(\alpha)$ 外不为 0. 令

$$B=\frac{(n-1)!}{D(\alpha)}\int \mathrm{d}\hat{k}\frac{A}{\left(\sum \hat{k}_j^2+\mathrm{i}\epsilon\sum \hat{\vec{k}}_j^2+C\right)^n}, \tag{8.5.22}$$

得到

$$J_\Gamma^{(1)}=\int_{\sum(\alpha)\backslash\sigma_1(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \quad B. \tag{8.5.23}$$

我们把分子 A 写成 (略去 $\hat{k}$ 上的 $\wedge$ 符号)

$$\bar{A}(kq\alpha)=\sum_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}\left[\prod_{i=0}^{m}\prod_{\mu=0}^{3}(k_{i\mu}^2)^{\nu_{i\mu}}\right]\pi_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}(q\alpha)+k_{i\mu}\text{的奇次项}, \tag{8.5.24}$$

B 变为

$$B=\sum_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}\pi_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}(q\alpha), \tag{8.5.25}$$

$$B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}=\frac{(n-1)!}{D(\alpha)}\int \mathrm{d}k\frac{(k_{10}^2)^{\nu_{10}}\cdots(k_{m3}^2)^{\nu_{m3}}}{\left(\sum k_j^2+\mathrm{i}\epsilon\sum \vec{k}_j^2+C\right)^n}. \tag{8.5.26}$$

(任一 $k_{i\mu}$ 的幂次为奇数时, B 的展开系数为 0) 我们可以把对 k 的积分积出来, 注意分母为 E^n,

$$\begin{aligned}E=&\sum_{j=1}^{m}k_{j0}^2-\sum_{j=1}^{m}\vec{k}_j^2+\mathrm{i}\epsilon\sum_{j=1}^{m}\vec{k}_j^2-(1-\mathrm{i}\epsilon)\sum_{\beta=1}^{n}\alpha_\beta\mu_\beta^2+F(q_0\alpha)-(1-\mathrm{i}\epsilon)F(\vec{q}\alpha)\\ =&\sum_{j=1}^{m}k_{j0}^2-(1-\mathrm{i}\epsilon)\left(\sum_{j=1}^{m}\vec{k}_j^2+\sum_{\beta=1}^{n}\alpha_\beta\mu_\beta^2\right)+F(q_0\alpha)-(1-\mathrm{i}\epsilon)F(\vec{q}\alpha)\\ \equiv&\sum_{j=1}^{m}k_{j0}^2+a.\end{aligned} \tag{8.5.27}$$

其中, 当 $|q|$ 充分小时, a 的相角 $=arg(-1+\mathrm{i}\epsilon)$ 约等于 π, 但小于 π. 由欧氏空间的旋转对称性, 对 D 维空间坐标 x 的收敛积分

$$\int \mathrm{d}^D x f(x^2)x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_{2n}},$$

其中, x^μ 为 x 的 μ 分量, $\mu=1,\cdots,4$, 可以令

$$x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_{2n}}\to\frac{\Gamma(D/2)}{2^n\Gamma(n+D/2)}(g^{\mu_1\mu_2}\cdots g^{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}+\cdots)(x^2)^n, \tag{8.5.28}$$

代入积分得到结果 (附录 8.5D).

我们取 T 平面为 $k_{10}\cdots k_{m0}$ 空间 (超平面). 由于只取 k 的零分量, 不存在分母中 C_β 中 k 的零分量与其他三个分量中 t 的二次幂可能相消的问题. 由 Zimmermann 定理,A 对 t 的幂次即对 k_0 的幂次 ν_A 一定小于 $2n-m$, 其中 $2n$ 是 $\prod_\beta C_\beta$ 的 t 幂次. 这是因为 (8.5.6) 式的分母的 T 幂次为 $2n$, 而 T 平面的维数为 m. 当 $\prod_\beta \alpha_\beta \neq 0$ 时, $2n$ 也就是 $(\sum\limits_\beta \alpha_\beta C_\beta)^n$ 的 t 幂次. 令 $\prod_\beta \alpha_\beta = 0$ 的区域为 $\sigma_2(\alpha)$.

现在分析对 $B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}$ 的积分. 由于 (8.5.22) 式中的分子 A 是多项式, 它各项的 t 幂次也应该不大于 A 的 t 幂次, 所以 $B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}$ 的 t 的幂次一定小于零, 也就是分子 k_{j0} 的总幂次 $(l_0=\sum\limits_{j=1}^m 2\nu_{j0})$ 加上积分的幂次 m 等于 $2\nu_0+m$ 一定小于 $2n$. 我们就可以先完成对 $k_{10}\cdots k_{m0}$ 的积分, 然后再进行对 $\vec{k}$ 空间, 即 $\vec{k}_j$ 的积分. 对 $\vec{k}_{j0}$ 的积分可以认为是在 $3m$ 维欧氏空间进行的. 由于 (8.5.27) 式中 a 的相角接近但小于 π, 对于 k_{j0} 的积分可用附录 8.5D 中 (8.5D.31) 式给出结果：

$$
\begin{aligned}
B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}} =& \pi^{m/2}\frac{\Gamma(n-\frac{m}{2}-\nu_0)}{\Gamma(n)}\frac{(n-1)!}{D(\alpha)}\frac{1}{2^{\nu_0}}[\nu_{10}]\cdots[\nu_{m0}] \\
&\times\int \mathrm{d}\vec{k}\frac{(k_{11}^2)^{\nu_{11}}\cdots(k_{m3}^2)^{\nu_{m3}}}{\left[-(1-\mathrm{i}\epsilon)(\sum\limits_{j=1}^m \vec{k}_j^2+\sum\limits_{\beta=1}^n \alpha_\beta\mu_\beta^2+F(\vec{q}\alpha))+F(q_0\alpha)\right]^{n-\frac{m}{2}-\nu_0}} \\
=& \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(1-\epsilon')(n-\frac{m}{2}-\nu_0)}\times\pi^{m/2}\cdots[\nu_{m0}] \\
&\times\int \mathrm{d}\vec{k}\frac{(k_{11}^2)^{\nu_{11}}\cdots(k_{m3}^2)^{\nu_{m3}}}{\left[\sum\limits_{j=1}^m \vec{k}_j^2+\sum\limits_{\beta=1}^n \alpha_\beta\mu_\beta^2+F(\vec{q}\alpha)-(1-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}F(q_0\alpha)\right]^{n-\frac{m}{2}-\nu_0}}.
\end{aligned}
\tag{8.5.29}
$$

当 $|q|$ 充分小时, 分母的相角趋近于零, 用 (8.5D.30) 式进行对 $\vec{k}$ 的积分给出 (略去 ϵ')

$$
\begin{aligned}
B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}} =& (-1)^{n-\nu_0}\mathrm{i}^m\pi^{m/2}\frac{\Gamma(n-\frac{m}{2}-\nu_0)}{D(\alpha)}\frac{1}{2^{\nu_0}}[\nu_{10}]\cdots[\nu_{m0}] \\
&\times\pi^{3m/2}\frac{\Gamma(n-2m-\nu)}{\Gamma(n-\frac{m}{2}-\nu_0)}\frac{1}{2^{\nu-\nu_0}}[\nu_{11}]\cdots[\nu_{m3}]\times\frac{1}{C_1^{n-2m-\nu}} \\
=& (-1)^{n-\nu_0}\mathrm{i}^m\pi^{2m}\frac{(n-2m-\nu-1)!}{D(\alpha)}\frac{1}{2^\nu}[\nu_{10}]\cdots[\nu_{m3}]\times\frac{1}{C_1^{n-2m-\nu}}
\end{aligned}
\tag{8.5.30}
$$

其中, (8.5.29) 式第二个等式要求

$$
\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^m k_j^2+\sum_{\beta=1}^n \alpha_\beta\mu_\beta^2+F(\vec{q}\alpha)-(1-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}F(q_0\alpha)\right\}>0. \tag{8.5.31}
$$

第三个等号要求 $\mathrm{Re}C_1 > 0$, 其中

$$C_1 = -(1-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}C = \sum_\beta \alpha_\beta \mu_\beta^2 + F(\vec{q}\alpha) - (1-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}F(q_0\alpha) > 0. \tag{8.5.32}$$

在 (8.5.29) 式与 (8.5.30) 式中定义了

$$\begin{aligned}
&\nu = \sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{3}\nu_{\beta\mu},\\
&\nu_0 = \sum_{\beta=1}^{n}\nu_{\beta 0},\\
&[N] = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2N-1),\\
&[0] = 1.
\end{aligned} \tag{8.5.33}$$

注意：如果在 C 中让 $F(q_0\alpha)$ 变为 $F(iq_4\alpha) = -F(q_4\alpha)$($F$ 是 q 的二次式). $B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}$ 的表达式正好是将 (8.5.26) 式中所有闵氏空间零分量变为 i× 欧氏空间第四分量的结果. 我们也称之为 Wick 转动. 到现在为止, 我们确定在 $\{\alpha_\beta\}\in\sum(\alpha)\setminus\sigma_1(\alpha)\cup\sigma_2(\alpha)$ 的区域 $B_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}(\alpha)$ 可以用 (8.5.30) 式表达. 在 (8.5.25) 式中 $\pi_{\nu_{10}\cdots\nu_{m3}}$ 是 $\{q_\beta\}$ 的多项式 (这可以从 (8.5.24) 式看出), 它对 α 的依赖关系比较复杂. 我们把 (8.5.25) 式通分, 并收集通分后分子中 q_β 的相同单项式, 就可以把 $B(q\mu\alpha\epsilon)$ 写成

$$B(q\mu\alpha\epsilon) = \sum_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3},\nu} N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha)\frac{\epsilon^\nu q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}}}{C_1^{n-2m}}\quad . \tag{8.5.34}$$

我们得到如下的对 α 绝对收敛的积分：

$$\begin{aligned}
J_\Gamma(\epsilon) &= \lim_{\sigma_1,\sigma_2\to 0}\int_{\sum\setminus\sigma_1(\alpha)\bigcup\sigma_2(\alpha)}\mathrm{d}\alpha B(q\mu\alpha\epsilon) = \int_{\sum}\mathrm{d}\alpha B(q\mu\alpha\epsilon)\\
&= \int_{\sum}\mathrm{d}\alpha\sum_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}\nu}N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha)\frac{\epsilon^\nu q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}}}{C_1^{n-2m}(q\mu\alpha\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{8.5.35}$$

第二个等号是因为 $\sigma_1(\alpha)\bigcup\sigma_2(\alpha)$ 的积分区可以任意小, 而该积分为绝对收敛. 由于当 q 充分小的时候, 对任何 $\alpha\in\sum(\alpha)$ 有 $|C_1|\geqslant M_2>0$(当所有 $\mu_\beta\neq 0$), 这是因为 F 是 q 的二次式, 所以 $B(q\mu\alpha\epsilon)$ 的绝对可积等价于

$$I(q\mu\epsilon) = \int\mathrm{d}\alpha\sum_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}\nu}N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha)\epsilon^\nu q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}} \tag{8.5.36}$$

的绝对可积. 由于被积函数是 q 的多项式, 可以证明 (附录 8.5C) 这又等价于各个

$$I_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}\nu}(q\mu\epsilon) = \int\mathrm{d}\alpha N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha) \tag{8.5.37}$$

的绝对可积. 因此, 我们可以交换在 (8.5.35) 式中的积分与求和次序, 得知

$$
\begin{aligned}
I(q\mu) &= \lim_{\epsilon\to 0^+} J_\Gamma(\epsilon) \\
&= \sum_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}\nu} \int \mathrm{d}\alpha N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha) \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon^\nu q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}}}{C_1^{n-2m}(q\mu\alpha\epsilon)}
\end{aligned}
\tag{8.5.38}
$$

存在, 是有限的.

注意 (8.5.30) 式等价于将一切 (8.5.26) 式中的零分量的量 $k_{j0}, dk_{j0}, q_0, \cdots$ 都改变 ik_{j4}, dik_{j4}, iq_4, 我们也称之为进行 Wick 转动, 然后在欧氏空间积分的结果. 因为 $d^mk_0 \to i^md^mk_4$, 给出因子 i^m, $E \to -E_{欧空}$ 给出因子 $(-1)^n$, $\prod_j (k_{j0}^2)^{\nu_{j0}} = (-1)^{\nu_0}\prod_j k_{j4}^2$ 给出因子 $(-1)^{\nu_0}$, 合起来正好是因子 $(-1)^{n-\nu_0}i^m$. 所以, 如果让 (8.5.25) 式中的 q_0 也改变为 iq_4, 则 J_Γ 就等于把所有闵氏空间的零分量作 Wick 转动变为欧氏空间之后在欧氏空间对 k 积分的结果. 闵氏空间的结果可由对欧氏空间输入做解析延拓得到, 欧氏空间积分的绝对收敛由 Zimmermann 定理的建立过程可以得到, 只是要求 k_j 空间的零分量取纯虚数 (仍然是四个实参量).

定理 8　当取 Zimmermann　ϵ 参数化后, $R_\Gamma(\epsilon)$ 的积分收敛. 当 $\epsilon_\alpha \to 0^+$ 有极限, 且此极限等于 $R_\Gamma(E)|_{\epsilon=0}$ 在 欧氏空间的积分 (至少在 $|q_a|$ 充分小时) 的解析延拓.

附录 8.5A　C_α 和 $\widetilde{C}$ 的绝对值之比

令 $\chi \geqslant 0$, 并定义

$$
\begin{aligned}
z &= \left|\frac{\chi+1\pm \mathrm{i}\epsilon}{\chi-1\pm \mathrm{i}\epsilon}\right|^2 \\
&= \frac{\chi^2+2\chi+1+\epsilon^2}{\chi^2-2\chi+1+\epsilon^2},
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\chi} &= \frac{(2\chi+2)(\chi^2-2\chi+1+\epsilon^2)-(2\chi-2)(\chi^2+2\chi+1+\epsilon^2)}{(\chi^2-2\chi+1+\epsilon^2)^2} \\
&= \frac{4(-\chi^2+1+\epsilon^2)}{(\chi^2-2\chi+1+\epsilon^2)^2},
\end{aligned}
$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\chi} > 0, \quad \chi < \sqrt{1+\epsilon^2};$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\chi} = 0, \quad \chi = \sqrt{1+\epsilon^2};$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\chi} < 0, \quad \chi > \sqrt{1+\epsilon^2}.$$

由此可见, z 有极大值在 $\chi = \sqrt{1+\epsilon^2}$ 处:

$$z \leqslant \frac{1+\epsilon^2+2\sqrt{1+\epsilon^2}+1+\epsilon^2}{1+\epsilon^2-2\sqrt{1+\epsilon^2}+1+\epsilon^2} = \frac{\sqrt{1+\epsilon^2}+1}{\sqrt{1+\epsilon^2}-1} = \frac{(\sqrt{1+\epsilon^2}+1)^2}{\epsilon^2},$$

由此可以推出

$$\left|\frac{\chi+1+\mathrm{i}\epsilon}{\chi-1+\mathrm{i}\epsilon}\right| \leqslant \frac{\sqrt{1+\epsilon^2}+1}{\epsilon},$$

最后我们得到

$$\left|\frac{\sum\limits_{\alpha}\beta_\alpha(l_\alpha^{0\,2}+\vec{l}_\alpha^{\,2}+\mu_\alpha^2\pm\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_\alpha^{\,2}\pm\mu_\alpha^2))}{\sum\limits_{\alpha}\beta_\alpha(l_\alpha^{0\,2}-\vec{l}_\alpha^{\,2}-\mu_\alpha^2\pm\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_\alpha^{\,2}+\mu_\alpha^2))}\right| \leqslant \frac{\sqrt{1+\epsilon^2}+1}{\epsilon}(\pm\text{号及}\epsilon\text{与}\alpha\text{无关}).$$

附录 8.5B 正交化手续

1. 正交化的手续如下

令与 C_β 相关的 l_β 为 $l = a_{i\beta}k_i + q_\beta$, 其中 $i = 1, \cdots, m, \beta = 1, \cdots, n$. q_β 是输入 $\{q_\alpha\}$ 的线性叠加.

定义 $A_\mu = \sum\limits_\beta \alpha_\beta l_{\beta\mu}^2$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. 以下推导我们略去 μ 指标, 由 (8.5.5) 式, 系数 $a_{i\beta}$ 为与 μ 无关的实数. 因此, A 可以写成

$$A = \sum_\beta \alpha_\beta(a_{i\beta}a_{j\beta}k_ik_j + 2a_{i\beta}k_iq_\beta + q_\beta^2) \geqslant 0, \tag{8.5B.1}$$

对于 k 是实对称非负定的. A 的极值点满足

$$\frac{\partial A}{\partial k_i} = 0 = \sum_\beta \alpha_\beta(2a_{i\beta}a_{j\beta}k_j + 2a_{i\beta}q_\beta). \tag{8.5B.2}$$

定义 $M_{ij} = \sum\limits_\beta \alpha_\beta a_{i\beta}a_{j\beta}$, $p_i = -\sum\limits_\beta \alpha_{i\beta}q_\beta$, 极值点方程为

$$M_{ij}(\alpha)k_j = p_i(\alpha), \tag{8.5B.3}$$

方程的根为

$$k_i^0 = \frac{\det M_i'}{\det M}, \tag{8.5B.4}$$

其中, M_i' 是将 M 中第 i 列矩阵元换成 p 的各分量得到的矩阵. 代入 A 的表达式, 得到其极值为

$$A^0 = F(q\alpha) = \alpha_\beta(a_{i\beta}a_{j\beta}k_i^0 k_j^0 + 2a_{i\beta}k_i^0 q_\beta + q_\beta^2), \tag{8.5B.5}$$

是 α_β 的有理式, 是 q 的二次式.

一般地, A 为

$$A(k,q,\alpha) = M_{jl}(\alpha)k_j'k_l' + F(q\alpha) = \vec{k'}^t M\vec{k'} + F(q\alpha), \tag{8.5B.6}$$

其中, $k_l' = k_l - k_l^0$. 当 q 为 0 时一定有 $A \geqslant 0$, 因此 M 的本征值大于或等于 0. 另一方面, M 是实对称矩阵, 因而是实的厄米矩阵, 所以它的本征矢量可以用实的正交归一的矢量, 并形成完备集合. 令其为 $\psi_l, l = 1, \cdots, m$. 它们满足

$$M_{ij}\psi_{jl} = \lambda_l\psi_{il}, \text{即} M\psi_l = \lambda_l\psi_l, \text{此式对 } l \text{ 不求和} \tag{8.5B.7}$$

以及

$$\psi_{il}\psi_{ij} = \delta_{jl}. \tag{8.5B.8}$$

令矩阵 ψ 的矩阵元为 ψ_{il}, 有 $\psi^t\psi = \psi\psi^t = I$, 我们得到

$$\psi_{ij}^t M_{jk}\psi_{kl} = \psi_{ji}\lambda_l\psi_{jl} = \delta_{il}\lambda_l, \tag{8.5B.9}$$

对 l 不求和. 所以作为矩阵 $\psi^t M\psi = \Lambda$ 是以 λ_l 为对角元的对角矩阵, 得到

$$\begin{aligned} A_\mu &= \vec{k'}^t_\mu M\vec{k'}_\mu + F(q_\mu\alpha) \\ &= \vec{k'}^t_\mu \psi\psi^t M\psi\psi^t\vec{k'}_\mu + F(q_\mu\alpha) \\ &= (\vec{k'}^t_\mu\psi)\Lambda(\psi^t\vec{k'}_\mu) + F(q_\mu\alpha) \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_j\tilde{k}_{j\mu}^2 + F(q_\mu\alpha), \end{aligned}$$

$$\tilde{k}_{j\mu} = \psi_{jl}^t k_{l\mu}', \tag{8.5B.10}$$

给出

$$\sum_\beta \alpha_\beta C_\beta = \sum_{j=1}^m \lambda_j\left(\tilde{k}_j^2 + \mathrm{i}\epsilon\sum_{j=1}^m \tilde{\vec{k}}_j^2\right) + C, \tag{8.5B.11}$$

$$C = F(q_0\alpha) - (1-\mathrm{i}\epsilon)F(\vec{q},\alpha) - (1-\mathrm{i}\epsilon)\sum_{\beta=1}^{n}\alpha_\beta\mu_\beta^2, \tag{8.5B.12}$$

$$F(\vec{q},\alpha) = \sum_{j=1}^{3}F(q_j,\alpha).$$

再令 $\sqrt{\lambda_j}\tilde{k}_j = k_j''$, 就得到

$$A = \sum_{j=1}^{m}k_j''^2 + F(q\alpha), \tag{8.5B.13}$$

当所有的 $k_i = 0$ 时有 $l_\beta^2 = q_\beta^2, A = \sum_\beta \alpha_\beta q_\beta^2 \leqslant \sum_\beta q_\beta^2$.

由 $A \geqslant A^0 = F(q\alpha)$ 推断

$$\sum_\beta |q_\beta^2| \geqslant |F(q\alpha)|, \tag{8.5B.14}$$

因此, 当所有的 $\mu_\beta > 0$ 且 $\sum|q_\beta^2|$ 充分小时, $C = (-1+\mathrm{i}\epsilon)[\sum_\beta \alpha_\beta\mu_\beta^2 + F(\vec{q},\alpha) - (1-\mathrm{i}\epsilon)^{-1}F(q_0\alpha)]$ 的绝对值 $|C| > M_2 > 0$, 这个关系在 q_β 取复数范围时也对.

2. 关于解析性

我们知道当 $\sum|q_\beta|^2 < M_q$ 时在 $\sum(\alpha)$ 内 $|C| > M_2 > 0$, M_2 与 α 无关. 由此可以证明当 $|q_\beta|^2 < \frac{1}{n}M_q$ 时 (一切 β) 函数

$$\frac{1}{C^{n-2m}}q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}} = f(q_{\beta\mu}), \quad C = C(q\alpha\epsilon), \tag{8.5B.15}$$

作为某一个 $q_{\beta\mu}$ 的解析函数 f 有如下性质. 我们可以找到与 α 无关的 ξ 使

$$\frac{f(q+\delta)-f(q)}{\delta} - f'(q) = \varphi(\delta\alpha), \quad |\varphi(\delta\alpha)| < \xi, \tag{8.5B.16}$$

且当 $\delta \to 0$ 时 $\xi \to 0$. 我们由附录 8.5C 可以证明

$$\int_{\sum}\mathrm{d}\alpha N_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}^{(\nu)}(\mu\alpha) \tag{8.5B.17}$$

绝对可积. 考虑下式当 $\delta \to 0$ 时的行为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\delta}\{\int_{\sum(\alpha)}\mathrm{d}\alpha N_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}^{(\nu)}(\mu\alpha)\epsilon^\nu f(q+\delta) - \int_{\sum(\alpha)}\mathrm{d}\alpha N_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}^{(\nu)}(\mu\alpha)\epsilon^\nu f(q)\}\\ =&\int_{\sum(\alpha)}\mathrm{d}\alpha N_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}^{(\nu)}(\mu\alpha)\epsilon^\nu f'(q) + \int_{\sum(\alpha)}\mathrm{d}\alpha N_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}^{(\nu)}(\mu\alpha)\epsilon^\nu\varphi(\delta\alpha).\end{aligned} \tag{8.5B.18}$$

由于

$$f'(q) = (2m-n)\frac{C'(q)}{C^{n-2m+1}}q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}} + \frac{1}{C^{n-2m}}\frac{\partial}{\partial q_{\beta\mu}}(q_{10}^{\nu_{10}}\cdots q_{n3}^{\nu_{n3}}) \tag{8.5B.19}$$

在 $\sum(\alpha)$ 中有界, 又因 $N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha)$ 绝对可积, 所以 (8.5B.18) 式右边第一项绝对可积, 右边第二项当 $\delta\to 0$ 时也趋于零. 因此作为 $q_{\beta\mu}$ 的函数 $\int_{\sum(\alpha)}\mathrm{d}\alpha N^{(\nu)}_{\nu_{10}\cdots\nu_{n3}}(\mu\alpha)\epsilon^{\nu}$ $f(q)$ 是 q 的解析函数, 因为 (8.5B.18) 式当 $\delta\to 0$ 时有极限.

附录 8.5C　多项式系数的绝对收敛性质

为了分析多项式

$$\sum_i N_{i_1\cdots i_k}(\alpha)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k} = F(\alpha,x) \tag{8.5C.1}$$

对 α 的积分绝对收敛

$$\infty > \int_{\sum}\mathrm{d}\alpha F(\alpha,x),$$

对一切 x 都成立时, $N_{i_1\cdots i_k}(\alpha)$ 对 α 积分的绝对收敛问题, 我们先考虑只有一个变元 x 的情形. 当 (8.5C.1) 式绝对收敛, 且当 C_j 与 α 无关时,

$$F' = \sum_j C_j F(\alpha, x^j) \tag{8.5C.2}$$

(其中, $x^j = x+\delta^j$, C_j 可以是 x 的多项式) 也是绝对收敛的. 因为

$$|\sum_j C_j F(\alpha,x^j)| \leqslant \sum_j |C_j||F(\alpha,x^j)|, \tag{8.5C.3}$$

而 $F(\alpha,x)$ 对 α 绝对可积就意味着 $F(\alpha,x^j)$ 也是如此.

(1) 令 $\Delta f(x) = f(x+1)-f(x)$, 则 $\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g$, 我们有

$$\begin{aligned}&\Delta^m x^n = 0, \quad 当\ m>n\ 时成立,\\ &\Delta^n x^n = n!, \quad 当\ n\geqslant 1\ 时成立.\end{aligned} \tag{8.5C.4}$$

证明：当 $n=0,1$ 时上式成立, 如果当 $n=m$ 时 (8.5C.4) 式成立, 考虑

$$
\begin{aligned}
\Delta^{m+1}g &= \Delta^m(\Delta g) = \Delta(\Delta^m g), \\
\Delta^{m+1}x^m &= \Delta\Delta^m x^m = \Delta m! = 0, \\
\Delta^{m+1}x^{m+1} &= \Delta^m[\Delta(xx^m)] \\
&= \Delta^m[(x+1)(x+1)^m - xx^m] \\
&= \Delta^m[x^{m+1} + (m+1)x^m + \cdots - x^{m+1}] \\
&= \Delta^m[(m+1)x^m + \frac{(m+1)m}{2}x^{m-1} + \cdots] \\
&= (m+1)\Delta^m x^m + 0 = (m+1)m! = (m+1)!\,.
\end{aligned}
$$

因此, 当 $n=m+1$ 时 (8.5C.4) 式也成立. □

(2) 令 $f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$, 有 $\Delta^n f_n = n! a_n$, $\dfrac{x^n}{n!}\Delta^n f_n(x) = a_n x^n$,因此当 $f_n(x)$ 对 α 的积分绝对收敛时 $a_n x^n$ 也如此, 因为 $\Delta^n f$ 及其线性组合是 (8.5C.2) 式的形式. 由 $f_n(x) - \dfrac{x^n}{n!}\Delta^n f_n(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$, 我们可以由此得到 $f_n(x)$ 的各项, 从而证明各项系数也对 α 的积分绝对收敛, 即 $a_n, a_{n-1}, \cdots$ 都对 α 的积分绝对收敛.

(3) 因此, 当 $a_n, a_{n-1}, \cdots$ 是 y 的多项式时, 这些多项式各项系数也对 α 的积分绝对收敛.

(4) 因此, 当 f 是 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的多项式时, 各项系数对 α 的积分也绝对收敛.

附录 8.5D　一些公式的推导

(1) 关于 γ 矩阵乘积的求迹公式

$$
\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu 2N}\} = 4\sum_p (-1)^p \prod_{\text{配对}} g_{\mu_i\mu_j}, \tag{8.5D.1}
$$

求和遍及所有的 $\mu_1 \cdots \mu_{2N}$ 的不同配对方式. 为避免在排列 p 中有重复的配对方式, 对排列作如下规定：对 $1, \cdots, 2N$ 的排列 $p_1, p_2, \cdots, p_{2N}$, 要求 $p_1 < p_2, p_3 < p_4, \cdots$ 而且 $p_1 < p_3 < p_5 < \cdots < p_{2N-1}$. 然后将 μ_{p1} 与 μ_{p2} 配对, μ_{p3} 与 μ_{p4} 配对, …… 这样, 上述每一种符合要求的排列就给出所有不同的配对方式, 它们的总数为

$$
(2N)!/N!2^N = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2N-1) \equiv (2N-1)!! \equiv [N].
$$

(8.5D.1) 式中的 $(-1)^p$ 是相关排列的宇称：奇排列为 -1, 偶排列为 $+1$.

我们有

$$
\mathrm{tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu}.
$$

由于对 $(1,\cdots,2N)=(12)$ 只有一种排列方式符合要求. 因此当 $N=1$ 时, 公式 (8.5D.1) 是正确的. 假设当 $N\leqslant M-1$ 时公式 (8.5D.1) 正确, 考虑 $N=M$ 的情形. 我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}\\=&\mathrm{tr}\{(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}+\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1})\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}-\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}\\=&2g_{\mu\nu}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}-\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}.\end{aligned}\tag{8.5D.2}$$

我们接着用同样的方法把 γ_{μ_1} 在 $-\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}$ 中向后挪动, 一直挪到 $\gamma_{\mu_{2M}}$ 之后, 给出

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}=&2g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}-2g_{\mu_1\mu_3}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}\\&+2g_{\mu_1\mu_4}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}-\cdots\\&+2g_{\mu_1\mu_{2M}}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\}\\&-\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\gamma_{\mu_1}\}.\end{aligned}\tag{8.5D.3}$$

由于最后一项 $=-\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_1}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}$, 所以得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}=&g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}-g_{\mu_1\mu_3}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}\\&+g_{\mu_1\mu_4}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_5}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}-\cdots+g_{\mu_1\mu_{2M}}\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_{2M-1}}\}.\end{aligned}\tag{8.5D.4}$$

按照前面选取 p 的规则, p_1 一定等于 1, 因为它比一切其余 $p_2,p_3,\cdots$ 都小. 另一方面, p_2 可以等于 $2,3,\cdots,2M$ 的任一数. 余下的 $2M-2$ 个数字按前面的规则给出 $2M-2$ 个数字的所有配对方式. 因此, 如果 $2N=2M-2$ 时, (8.5D.1) 式正确, 则当 $2N=2M$ 时也正确.

理由如下: 考虑比如 (8.5D.1) 式右边以 $g_{\mu_1\mu_l}$ 为系数的项 $f_{\mu_1\mu_l}$, 这一项对应的排列要求 $p(1)=1,p(2)=l$. 余下的 $p(3)\cdots p(2M)$ 分别为 $2,3,4,\cdots,l-1,l+1,\cdots 2M$ 中的一种合格的 (即 $p(3)<p(5)\cdots<p(2M-1),p(3)<p(4),p(5)<p(6),\cdots,p(2M-1)<p(2M)$) 排列. 我们把这将 $1,\cdots,2N$ 排成 $p(1),\cdots,p(2N)$ 的排列分为三步：①交换 2 和 l 变为 $(1,l,3,\cdots,l-1,2,l+1,\cdots,2N)$；②将 2 从第 l 个位置换到第 3 个位置变为 $(1,l,2,3,\cdots,l-1,l+1,\cdots,2N)$；③将后面 $2M-2$ 个数字即 $2,3,4,\cdots,l-1,l+1,\cdots,2M$ 换到 $p(3),\cdots,p(2M)$ 的位置. 因此, 总的宇称为 $(-1)^p=(-1)^{p_1}\cdot(-1)^{p_2}\cdot(-1)^{p_3}$, 其中 $(-1)^{p_1}=-1,(-1)^{p_2}=(-1)^{l-1}$, 而 $(-1)^{p_3}$ 正是把 $2,3,\cdots,l-1,l+1,\cdots,2M$ 换到 $p(3),\cdots,p(2M)$ 时的宇称. 当 l 确定时取 p_3 的各种合格的排列, 再将 $(-1)^{p_3}$ 乘以相应的 $g_{\mu_{p(3)}\mu_{p(4)}}\cdots$ 再求和, 由归

纳假设, 正好得到 $\mathrm{tr}\{\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{l-1}}\gamma_{\mu_{l+1}}\cdots\gamma_{\mu_{2M}}\}$, 因此以 $g_{\mu_1\mu_l}$ 为系数的项等于 $p(1)=1, p(2)=l$ 的 $2M$ 个数字的合格排列的对应各项之和.

$$\begin{aligned}f_{\mu_1\mu_l} &= -4g_{\mu_1\mu_l}(-1)^{l-1}\sum_{p_3}(-1)^{p_3}g_{\mu_{p_3(2)}\mu_{p_3(3)}}\cdots g_{\mu_{p_3(2M-1)}\mu_{p_3(2M)}}\\ &= (-1)^l g_{\mu_1\mu_l}tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\cdots\gamma^{\mu_{l-1}}\gamma^{\mu_{l+1}}\cdots\gamma^{\mu_{2M}}\}.\end{aligned}$$

这些项之和给出 (8.5D.4) 式右边. 由于该式右边 = 左边 = $\mathrm{tr}\{\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2N}}\}$ =(8.5D.1) 式左边, 所以当 $N=M$ 时 (8.5D.1) 式也正确.

对奇数个 γ 矩阵, 可以用 $-\gamma_\mu=\gamma_5\gamma_\mu(\gamma_5)^{-1}$ 来处理,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\{\gamma_1\cdots\gamma_{2N-1}\} &= \mathrm{tr}\{\gamma_5\gamma_1\cdots\gamma_{2N-1}\gamma_5^{-1}\}\\ &= \mathrm{tr}\{\gamma_1\cdots\gamma_{2N-1}\}(-1)^{2N-1}\Rightarrow \mathrm{tr}\{\gamma_1\cdots\gamma_{2N-1}\}=0.\end{aligned}\quad(8.5\text{D}.5)$$

(2) 对于欧氏空间的收敛积分

$$I=\int \mathrm{d}^D x f(x^2)x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_{2l}}\quad(8.5\text{D}.6)$$

可以用代换

$$x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_{2l}}\to C^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}(x^2)^l=\frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{2^l\Gamma(\frac{D}{2}+l)}\sum g^{\mu_1\mu_2}\cdots g^{\mu_{2l-1}\mu_{2l}}(x^2)^l\quad(8.5\text{D}.7)$$

进行. 这里求和号遍及 $2l$ 个指标 $\mu_1\cdots\mu_{2l}$ 的不同配对方式. 我们在以下证明这个式子 (奇数个 x^μ 乘积, 积分为 0).

①首先令 $\sum g^{\mu_1\mu_2}\cdots g^{\mu_{2l-1}\mu_{2l}}=A$. 在欧氏空间, 当 $\mu_1=\cdots=\mu_{2l}$ 时, 有

$$A=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l-1)\equiv[l].\quad(8.5\text{D}.8)$$

这是因为对欧氏空间 $g^{\mu\nu}=\delta^\mu_\nu$. 因此 A 等于 $2l$ 个数字的不同配对方式数. 设想 $2l$ 个空格, 第 1 格与第 2 格配对, 第 3 格与第 4 格配对, $\cdots$, 第 $2l-1$ 格与第 $2l$ 格配对, 当 $2l$ 个数字的配对方式确定之后, 仍然有 $l!\times 2^l$ 种方式可以填入这 $2l$ 个格子, 形成不同的数字排列. 因为各对之间可以交换, 每对两个数字还可以交换, 而总的排列方式数为 $2l!$, 因此 $A=(2l)!/(2^l l!)$.

我们计算 $\sum g^{\mu_1\mu_2}\cdots g^{\mu_{2l-1}\mu_{2l}}$ 在

$$(x^1)^{2l_1}(x^2)^{2l_2}\cdots=x^{\mu_1}\cdots x^{\mu_{2l}},\quad \sum_j l_j=l$$

时的结果. 这时不同的 x^i 之间的 $g^{\mu\nu}$ 为 0. 所以由 (8.5D.8) 式, (8.5D.7) 式中的求和式为

$$\sum g^{\mu_1\mu_2}\cdots=\prod_j[(2l_j)!/(2^{l_j}l_j!)]=\prod_j[l_j]. \tag{8.5D.9}$$

②积分 I 可以写为

$$I=\int_0^{\infty}|x|^{D-1}\mathrm{d}|x|f(x^2)(x^2)^l\mathrm{d}\Omega\varphi^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}(\Omega),$$

其中, Ω 是球面上的角坐标, $x^2=(x^1)^2+\cdots+(x^D)^2$. 因此, 令

$$C^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}=\int\mathrm{d}\Omega\varphi^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}(\Omega)/\int\mathrm{d}\Omega \tag{8.5D.10}$$

就证明了 (8.5D.7) 式中的“→”.

③令 $f_0(x)=e^{-\alpha_1x_1^2-\alpha_2x_2^2\cdots-\alpha_Dx_D^2}$. 当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_D=\alpha$ 时, $f_0(x)=f(x^2)$ 只是 x^2 的函数. 我们有

$$I_0=\int\mathrm{d}^Dxf_0(x)=\frac{\sqrt{\Pi}^D}{\prod_i\sqrt{\alpha_i}}=B(\alpha). \tag{8.5D.11}$$

④考虑

$$\begin{aligned}I_1&=\int\mathrm{d}^Dx\mathrm{e}^{-\sum\alpha_i(x^i)^2}\mid_{\alpha_i=1}(x^1)^{2l_1}\cdots\\&=\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\right)^{l_1}\cdots B(\alpha)\mid_{\alpha_i=1}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2l_1-1}{2}\right)\times\cdots\frac{\sqrt{\Pi}^D}{\prod_i\sqrt{\alpha_i}}\mid_{\alpha_i=1}\\&=\left[\frac{1}{2^{l_1}}(1\cdot3\cdot5\cdots(2l_1-1))\right]\times\cdots\times\sqrt{\Pi}^D.\end{aligned} \tag{8.5D.12}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\infty}|x|^{D-1}(x^2)^l\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}|x|\int\mathrm{d}\Omega\varphi^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}(\Omega)\\&=\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^l\left(\int_0^{\infty}|x|^{D-1}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x\int\mathrm{d}\Omega\right)_{\alpha=1}\int\mathrm{d}\Omega\varphi^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}(\Omega)/\int\mathrm{d}\Omega\\&=\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^l\left(\int\mathrm{d}^Dx\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right)\mid_{\alpha=1}\times\int\mathrm{d}\Omega\varphi^{\mu_1\cdots\mu_{2l}}(\Omega)/\int\mathrm{d}\Omega\\&=\left[\frac{D}{2}\left(\frac{D}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{D}{2}+l-1\right)\right]\sqrt{\Pi}^DC^{\mu_1\cdots\mu_{2l}},\end{aligned} \tag{8.5D.13}$$

最后一步是由 (8.5D.10) 式得到的. 因此, 有

$$
\begin{aligned}
C^{\mu_1\cdots\mu_{2l}} &= \left(\frac{D}{2}\left(\frac{D}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{D}{2}+l-1\right)\right)^{-1} \times \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2l_1-1}{2}\right]\cdots \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+l\right)} \times \left[\frac{1}{2^{l_1}}(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l_1-1))\right] \times [\cdots] \\
&= \frac{1}{2^l}\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+l\right)}\prod_j [l_j]
\end{aligned} \tag{8.5D.14}
$$

考虑 (8.5D.9) 式, 我们证明了 (8.5D.7) 式中的等号.

(3) 在欧氏空间, 为了积分

$$
I_2 = \int \mathrm{d}^D x \frac{(x^2)^l}{(x^2+a)^n}, \tag{8.5D.15}
$$

其中, $x^2 = \sum_{i=1}^{D} x_i^2$. 我们可以把它写成

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty |x|^{D-1}|x|^{2l}\frac{1}{(x^2+a)^n}\mathrm{d}|x|\int \mathrm{d}\Omega_D \\
&= \Omega_D \int_0^\infty |x|^{2l+D-1}\mathrm{d}|x|\frac{1}{(x^2+a)^n} \\
&= \Omega_D \int_0^\infty \frac{1}{2}|x|^{2l+D-2}\mathrm{d}|x|^2\frac{1}{(x^2+a)^n} \\
&= \frac{\Omega_D}{2}\int_0^\infty s^{l+\frac{D}{2}-1}\mathrm{d}s\frac{1}{(s+a)^n}.
\end{aligned} \tag{8.5D.16}
$$

因此, 我们只要能积分

$$
J = \int_0^\infty \frac{s^\alpha}{(s+a)^n}\mathrm{d}s, \qquad 0 < \alpha + 1 < n \tag{8.5D.17}
$$

就可以了.

令

$$
B(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t, \tag{8.5D.18}
$$

其中, $\mathrm{Re}p > 0$, $\mathrm{Re}q > 0$. 则由

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\tau^{q-1}\mathrm{d}\tau \\ &\overset{\tau=tx}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{p-1}\mathrm{d}t(t^q\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx}x^{q-1}\mathrm{d}x) \\ &= \int_0^\infty x^{q-1}\mathrm{d}x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(x+1)}t^{p+q-1}\mathrm{d}t \\ &\overset{\tau=t(x+1)}{=} \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathrm{d}x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\tau^{p+q-1}\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{8.5D.19}$$

给出

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{8.5D.20}$$

由此得

$$A = \int_0^\infty \frac{s^{p-1}}{(a+s)^{p+q}}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{1}{a}\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t\frac{a^p}{a^{p+q}} = A_1 \times a^{-q}. \tag{8.5D.21}$$

考虑回路 C(如图 8.5D.1) 的积分 $\int_C \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t$. 由于 (8.5D.18) 式的被积函数的奇点在 $t=0$ 和 $t=-1$. 令 $a=|a|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 当 $\pi > \varphi > 0$ 时, 取两条割线分别从 0 和 -1 出发向贴近负实轴的方向趋于负无穷远. 回路 C 中 C_1 由 $0\to R$, C_2 为以 R 为半径的圆弧, C_3 由 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}R\to 0$. 由于 C 不包含奇点因此有

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0.$$

另一方面, $R\to\infty$ 时有弧形上的积分 $\int_{C_2}\to 0$, $\int_{C_3}\to -A_1$, $\int_{C_1}\to B(p,q)$, 由此得到

$$A = a^{-q}\times A_1 = a^{-q}B(p,q) = |a|^{-q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\varphi}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{8.5D.22}$$

当 $-\pi < \varphi \leqslant 0$ 时这个结果也成立.

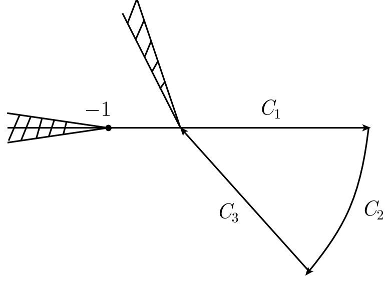


图 8.5D.1

①当 $a=-|a|+\mathrm{i}\epsilon$ 时, 有 $\pi>\varphi,\pi\cong\varphi$ 令

$$J=\int_0^\infty\frac{s^\alpha\mathrm{d}s}{(s+a)^n},$$

则 $p=\alpha+1$, $p+q=n$, $q=n-\alpha-1$.

$$J=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}(\alpha+1-n)}|a|^{\alpha+1-n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-\alpha-1)}{\Gamma(n)}.\tag{8.5D.23}$$

②当 $a>0$ 为实数时, $\varphi=0$,

$$J=a^{\alpha+1-n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-\alpha-1)}{\Gamma(n)}.\tag{8.5D.24}$$

为求 Ω_D, 我们积分

$$\begin{aligned}F&=\int d^Dxe^{-x^2}=\sqrt{\pi}^D\\&=\int_0^\infty|x|^{D-1}d|x|\mathrm{e}^{-|x|^2}\int\mathrm{d}\Omega\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t}t^{\frac{D}{2}-1}\mathrm{d}t\times\Omega_D=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\Omega_D,\\&\Rightarrow\Omega_D=\frac{2(\pi^{D/2})}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}.\end{aligned}\tag{8.5D.25}$$

最终给出, 当 $a>0$ 为实数时

$$I_2=\frac{\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}+l\right)\Gamma\left(n-\frac{D}{2}-l\right)}{\Gamma(n)}a^{\frac{D}{2}+l-n};\tag{8.5D.26}$$

当 $a=-|a|+\mathrm{i}\epsilon$ 时

$$I_2'=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\left(\frac{D}{2}+l-n\right)}\frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(\frac{D}{2})}\frac{\Gamma(\frac{D}{2}+l)\Gamma(n-\frac{D}{2}-l)}{\Gamma(n)}|a|^{\frac{D}{2}+l-n}.\tag{8.5D.27}$$

(4) 为求

$$\tilde{I}=\int\mathrm{d}^Dx\frac{(x^1)^{2l_1}(x^2)^{2l_2}\cdots}{(x^2+a)^n},\tag{8.5D.28}$$

我们用替代公式 (8.5D.14) 式把它变为 (令 $\sum l_i=l$)

$$\tilde{I}=\int\mathrm{d}^Dx\frac{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+l\right)}\frac{1}{2^l}[l_1][l_2]\cdots(x^2)^l\frac{1}{(x^2+a)^n},\tag{8.5D.29}$$

再用 (3) 中的 (8.5D.26) 式、(8.5D.27) 式得到, 当 $a>0$ 时

$$\tilde{I}=\pi^{D/2}\frac{\Gamma(n-\frac{D}{2}-l)}{\Gamma(n)}\frac{1}{2^l}[l_1][l_2]\cdots\left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{D}{2}-l}, \tag{8.5D.30}$$

其中, $[N]\equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2N-1)\equiv(2N-1)!!$; 当 $a=-|a|+\mathrm{i}\epsilon$ 时,

$$\tilde{I}'=\pi^{D/2}\frac{\Gamma(n-\frac{D}{2}-l)}{\Gamma(n)}\frac{1}{2^l}[l_1][l_2]\cdots|a|^{\frac{D}{2}+l-n}\times \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\left(\frac{D}{2}+l-n\right)}, \tag{8.5D.31}$$

将两式合在一起为

$$\tilde{I}=\pi^{D/2}\frac{\Gamma(n-\frac{D}{2}-l)}{\Gamma(n)}\frac{1}{2^l}[l_1]\cdots(a)^{\frac{D}{2}+l-n}. \tag{8.5D.32}$$

这个结果适用的 a 的辐角为 $-\pi<\varphi<\pi$, 如图 8.5D.2 所示, 必须要求 $a\neq 0$.

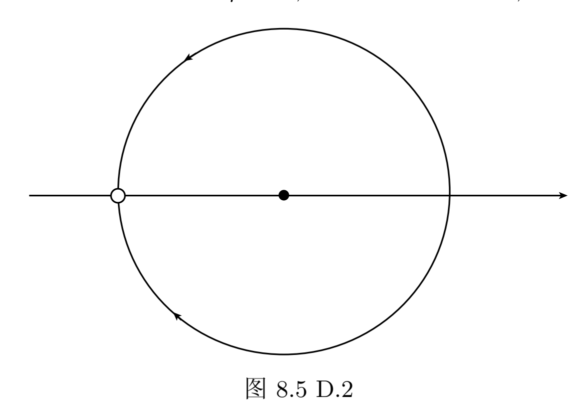


图 8.5 D.2

8.6 Weinberg 定理与 R_Γ 的收敛性

8.6.1 Weinberg 定理的推论

本节研究 Weinberg 定理的一个推论. 我们强调, 本节的参量都是实数, 由于 $\widetilde{R}_\Gamma$ 的 t 幂次就是 $|\widetilde{R}_\Gamma|$ 的 t 幂次, 所以 (8.5.18) 式可以用本节的结果来推导.

对于 n 个实变量的函数 $f(P_1,\cdots,P_n)=f(P)$, P 所属空间为 R_n . 如果对任意选定的 $m(m\leqslant n)$ 个线性独立的矢量 $L_1,\cdots,L_m$ 以及任意给定的 R_n 中的有界区域 W , 满足下列条件, 则称 f 属于 A_n 类函数.

(1) f 在任何 R_n 的有界区域 W 绝对可积;

(2) 在 R_n 上作下述参数化:

$$\vec{P}=L_1\eta_1\cdots\eta_m+L_2\eta_2\cdots\eta_m+\cdots+L_m\eta_m+C \tag{8.6.1}$$

则当 $\eta_l \geqslant b_l, C \in W$ 时, 有

$$|f(P)| \leqslant M\eta_1^{\alpha(L_1)} \ln \eta_1^{\beta(L_1)} \eta_2^{\alpha(L_1,L_2)} \ln \eta_2^{\beta(L_1,L_2)} \cdots \eta_m^{\alpha(L_1,\cdots,L_m)} \ln \eta_m^{\beta(L_1,\cdots,L_m)}.$$

其中, α, β 只与它们相关的矢量序列有关. M, b_l 与所有矢量 $L_1, \cdots, L_m$ 以及 W 有关. 但它们都与 η 无关. 在后面我们总假定 $\beta \geqslant 0, b_l \geqslant 1, \eta > 0$(在 Weinberg 的原始文献中, α 只与相关矢量形成的空间有关, 这里略为放宽条件).

我们有下述命题, 它是 Weinberg 定理的推论.

命题 11　如果 $f(P)$ 属于 A_n 类, 而且对任何矢量 $L \in R_n$,

$$\alpha(L) < -1,$$

则

$$f_L(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\, y f(P + Ly) \tag{8.6.2}$$

绝对可积, 由 Fubini 定理, 这个积分值对 P 和 $P + \lambda L$ 是相同的. 因此, 积分是商空间 $R_n/\{L\} = R_{n-1}$ 上的函数. $f_L(P)$ 是 R_{n-1} 上的 A_{n-1} 类函数. 考虑 $L, L_1, L_2, \cdots, L_l$ 相互线性独立. 当 $\vec{P}$ 用 (8.6.1) 式进行参数化时, 其 α 渐近指数为

$$\begin{aligned}\alpha'(L_1, \cdots, L_l) = \max\{&\alpha(\pm L, L_1', L_2', \cdots, L_l') + 1, \cdots, \alpha(L_1', \cdots, L_l', \pm L) \\ &+1, \alpha(L_1', \cdots, L_l')\},\end{aligned} \tag{8.6.3}$$

其中, max 对一切 $i_j = 1, \cdots, n_j$, $L_j' = L_j + u_{i_j} L$ ($\{u_{i_j}\}$ 是个有限集合) 取极大; 其 β 指数为

$$\beta' = \max_l \{2\beta_l + 1\}, \tag{8.6.4}$$

其中, max 是对一切 $\beta_l\{L_1', \cdots, L_l'\}$ 中的 $L_j' = L_j + u_{i_j} L$ 以及 l 取极大值.

为证明命题 11, 我们在 R_n 中取一个 Weinberg 的 η 参数化:

$$\vec{\Gamma}_b = L_1\eta_1 \cdots \eta_m + L_2\eta_2 \cdots \eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C, \tag{8.6.5}$$

其中, $C \in W$. 因此, 当 C 固定, η 取不同值时, $\vec{\Gamma}_b$ 对应 R_n/L 中的不同点, 当 C 取不同的点, 但是这些点是沿着平行于 L 的线时, 它们对应的是 $R_n/L = R_{n-1}$ 中同一个点.

令 L 方向的一个矢量为

$$Ly = Lz\eta_1 \cdots \eta_m, \tag{8.6.6}$$

把这个矢量叠加到 $\vec{\Gamma}_b$ 上, 得到 R_n 中的一个矢量

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \vec{\Gamma}_b + Ly \\ &= Lz\eta_1\cdots\eta_m + L_1\eta_1\cdots\eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C \\ &\equiv \pm L\eta_0\eta_1\cdots\eta_m + L_1\eta_1\cdots\eta_m + \cdots,\end{aligned} \tag{8.6.7}$$

其中, $\eta_0 = |z|$. 我们在下文中把 $\vec{\Gamma}_b$ 上的点固定, 使 $f(P)$ 对 z 从 $-\infty$ 积分到 ∞, 就得到 (8.6.2) 式的值, 这个值由 $\eta_1\cdots\eta_m$ 和 C/L 决定, 它是 R_n/L 上点的函数, 由 (8.6.7) 式可以看到, 当 $|z| = \eta_0 > b_0(\pm L, L_1\cdots L_m, C), \eta_j > b_j(\pm L, L_1\cdots L_m, C)$ 时, $f(\vec{\Gamma})$ 满足渐近表达式. 因此, 可以顺利地估计积分值的范围.

符合 $|z| > b_0(\pm L, L_1\cdots L_m, C)$ 的 y 的范围定义为 $J^0_\pm$. 它的积分区间是 $\int_{-\infty}^{-b_0}\mathrm{d}\,z$ 和 $\int_{b_0}^{\infty}\mathrm{d}\,z$.

这样, 对 y 的积分空间中间就缺失一段, 对应于 $z\in[-b_0, b_0]$. 这个区域虽然对 z 是一个有限区间, 但对 y 不是, 因而对 R_n 不是. 因为当 $\eta_1\cdots\to\infty$ 时, 这个区间的范围是无限的. 这一段要用以下的方法来处理.

Weinberg 的策略是把变量 z 的位置从最前面 (8.6.7) 式设法一步一步向后挪, 一直挪到 $L_m\eta_m$ 之后, 变为 $\vec{\Gamma} = \cdots + L'_m\eta_m + Lz$. 这样 z 的有限区间对于 y 就是一个真正的有限区域. 由 A_n 函数的第一个性质就容易估计 $f_L(P)$ 的这一部分积分了. 具体方法如下.

令 $z = u_{i_1} + \Delta z, \Delta z\in(-\lambda,\lambda)$ 定义一个小开区间 S_{i_1} , 我们考虑用很多个这样的小区间来覆盖区间区间 S_0 ：$z\in[-b_0, b_0]$. 用 Δz 表达 $\vec{\Gamma}$ 得到

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \vec{\Gamma}_b + Ly \\ &= L(u_{i_1}+\Delta z)\eta_1\cdots\eta_m + L_1\eta_1\cdots\eta_m + \cdots + L_m\eta_m + C \\ &= (L_1 + u_{i_1}L)\eta_1\cdots\eta_m + L\Delta z\eta_1\cdots\eta_m + L_2\eta_2\cdots\eta_m + \cdots \\ &\equiv L'_1\eta_1\cdots\eta_m + L\Delta z\eta_1\cdots\eta_m + L_2\eta_2\cdots\eta_m + \cdots.\end{aligned} \tag{8.6.8}$$

令 $\Delta z\eta_1 = z_1$, 就有 $\eta_1 = \dfrac{1}{\Delta z}z_1 = \left|\dfrac{1}{\Delta z}z_1\right|(\eta_1 > 0)$, 从而有

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= L'_1\eta_1\cdots\eta_m + Lz_1\eta_2\cdots\eta_m + \cdots \\ &= L'_1\frac{1}{\Delta z}z_1\eta_2\cdots\eta_m + Lz_1\eta_2\cdots\eta_m + L_2\eta_2\cdots\eta_m + \cdots.\end{aligned} \tag{8.6.9}$$

这已经很像一个标准的 Weinberg η 参数化了. 令

$$\frac{1}{|\Delta z|} = \eta'_1, |z_1| = \eta_0, \tag{8.6.10}$$

就有 $\eta_1=\eta_1'\eta_0$ 和

$$\vec{\Gamma}=L_1'\eta_1'\eta_0\eta_2\cdots\eta_m\pm L\eta_0\eta_2\cdots\eta_m+L_2\eta_2\cdots\eta_m+\cdots. \tag{8.6.11}$$

这正好是一个标准的 Weinberg η 参数化. 当然现在的矢量序列是

$$\{L_1+u_{i_1}L=L_1',\pm L,L_2,\cdots,L_m\}, \tag{8.6.12}$$

而不是 (8.6.7) 式中的 $\pm L,L_1,L_2,\cdots,L_m$.

我们发现, $\pm L$ 的位置挪了一项, 也就是 (8.6.9) 式中 z_1 的位置比 (8.6.7) 式中 z 的位置挪后了一项. 而且 L_1 变成了 $L_1'=L_1+u_{i_1}L_1$.

当

$$\eta_1'>b_1(L_1',\pm L,\cdots)\equiv b_1(i_1), \tag{8.6.13}$$

而且

$$\eta_0=|z_1|>b_0(i_1), \tag{8.6.14}$$

其余

$$\eta_l>b_l(i_1) \tag{8.6.15}$$

时, 函数 f 有渐近表达式.

(8.6.14) 式确定了 z_1 的有问题的区域, $z_1\in[-b_0(i_1),b_0(i_1)]$. 而 (8.6.13) 式决定区间 S_{i_1} 的宽度参数 λ.

$\eta_1'=\dfrac{1}{|\Delta z|}>b_1(i_1)\Rightarrow|\Delta z|<b_1^{-1}(i_1)$, 因而可以把 λ 定为

$$\lambda=b_1^{-1}(i_1). \tag{8.6.16}$$

我们需要用小开区间 S_{i_1} 来覆盖闭区间 $S_0:z\in[-b_0,b_0]$. 困难是 S_{i_1} 的宽度 λ 与中心点 u_{i_1} 有关, 但我们有 Borel 有限覆盖定理可以利用. 由于总可以用无穷多个开区间 S_{i_1} 来覆盖闭区间 S_0(在 S_0 的内部和端点上, λ 都是有限大而不是 0) 根据 Borel 有限覆盖定理, S_0 一定可以用有限个 $S_{i_1},i_1=1,\cdots,n_1$, 来覆盖. 所以, 我们完成了用有限个小区间 S_{i_1} 覆盖 S_0 的任务.

但是这些小区间 S_{i_1} 中并不是每一个点都符合渐近式的要求. 其中不满足 (8.6.14) 式的点必须另作处理. 对于这些点有

$$|z_1|=\eta_0\leqslant b_0(i_1),\text{即 } z_1\in[-b_0(i_1),b_0(i_1)]. \tag{8.6.17}$$

这些点所属的区间我们命名为 S_{i_1}' . 在 S_{i_1} 扣除 S_{i_1}' 得到的两段, 我们称之为 $J_{\pm i_1}$, 在 $J_{\pm i_1}$, f 有渐近表示. 把 (8.6.9) 式与 (8.6.7) 式对比, 发现 z_1 比 z 的位置挪后

了一项, 而且 $L_1 \to L_1' = L_1 + u_{i_1}L$. 然而要解决的问题是类似的：下列区间有问题：$z_1 \in [-b_1(i_1), b_1(i_1)]$.

仿照上一步, 我们可以将 z_1 写成 $z_1 = u_{i_1 i_2} + \Delta z_1$. 用

$$\Delta z_1 \in (-\lambda, \lambda) \tag{8.6.18}$$

定义的小开区间 $S_{i_1 i_2}$ 覆盖 S'_{i_1} .

(8.6.9) 式可以改写为

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= L_1'\eta_1\cdots\eta_m + L(u_{i_1 i_2} + \Delta z_1)\eta_2\cdots\eta_m + L_2\eta_2\cdots\eta_m + \cdots \\ &= L_1'\eta_1\cdots\eta_m + (L_2 + u_{i_1 i_2}L)\eta_2\cdots\eta_m + L\Delta z_1\eta_2\cdots\eta_m + \cdots .\end{aligned} \tag{8.6.19}$$

令

$$\Delta z_1\eta_2 = z_2, \quad \frac{1}{\Delta z_1}z_2 = \eta_2 = |\frac{1}{\Delta z_1}||z_2|, \quad L_2' = L_2 + Lu_{i_1 i_2}, \tag{8.6.20}$$

得到

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &\equiv L_1'\eta_1\eta_2\cdots\eta_m + L_2'\eta_2\cdots\eta_m + Lz_2\eta_3\cdots\eta_m + L_3\eta_3\cdots\eta_m + \cdots \\ &= L_1'\eta_1\frac{1}{\Delta z_1}z_2\eta_3\cdots\eta_m + L_2'\frac{1}{\Delta z_1}z_2\eta_3\cdots\eta_m + Lz_2\eta_3\cdots\eta_m + \cdots .\end{aligned} \tag{8.6.21}$$

这个式子又很接近 Weinberg η 参数化了. 只要令

$$\frac{1}{|\Delta z_1|} = \eta_2', \quad |z_2| = \eta_0, \tag{8.6.22}$$

就得到 $\eta_2 = \eta_2'\eta_0$ 和

$$\vec{\Gamma} = L_1'\eta_1\eta_2'\eta_0\eta_3\cdots\eta_m + L_2'\eta_2'\eta_0\eta_3\cdots\eta_m \pm L\eta_0\eta_3\cdots\eta_m + L_3\eta_3\cdots\eta_m + \cdots . \tag{8.6.23}$$

这又是一个标准的 Weinberg η 参数化, 它对应的矢量序列是

$$\{L_1', L_2', \pm L, L_3, \cdots, L_m\}. \tag{8.6.24}$$

这可以与序列 (8.6.12) 式对比, 发现 $\pm L$ 的位置挪后一项, 也就是 (8.6.21) 式中 z_2 的位置比 (8.6.9) 式中 z_1 的位置又挪后了一项. 而且 $L_2 \to L_2' = L_2 + u_{i_1 i_2}L$.

当

$$\begin{aligned}\eta_2' &= \frac{1}{|\Delta z_1|} > b_2(L_1', L_2', \pm L, L_3, \cdots, L_m) \\ &\equiv b_2(i_1, i_2),\end{aligned} \tag{8.6.25}$$

且

$$\eta_0 = |z_2| > b_0(i_1, i_2), \tag{8.6.26}$$

其余

$$\eta_l > b_l(i_1, i_2). \tag{8.6.27}$$

时, 函数有渐近表达式.

(8.6.26) 式决定了 z_2 有问题的区域:

$$z_2 \in [-b_0(i_1 i_2), b_0(i_1 i_2)]. \tag{8.6.28}$$

(8.6.25) 式决定了 $S_{i_1 i_2}$ 的宽度参数, 可以取

$$\lambda = b_2^{-1}(i_1 i_2). \tag{8.6.29}$$

由 Borel 有限覆盖定理, 可以用有限个 $S_{i_1 i_2}, i_2 = 1, \cdots, n_2^*$来覆盖 S'_{i_1}, $z_2 \in [-b_0(i_1 i_2), b_0(i_1 i_2)]$ 形成的区间 $S'_{i_1 i_2}$, 因为不满足 (8.6.26) 式, 须另作处理. 挖去 $S'_{i_1 i_2}$ 的 $S_{i_1 i_2}$ 分为对称的两段, 我们称之为 $J_{\pm i_1 i_2}$, 对于它们, z_2 的范围分别是

$$z_2 = \pm(b_0(i_1 i_2) \to b_2^{-1}(i_1 i_2)\eta_2). \tag{8.6.30}$$

我们需要处理 $S'_{i_1 i_2} : z_2 \in [-(b_0(i_1 i_2),\ b_0(i_1 i_2)]$ 的点对应的 y 的积分.

下一次我们用 $z_2 = u_{i_1 i_2 i_3} + \Delta z_2, \Delta z_2 \in (-\lambda, \lambda)$ 来覆盖 $S'_{i_1 i_2}$ 得到 $J_{\pm i_1 i_2 i_3}$.

$\cdots\cdots$

到第 r 步时, 我们有 $S'_{i_1 i_2 \cdots i_{r-1}}$ 对应于

$$z_{r-1} \in [-b_0(i_1 i_2 \cdots i_{r-1}), b_0(i_1 i_2 \cdots i_{r-1})] \tag{8.6.31}$$

需要处理. 这时坐标为

$$\vec{\Gamma} = L'_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + L'_{r-1} \eta_{r-1} \eta_r \cdots \eta_m + L z_{r-1} \eta_r \cdots \eta_m + L_r \eta_r \cdots \eta_m + \cdots. \tag{8.6.32}$$

令

$$z_{r-1} = u_{i_1 i_2 \cdots i_r} + \Delta z_{r-1}, \tag{8.6.33}$$

$\Delta z_{r-1} \in (-\lambda, \lambda)$ 构成小开区间 $S_{i_1 i_2 \cdots i_r}$. 我们用它们来覆盖 $S'_{i_1 i_2 \cdots i_{r-1}}$, 根据 Borel, 只需要有限个这样的小区间, 就可以覆盖完毕.

将 (8.6.33) 式代入 (8.6.32) 式得到

$$\vec{\Gamma} = L'_1 \eta_1 \cdots \eta_m + \cdots + (L_r + u_{i_1 \cdots i_r} L) \eta_r \cdots \eta_m + L \Delta z_{r-1} \eta_r \cdots \eta_m + L_{r+1} \eta_{r+1} \cdots \eta_m + \cdots.$$

令 $\Delta z_{r-1} \eta_r = z_r$, 有

$$\frac{1}{\Delta z_{r-1}} z_r = \eta_r = \frac{1}{|\Delta z_{r-1}|} |z_r|, \tag{8.6.34}$$

---

* 本来 n_2 可能与 i_1 有关, 但是由于 i_1 是有限个, 所以不妨取各个 i_1, 中最大的 n_2 作为共同的 n_2.

就得到

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} =& L_1'\eta_1\cdots\eta_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m+\cdots+L_r'\eta_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m+Lz_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m+L_{r+1}\eta_{r+1}\cdots\eta_m\\ =& L_1'\eta_1\cdots\frac{1}{\Delta z_{r-1}}z_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m+\cdots+L_r'\frac{1}{\Delta z_{r-1}}z_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m\\ &+Lz_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m+L_{r+1}\eta_{r+1}\cdots\eta_m+\cdots,\end{aligned} \tag{8.6.35}$$

其中 $L_r'=L_{r+u_i,\cdots i_r}L$.

这已很接近 Weinberg η 参数化了. 注意 (8.6.35) 式中 z_r 的位置比 (8.6.32) 式中 z_{r-1} 挪后了一项. 令

$$|\frac{1}{\Delta z_{r-1}}|=\eta_r',\quad |z_r|=\eta_0,$$

则得 $\eta_r=\eta_r'\eta_0$ 和

$$\vec{\Gamma}=L_1'\eta_1\cdots\eta_r'\eta_0\eta_{r+1}\cdots\eta_m+\cdots+L_r'\eta_r'\eta_0\eta_{r+1}\cdots\eta_m\pm L\eta_0\eta_{r+1}\cdots\eta_m+\cdots. \tag{8.6.36}$$

这是标准的 Weinberg η 参数化, 对应矢量组 $\{L_1',\cdots,L_r+u_{i_1\cdots i_\gamma}=L_r',\pm L,\cdots\}$ $\pm L$ 的位置挪后了一项, 相应的 z_r 的位置也比 z_{r-1} 挪后了一项, 同时 L_r 变成了 L_r'.

当

$$\begin{aligned}\eta_r'=&\frac{1}{|\Delta z_{r-1}|}>b_r(L_1',\cdots,L_r',\pm L,L_{r+1},\cdots)\\ \equiv& b_r(i_1\cdots i_r),\end{aligned} \tag{8.6.37}$$

$$\eta_0=|z_r|>b_0(i_1\cdots i_r), \tag{8.6.38}$$

其余 $\eta_l>b_l(i_1\cdots i_r)$ 时,

就可以使 f 满足渐近式. 条件 (8.6.38) 式给出有问题的 z_r,

$$z_r:z_r\in[-b_0(i_1\cdots i_r),b_0(i_1\cdots i_r)]. \tag{8.6.39}$$

条件 (8.6.37) 式给出 $\lambda=b_r^{-1}(i_1\cdots i_r)$, 这是用来覆盖 $S_{i_1'\cdots i_{r-1}}$ 的小开区间 $S_{i_1\cdots i_r}$ 的宽度参量. 小开区间 $S_{i_1\cdots i_r}$ 中必须扣除不满足 (8.6.38) 式条件的 z_r, 即由

$$z_r:z_r\in[-b_0(i_1\cdots i_r),b_0(i_1\cdots i_r)].$$

形成的称为 $S_{i_1\cdots i_r}'$ 的闭区间. 扣除之后, 我们得到两个区间: $J_\pm i_1\cdots i_r$. 在这两个区间, f 有渐近式, 这两个区间对应

$$z_r=\pm(b_0(i_1\cdots i_r)\to b_r^{-1}(i_1\cdots i_r)\eta_r) \tag{8.6.40}$$

(从 (8.6.34) 式可以看出, 当 $\frac{1}{|\Delta z_{\gamma-1}|}=\eta'_r=b_r(i_1\cdots i_r)$ 时, $|z_r|=b_r^{-1}(i_1\cdots i_r)\eta_r$. 如果 $b_r^{-1}(i_1\cdots i_r)\eta_r<b_0(i_1\cdots i_r)$, 则这两个区间 $J_\pm i_1\cdots i_r$ 不存在, 不需要在这一步中进行处理.) 综上所述, 有问题的区域, 即尚未能保证 f 有渐近性质从而要进一步处理的区域 $S'_{i_1\cdots i_r}$ 中的点可用 (8.6.35) 式, 即

$$\vec{\Gamma}=L'_1\eta_1\cdots\eta_m+\cdots+L'_r\eta_r\cdots\eta_m+Lz_r\eta_{r+1}\cdots\eta_m+L_{r+1}\eta_{r+1}\cdots\eta_m+\cdots \quad (8.6.41)$$

来表示, 从而使 z_r 的位置比 z_{r-1} 又挪后一步 (对比 (8.6.32) 式). 在矢量序列中, L_r 变为 $L_r+u_{i_1\cdots i_\gamma}L=L'_r$, 而且 $\pm L$ 的位置也挪后了一项.

$\cdots$

最后, 我们留下一些区间 $S'_{i_1i_2\cdots i_m}$ 还需要处理 (它们用数列 $i_1\cdots i_m$ 标记, 这些区间的总数有限), 它们对应的坐标表达式为

$$\vec{\Gamma}=L'_1\eta_1\cdots\eta_m+\cdots+L'_m\eta_m+Lz_m+C \quad (8.6.42)$$

其中

$$z_m\in[-b_0(i_1\cdots i_m),b_0(i_1\cdots i_m)] \quad (8.6.43)$$

它们的 y 构成区间 $J^0_{i_1\cdots i_m}$.

注意：(8.6.42) 式中的 $C\in W$ 是 R_n 的有界区域. 我们要想处理 $S'_{i_1\cdots i_m}$ 对应的对 y 的积分, 要利用 f 的渐近表达式, 可以把 W 扩大为 $W\to W'$, 使 $Lz_m+C\in W'$ 总是成立. 由于 $S'_{i_1\cdots i_m}$ 的宽度 $2b_0(i_1\cdots i_m)$ 有限, 因此 W' 也是有界的. 在以

$$\begin{aligned}
L'_1&=L_1+u_iL\\
L'_2&=L_2+u_{i_1i_2}L\\
L'_3&=L_3+u_{i_1i_2i_3}L\\
&\cdots\\
L'_m&=L_m+u_{i_1\cdots i_m}L
\end{aligned}$$

为矢量序列的 η 展开中 f 有渐近展开式, 这时常数 M 可能有所改变, 令其为 $\widetilde{M}$, 它与 $M,b_0(i_1\cdots i_m)$ 有关, 但与 η 无关.

另一方面, 由 A_n 函数的定义, 对 y 的这段积分是在有界区 W' 内, 应该绝对收敛. 至此, 我们完成了对 $y=-\infty\to\infty$ 全程的处理.

现在我们要对以上三类 y 的区间进行积分：(1) $J_\pm$; (2) $J_{\pm i_1\cdots i_r}$; (3) $J^0_{i_1\cdots i_m}$;

(1) $J_\pm$

由 (8.6.6) 式、(8.6.7) 式在区间 $J_\pm$ 有 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\eta_1\cdots\eta_m$, 给出

$$\begin{aligned}
\int_{J_\pm}\mathrm{d}\,y|f(\vec{\Gamma}_b+Ly)|\leqslant&\int_{b_0}^{\infty}\mathrm{d}\,z\eta_1\cdots\eta_mMz^{\alpha(\pm L)}\ln z^{\beta(\pm L)}\eta_1^{\alpha(\pm L,L_1)}\ln\eta_1^{\beta(\pm L,L_1)}\cdots\\
&\times\cdots\eta_m^{\alpha(\pm L,\cdots,L_m)}\ln\eta_m^{\beta(\pm L,\cdots,L_m)}.
\end{aligned}$$

当 $\alpha(L) < -1$ 时, 这个积分收敛. 得到

$$\int_{J\pm} \mathrm{d}y|f(\vec{\Gamma}_b + Ly)| \leqslant M'(b_0, M, \alpha(L), \beta(L)) \times \eta_1^{\alpha(\pm L, L_1)+1} \ln \eta_1^{\beta(\pm L, L_1)} \cdots \eta_m^{\alpha(\pm L, L_1, \cdots, L_m)+1} \times \ln \eta_m^{\beta(\pm L, L_1, \cdots, L_m)}. \tag{8.6.44}$$

(2) $J_{\pm i_1 \cdots i_r}$

由 (8.6.35) 式, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}z_r \eta_{r+1} \cdots \eta_m$.

由 (8.6.36) 式考虑到 $\eta'_r = \dfrac{\eta_r}{|z_r|}$, $\eta_0 = |z_r|$, 在各小区间 $J_{\pm i_1 \cdots i_\gamma}$ 由 (8.6.40) 式、(8.6.41) 式有

$$\int_{J_{+i_1 \cdots ir}} \mathrm{d}\, y f = \int_{b_0(i_1, \cdots i_r)}^{b_r^{-1}(i_1, \cdots i_r)\eta_r} \mathrm{d}\, z \eta_{r+1} \cdots \eta_m f$$

和

$$\int_{J_{-i_1 \cdots ir}} \mathrm{d}\, y f = \int_{-b_r^{-1}(i_1, \cdots i_r)\eta_r}^{-b_0(i_1, \cdots i_r)} \mathrm{d}\, z \eta_{r+1} \cdots \eta_m f,$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_{J_{\pm i_1, \cdots ir}} \mathrm{d}\, y|f(\vec{\Gamma}_b + Ly)| \leqslant M \int_{b_0(i_1, \cdots i_r)}^{b_r(i_1, \cdots i_r)^{-1}\eta_r} & \underbrace{\mathrm{d}\, z \eta_{r+1} \cdots \eta_m}_{\mathrm{d}\, y} \eta_1^{\alpha(L'_1)} \ln \eta_1^{\beta(L'_1)} \cdots \\ & \times \left(\frac{\eta_r}{z}\right)^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r)} \times \ln \left(\frac{\eta_r}{z}\right)^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r)} \\ & \times z^{\alpha(L'_1, \cdots L'_r, \pm L)} \ln z^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L)} \eta_{r+1}^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1})} \\ & \times \ln \eta_{r+1}^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1})} \cdots \eta_m^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1}, \cdots, L_m)} \\ & \times \ln \eta_m^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1}, \cdots, L_m)}.\end{aligned} \tag{8.6.45}$$

把与 z 有关的项移到前面, 得到

$$\begin{aligned}\int_{J_{\pm i_1, \cdots ir}} \mathrm{d}\, y|f(\vec{\Gamma}_b + Ly)| \leqslant & \int_{b_0(i_1 \cdots i_\gamma)}^{b_r(i_1 \cdots i_\gamma)^{-1}\eta_r} \mathrm{d}\, z \left(\frac{\eta_r}{z}\right)^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r)} \ln \left(\frac{\eta_r}{z}\right)^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r)} \\ & \times z^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L)} \ln z^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L)} \times M \eta_1^{\alpha(L'_1)} \ln \eta_1^{\beta(L'_1)} \cdots \\ & \times \eta_{r-1}^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_{r-1})} \ln \eta_{r-1}^{\beta(L'_1, \cdots, L'_{r-1})} \\ & \times \eta_{r+1}^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1})+1} \ln \eta_{r+1}^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1})} \\ & \times \cdots \times \eta_m^{\alpha(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1}, \cdots, L_m)+1} \\ & \times \ln \eta_m^{\beta(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L, L_{r+1}, \cdots, L_m)}.\end{aligned} \tag{8.6.46}$$

我们可以证明, 当 $\beta,\beta'\geqslant 0,\lambda<1,b>1$ 时, 有 (附录 8.6A)

$$\int_b^{\lambda\eta_r}\mathrm{d}\,z(\frac{\eta_r}{z})^{\alpha'}\ln\left(\frac{\eta_r}{z}\right)^{\beta'}z^{\alpha}\ln z^{\beta}\leqslant N\eta_r^{\tilde{\alpha}}\ln\eta_r^{\tilde{\beta}}\quad(N\text{ 与}\eta_r\text{ 无关}).\tag{8.6.47}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}&=\max\{\alpha+1,\alpha'\},\\ \tilde{\beta}&=\max\{2\beta+1,2\beta'+1\}.\end{aligned}\tag{8.6.48}$$

因此, 对各个小区间的积分满足以下渐近式:

$$\begin{aligned}\left|\int_{J_{\pm i_1\cdots i_\gamma}}\mathrm{d}\,yf(\vec{\Gamma}_b+L_y)\right|\leqslant&M'\eta_1^{\alpha(L_1')}\ln\eta_1^{\beta(L_1')}\cdots\eta_{r-1}^{\alpha(L_1',\cdots,L_{r-1}')}\ln\eta_r^{\beta(L_1',\cdots,L_{r-1}')}\\&\times\eta_r^{\tilde{\alpha}_r}\ln\eta_r^{\tilde{\beta}_r}\\&\times\eta_{r+1}^{\alpha(L_1',\cdots,L_r',\pm L,L_{r+1})+1}\ln\eta_{r+1}^{\beta(L_1',\cdots,L_r',\pm L,L_{r+1})}\\&\times\cdots\times\eta_m^{\alpha(L_1',\cdots,L_r',\pm L,L_{r+1},\cdots,L_m)+1}\\&\times\ln\eta_m^{\beta(L_1',\cdots,L_r',\pm L,L_{r+1},\cdots,L_m)}.\end{aligned}\tag{8.6.49}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_r&=\max\{\alpha(L_1',\cdots,L_r',\pm L)+1,\ \alpha(L_1',\cdots,L_r')\},\\ \tilde{\beta}_r&=\max\{2\beta(L_1',\cdots,L_r',\pm L)+1,2\beta(L_1',\cdots,L_r')+1\}.\end{aligned}\tag{8.6.50}$$

(3) $J^0_{i_1\cdots i_m}$

在此区间, 由 (8.6.42)$\mathrm{d}y=\mathrm{d}z_m$.

此区间积分估值为

$$\begin{aligned}\int_{J^0_{i_1\cdots im}}\mathrm{d}\,y|f(\vec{\Gamma}_b+Ly)|\leqslant&\widetilde{M}\int_{-b_0(i_1\cdots i_m)}^{b_0(i_1\cdots i_m)}\mathrm{d}\,z\quad\eta_1^{\alpha(L_1')}\ln\eta_1^{\beta(L_1')}\cdots\\&\times\eta_m^{\alpha(L_1',\cdots,L_m')}\ln\eta_m^{\beta(L_1',\cdots,L_m')}\\=&2\widetilde{M}b_0(i_1\cdots i_m)\eta_1^{\alpha(L_1')}\ln\eta_1^{\beta(L_1')}\cdots\\&\times\eta_m^{\alpha(L_1',\cdots,L_m')}\ln\eta_m^{\beta(L_1',\cdots,L_m')}.\end{aligned}\tag{8.6.51}$$

在以上表达式中 L_r' 为

$$L_r'=L_r+u_{i_1\cdots i_r}L.\tag{8.6.52}$$

把以上三部分合在一起考虑, 我们得到如下结论 (第 (2)、(3) 部分都不止一个积分, 但总数是有限的, 这个数目不因 $\eta_r\to\infty$ 而改变).

当 $\alpha(\pm L)<-1$ 时, 对充分大的 η , 有

$$\int\mathrm{d}\,y|f(\vec{\Gamma}_b+Ly)|\leqslant M'\eta_1^{\alpha_1'}\ln\eta_1^{\beta_1'}\cdots\eta_m^{\alpha_m'}\ln\eta_m^{\beta_m'}.\tag{8.6.53}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\alpha_1' &= \max\{\alpha(\pm L, L_1)+1, \alpha(L_1', \pm L)+1, \alpha(L_1')\},\\
\alpha_r' &= \max\{\alpha(\pm L, L_1, \cdots, L_r)+1, \alpha(L_1', \pm L, L_2, \cdots, L_r)+1, \cdots,\\
&\qquad \alpha(L_1', \cdots, L_r', \pm L)+1, \alpha(L_1', \cdots, L_r')\},
\end{aligned} \tag{8.6.54}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_r' &= \max\{2\beta(\pm L, L_1, \cdots, L_r)+1, 2\beta(L_1', \pm L, L_2, \cdots, L_r)+1, \cdots,\\
&\qquad 2\beta(L_1', \cdots, L_r', \pm L)+1, 2\beta(L_1', \cdots, L_r')+1\}.
\end{aligned} \tag{8.6.55}
$$

这里的 max 是对数列集合 $\{i_1 \cdots i_r\}$ 所给出的 $L_i' = L_i + u_{i_1\cdots i_r}$ 求极大值. 由于这是有限项, 极大值总是存在的.

因为

$$
\left|\int \mathrm{d}\, y f(\vec{\Gamma}_b + Ly)| \leqslant \int \mathrm{d}\, y |f(\vec{\Gamma}_b + Ly)\right|,
$$

所以我们得到以下结论.

当 $f \in A_n$, 令

$$
F(\vec{\Gamma}_b) = \int \mathrm{d}\, y f(\vec{\Gamma}_b + Ly),
$$

则在 $\alpha(L) < -1$ 时, 积分绝对收敛. 并且当 $\vec{\Gamma}_b$ 上的 η 充分大时, $F(\vec{\Gamma}_b)$ 满足渐近式. 这是 $F(\vec{\Gamma}_b)$ 是 R_{n-1} 上的 A_{n-1} 类函数的第二个要求.

现在还需要证明第一个要求.

我们要证明对于 R_{n-1} 空间的有界区域, $F(\vec{\Gamma}_b)$ 绝对可积. 也就是对于任何有界区域 σ 有

$$
A = \int_\sigma \mathrm{d}\, P' |F(\vec{\Gamma}_b)| = \int_\sigma \mathrm{d}\, P' |\int \mathrm{d}\, y f(\vec{\Gamma}_b + Ly)| \text{收敛}.
$$

考虑单个矢量 L 的 η 参数化：当 $\vec{\Gamma}_b \in C, \eta > b_0$ 时, 有

$$
|f(\vec{\Gamma}_b + Ly)| = |f(\vec{\Gamma}_b \pm L\eta)| < M\eta^{\alpha(\pm L)}, \tag{8.6.56}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_\sigma \mathrm{d}\, P' |\int \mathrm{d}\, y f(\vec{\Gamma}_b + Ly)|\\
&\leqslant \int_\sigma \mathrm{d}\, P' \int_{-b_0}^{b_0} |f| \mathrm{d}\, y + \int_\sigma \mathrm{d}\, P' \int_{-\infty}^{-b_0} |f| \mathrm{d}\, y + \int_\sigma \mathrm{d}\, P' \int_{b_0}^{\infty} |f| \mathrm{d}\, y.
\end{aligned}
$$

由 (8.6.56) 式, 当 $\alpha(\pm L) < -1$ 且 σ 是有界区时, 后两个积分收敛, 由于 $f \in A_n$, 第一个积分也收敛, 所以 A 有限. 因此有

$$
F(\vec{\Gamma}_b) \in A_{n-1}. \tag{8.6.57}
$$

这样证明了命题 11.

注：(1) 从 (8.6.54) 式看, 如果 α 指数只依赖于矢量序列形成的空间, 我们可以写出

$$\alpha(\pm L, L_1, \cdots, L_r) = \alpha([\pm L, L_1, \cdots, L_r]).$$

其中, 记号 $[l_1, \cdots, l_n]$ 表示由 $l_1, \cdots, l_n$ 形成的空间. 用这种记号, 我们得到

$$S_1 = [L_1', \pm L, L_2, \cdots, L_r] = [L_1', L_2', \pm L, \cdots, L_r] = \cdots = [L_1', \cdots, L_r', \pm L].$$

令 $S_2 = [L_1', \cdots, L_r']$, 则 S_1 和 S_2 有一个共同点：它们沿 L 方向的投影都是 $S = [L_1, \cdots, L_r]$, 记为

$$\wedge(L)S_1 = \wedge(L)S_2 = S,$$

(注意 $L_1, \cdots, L_m$ 与 L 都线性独立) 于是我们可以把 (8.6.54) 式写成

$$\alpha_r'(L_1, \cdots, L_r) = \max\{\alpha(S_1) + 1, \alpha(S_2)\},$$

由此得到

$$\begin{aligned}&\alpha_r'(L_1, \cdots, L_r) + \dim[L_1, \cdots, L_r]\\=&\max\{\alpha(S_1) + \dim S_1, \alpha(S_2) + \dim S_2\}.\end{aligned} \tag{8.6.58}$$

因为 $\dim S_1 = \dim S + 1 = \dim S_2 + 1$, 又如果对所有 R_n 的子空间 S 都有

$$\alpha(S) + \dim S < 0. \tag{8.6.59}$$

我们就可以放宽 (8.6.58) 式中求极大值的范围, 使之包含一切沿 L 方向投影到 S 的 R_n 的子空间 (由于 (8.6.59) 式, 这个极值总是存在的), 得到

$$\alpha_r'(L_1, \cdots, L_r) + \dim[L_1, \cdots, L_r] = \sup_{\wedge(L)S'=S}\{\alpha(S') + \dim S'\}.$$

公式右边当 $L_1, \cdots, L_r$ 换成这 r 个矢量的未退化的 r 个线性组合时是不变的, 因此只依赖于 $[L_1, \cdots, L_r]$, 即空间 S. 从而 α_r' 也只依赖于 $L_1, \cdots, L_r$ 形成的空间 S. 我们可以写出

$$\alpha(S) + \dim S = \sup_{\wedge(L)S'=S}\{\alpha(S') + \dim S'\}. \tag{8.6.60}$$

这是 Weinberg 定理的一个局限形式, 在一般形式中 $\wedge(L)$ 推广为 $\wedge(S_0)$, 即沿任意子空间 S_0 的投影.

(2) 我们在 (8.6.55) 式中放宽了 β_r'. 这样形式上比较简单.

8.6.2 R_Γ 是 k 空间的 A_n 类函数

在本小节, 我们证明 R_Γ 是 k 空间的 A_n 类函数, $n=k$ 空间的维数. 当所有 μ_β, 即 $\mu_\alpha=\mu_{ab\sigma}$ 都大于零时, 由于 k 的有理函数 R_Γ 的分母 B 在欧氏空间不为零, 所以在 k 空间的有界区域 R_Γ 绝对可积.

k 空间的坐标的任何齐次线性函数 $f=\sum\limits_l a_l k_l$ 可以看成 k 空间的一个固定矢量 $\vec{a}$ 与 k 空间的矢量 $\vec{k}$ 的内积,

$$f=\vec{a}\cdot\vec{k}. \tag{8.6.61}$$

对于以 k 空间的一个区间 $\mathscr{W}$ 的一个以点 $\vec{c}$ 为原点的超平面 T, 当 k 空间的点取在 T 上时, 这个函数是 $f=\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{t})$. 其中, $\vec{t}$ 是 T 面上的点和 T 面的原点 $\vec{c}$ 确定的矢量.

我们有

$$f=\vec{a}\cdot\vec{c}+\sum_j\vec{a}\cdot\hat{j}t_j=a+b_jt_j, \tag{8.6.62}$$

$\hat{j}$ 是 T 面上第 j 个方向的单位矢量. 这就是我们在叙述 Zimmermann定理时用到过的式子.

现在我们对于 k 空间 (n 维) 的以 $\vec{c}$ 为原点, 由 m 个线性独立的矢量 $L_1,\cdots,L_m$ 产生的平面 T 上改用下述方式描写矢量 $\vec{t}$:

$$\vec{t}=L_1\eta_1\cdots\eta_m+L_2\eta_2\cdots\eta_m+\cdots+L_m\eta_m+\vec{c}, \tag{8.6.63}$$

则当 k 空间的点取在 T 上时, 有

$$\begin{aligned}f&=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot L_1\eta_1\cdots\eta_m+\vec{a}\cdot L_2\eta_2\cdots\eta_m+\cdots+\vec{a}\cdot L_m\eta_m\\&=f_0+f_1\eta_1\cdots\eta_m+f_2\eta_2\cdots\eta_m+\cdots+f_m\eta_m.\end{aligned} \tag{8.6.64}$$

注意: 当 $f_1,\cdots,f_m$ 中有非零值的时候, 排在最前面的非零项 $f_k\eta_k\cdots\eta_m$ 在 η 充分大时变为主要项,

$$f\sim f_k\eta_k\cdots\eta_m. \tag{8.6.65}$$

准确地说, 就是 $|f/(f_k\eta_k\cdots\eta_m)-1|<\epsilon$, 当 $\eta_1,\cdots,\eta_m$ 都 $\to\infty$ 时, $\epsilon\to 0$. 在前文中, 费恩曼被积函数的有限部分用 R_Γ 表示, $R_\Gamma=\frac{A}{B}$. R_Γ 的分母是 $B=\prod_\beta C_\beta$. 其中 C_β 为 C_α 或者 $C_{\alpha 0}$(见 (8.5.6) 式(8.5.13) 式) 的统一写法.

当 Wick 转动之后得

$$C_\beta=-\left[\sum_{\mu=1}^4(l_\beta^\mu)^2+\mu_\beta^2\right]+\mathrm{i}\epsilon(\vec{l}_\beta^2+\mu_\beta^2). \tag{8.6.66}$$

其中, l^μ_β 为 l^μ_α 或 $k^{\gamma\mu}_\alpha$. 因此, 有 $l^\mu_\beta = A^\mu_\beta + f^\mu_\beta$, f^μ_β 是 k 空间坐标的齐次线性函数, C_β 是 k 空间点的坐标的函数.

当 k 空的点在 T 上移动时, 如果对一切方向对一切 μ, f^μ_β 都不变, 则 L_β 是 T 上的常量, 这时 C_β 的 t 幂次为 0. 否则, 只要有某些 μ, 在 T 面上某些方向上, f^μ_β 是变化的, 则称 L_β 是 T 上的变量. 这时 C_β 的 T 幂次是 2. 从 (8.6.64) 式来看, 只要对 $\mu = 1, \cdots, 4$, f^μ_β 作为 k 空间的函数 (8.6.64) 式中 $f_1, \cdots, f_m$ 中有非零的数, 就称 L_β 是 T 面上的变量. 这时我们看到, 当 η 充分大的时候, 总有某一个 f_k 是主项,

$$C_\beta \sim (\eta_k \eta_{k+1} \cdots \eta_m)^2. \tag{8.6.67}$$

从而 R_Γ 的分母 B 的 t 幂次就是 R_Γ 的分母在 η 充分大时的 η_m 幂次 j_m.

类似地, 在 (8.6.63) 式中当 $\eta_{l+1}, \eta_{l+2} \cdots \eta_m$ 固定不变时, $\eta_1, \cdots, \eta_l$ 描写了一个在 k 空间的 T_l 平面 (l 维). 它由矢量 $L_1, \cdots, L_l$ 确定, 是 T 平面的子平面. 同样地, 当 L_β 是 T_l 面上的变量时, C_β 的 T_l 幂次为 2 . 否则为 0. 而这个幂次与 C_β 的 η_l 幂次是一致的, 它也就是 η 充分大 (所有的 $\eta_1, \cdots, \eta_{m \to \infty}$) 时 C_β 的 η_l 幂次, 因此 R_Γ 的分母 B 的 η_l 幂次 j_l, 也就是 B 在 T_l 面上的 t_l 幂次. 当 η 充分大时, B 的渐近行为是

$$B \sim \eta_1^{j_1} \cdots \eta_m^{j_m}. \tag{8.6.68}$$

R_Γ 的分子 A 是 l^μ_β 的多项式, 因而是 k 空间坐标的多项式, 类似的分析指出, 当 η 充分大时, 由 (8.6.65) 式, k 空间坐标的线性函数 l^μ_β 剩下一个主项, 它的 t_l 幂次和 t 幂次 (相对于 T_l 和 T) 就是 l^μ_β 的 η_l 和 η_m 幂次, 从而分子 A 的 t 和 t_l 幂次不大于它们的 η_m 和 η_l 幂次 s_m 和 s_l. 由 (8.6.68) 式当 η 充分大时, 有

$$R_\Gamma \sim \frac{A}{\eta_1^{j_1} \cdots \eta_m^{j_m}}. \tag{8.6.69}$$

其中, A 是 η 的多项式, 它的 η_l 幂次为 s_l, 由 Zimmermann定理, R_Γ 对 T_l 的 t_l 幂次 $< -T_l$ 的维数 $= -l$, 即

$$s_l - j_l < -l. \tag{8.6.70}$$

当 $\{x_l\}$ 的多项式 A 的 x_l 幂次为 s_l 时, 我们总可以找到充分大的 x_l, 使

$$|A| \leqslant M \prod_l |x_l^{s_l}|.$$

这是因为 A 可以写成 $A = \prod\limits_l x_l^{s_l} P$, P 是 $\{\frac{1}{x_l}\}$ 的多项式. 它的常数项非零. 当 $\{x_l\} \to \infty$ 时, P 是有界的. 因此有

$$|R_\Gamma| \leqslant M' \prod_l \eta_l^{(s_l - j_l)}. \tag{8.6.71}$$

这也就是说 R_Γ 是 k 空间的 A_n 类函数, 其渐近指数满足

$$\alpha(L_1, \cdots, L_l) < -l, \tag{8.6.72}$$

$$\beta = 0.$$

8.6.3　R_Γ 的欧氏空间积分绝对收敛

由于 R_Γ 在 欧氏空间属于 A_n 类函数, 而且对一维空间有

$$\alpha(L) < -1, \tag{8.6.73}$$

所以可以对沿 L 方向的直线上的坐标 y 积分, 得到 R_{n-1} 的 A_n 类函数. 然后考察在 R_{n-1} 维空间的 α 指数, 根据 (8.6.54) 式为

$$\begin{aligned}\alpha'_r = &\max\{\alpha(\pm L, L_1, \cdots, L_r) + 1, \alpha(L'_1, \pm L, L_2, \cdots, L_r) + 1, \cdots, \\ &\alpha(L'_1, \cdots, L'_r, \pm L) + 1, \alpha(L'_1, \cdots, L'_r)\}.\end{aligned} \tag{8.6.74}$$

由于

$$\begin{aligned}&\alpha(\cdots) < -(T\text{面维数}) = \text{形成 } T \text{ 面的独立矢量数} \\ \Rightarrow &\alpha'_r < \max\{-(r+1)+1, \cdots, -r\} = -r = -(T_r\text{的独立矢量数}). \\ &\text{特别是 } \alpha'_1 < -1.\end{aligned} \tag{8.6.75}$$

其中, β 指数为 $2 \times 0 + 1 = 1$. 因此, 我们可以在 k 空间任取一系列正交独立矢量 $L_1, \cdots, L_n$, 沿着这些方向逐次积分一直到全部 k 空间的独立变元积分完毕. 每一步积分都是绝对收敛的. 因而, R_Γ 在 R 空间的积分绝对收敛. 注意最后一次积分为 $\left|\int \mathrm{d}y f(\vec{\Gamma}_b + Ly)\right| \leqslant \int \mathrm{d}y |f(\vec{\Gamma}_b + Ly)|$, 令 $|y| = \eta_0$ 给出 $\vec{\Gamma}_b + Ly = \pm L\eta_0 + C$. 当 η_0 充分大时可以用渐近估值积分, f 是绝对可积的, 其余部分则需要用到 A_n 类函数的第 (1) 个性质, 因而也是绝对可积的.

至此, 我们给出了 R_Γ 收敛的全部证明.

附录 8.6A　积分 $\int_b^{\lambda\eta} \mathrm{d}\, z \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\alpha'} \left(\ln \frac{\eta}{z}\right)^{\beta'} z^\alpha \ln z^\beta$ 的渐近指数

令

$$A = \int_b^{\lambda\eta} \mathrm{d}\, z \left(\frac{\eta}{z}\right)^{\alpha'} \left(\ln \frac{\eta}{z}\right)^{\beta'} z^\alpha \ln z^\beta, \tag{8.6A.1}$$

根据正文的假设, 考虑

$$\beta, \beta' \geqslant 0, \quad b > 1, \quad \lambda = b_r^{-1} < 1, \lambda\eta > b \Rightarrow \eta > 1, A > 0. \tag{8.6A.2}$$

(1) 当 $\alpha - \alpha' < -1$, 即 $\alpha + 1 < \alpha'$ 时,

$$A = \int_b^{\lambda\eta} \mathrm{d}\, z \quad z^{\alpha-\alpha'} \ln z^{\beta} (1 - \frac{\ln z}{\ln \eta})^{\beta'} \eta^{\alpha'} \ln \eta^{\beta'}.$$

[①]当 $b > 1, \lambda < 1, \beta, \beta' \geqslant 0$ 时, 由 $0 < \dfrac{\ln z}{\ln \eta} < 1$, $0 < \left(1 - \dfrac{\ln z}{\ln \eta}\right)^{\beta'} < 1$, 有

$$A < \int_b^{\lambda\eta} \mathrm{d}\, z\, z^{\alpha-\alpha'} \ln z^{\beta} \eta^{\alpha'} \ln \eta^{\beta'} < \int_b^{\infty} \mathrm{d}\, z\, z^{\alpha-\alpha'} \ln z^{\beta} \eta^{\alpha'} \ln \eta^{\beta'}.$$

当 $\alpha - \alpha' < -1$ 时, 积分收敛,

$$A \leqslant M \eta^{\alpha'} \ln \eta^{\beta'}. \tag{8.6A.3}$$

M 是 $\alpha - \alpha'$ 和 β 的函数.

(2) 当 $\alpha - \alpha' > -1$, 即 $\alpha + 1 > \alpha'$ 时, 令 $\dfrac{\eta}{z} = z'$, 则有

$$z = \frac{\eta}{z'}, \quad |\mathrm{d}\, z| = \frac{\eta}{z'^2} |\mathrm{d}\, z'|,$$

由 (8.6A.1) 式得

$$\begin{aligned} A &= \int_{\lambda^{-1}}^{b^{-1}\eta} \eta \mathrm{d}\, z' z'^{\alpha'-2} (\ln z')^{\beta'} (\frac{\eta}{z'})^{\alpha} (\ln \frac{\eta}{z'})^{\beta} \\ &\equiv \eta \int_{\lambda^{-1}}^{b^{-1}\eta} \mathrm{d}\, z' z'^{\alpha''} (\ln z')^{\beta'} (\frac{\eta}{z'})^{\alpha} (\ln \frac{\eta}{z'})^{\beta}. \end{aligned}$$

其中, $\alpha'' = \alpha' - 2$, $\alpha'' - \alpha = \alpha' - 2 - \alpha < 1 - 2 = -1$.

所以由 (8.6A.3) 式的推导 (将 $z \to z'$) 得

$$\eta \int \cdots \leqslant \eta M \eta^{\alpha} \ln \eta^{\beta}$$

$$\Rightarrow A \leqslant M \eta^{\alpha+1} \ln \eta^{\beta}. \tag{8.6A.4}$$

(3) 当 $\alpha - \alpha' = -1$, 即 $\alpha + 1 = \alpha'$ 时,

① 当 $\lambda\eta < b$ 时, 在正文推导中可以看出这种 $J_{\pm i_1 \cdots i_r}$ 不存在.

$$A = \int_b^{\lambda\eta} \mathrm{d}\, z\ z^{-1}\ \ln z^{\beta} \left(\ln \frac{\eta}{z}\right)^{\beta'} \eta^{\alpha'},$$

由 $\lambda\eta > b > 1, \ln\lambda + \ln\eta > \ln b, \dfrac{\ln\lambda}{\ln\eta} + 1 > \dfrac{\ln b}{\ln\eta}$, 给出

$$\begin{aligned} A =& \int_{\frac{\ln b}{\ln\eta}}^{\frac{\ln\lambda}{\ln\eta}+1} \mathrm{d}\left(\frac{\ln z}{\ln\eta}\right)\left(\frac{\ln z}{\ln\eta}\right)^{\beta}\left(1 - \frac{\ln z}{\ln\eta}\right)^{\beta'} \ln\eta^{\beta+\beta'+1}\eta^{\alpha'} \\ &< \left[\int_0^1 \mathrm{d}\, x x^{\beta}(1-x)^{\beta'}\right] \ln\eta^{\beta+\beta'+1}\eta^{\alpha'}. \end{aligned}$$

当 $\beta, \beta' \geqslant 0$ 时, 积分收敛, 所以

$$A \leqslant M(\ln\eta)^{\beta+\beta'+1}\eta^{\alpha'}. \tag{8.6A.5}$$

M 是 $\beta\beta'$ 的函数. 因此, 我们总有

$$A \leqslant M\eta^{\max\{\alpha', \alpha+1\}} \ln\eta^{\max\{2\beta+1, 2\beta'+1\}}. \tag{8.6A.6}$$

M 是 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 的函数, 与 η 无关.

主要参考文献

Amit D. 1978. Field theory, the renormalization group, and critical phenomena. New York: Mac-Graw Hill.

Bjorken J D,. Drell S D. 1965. Relativistic quantum fields. New York: McGraw Hill.

Chang S J. 1990. Intruduction to quantum field theory. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Greiner, Reinhardt. 1996. Field quantization. Berlin: Springer-Verlag.

Gupta S N. 1977. Quantum electrodynamics. New York: Gordon and Breach Science Publisher.

Itzykson C, Zuber J B. 1980. Quantum field theory. New York:Mc Graw Hill.

Manoukian E B. 1983. Renormalization. New York: Academic Press.

Ryder L H. 1985. Quantum field theory. New York: Press Syndicate of University of Cambridge.

Salam A. 1951. Overlapping divergences and the S-matrix. Phys. Rev., 82(2), 217-227.

Ticciati R. 1999. Quantum field theory for Mathematicians. New York: Cambridge University Press.

Weinberg S. 1995. The quantum theory of fields. New York: Press Syndicate of the University of Cambridge.

Zimmermann W. 1968. The power counting theorem for minkowski metric. Commun. math. Phs., 11: 1-8.

Zimmermann W. 1969. Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space. Commun. math. Phys., 15: 208-234.

波戈留波夫 H H. 1966. 量子场论导引. 董明德译, 侯伯宇校. 北京：科学出版社.

曹昌祺. 2008. 量子非阿贝尔规范理论. 北京：科学出版社.

韩其智, 孙洪洲. 1987. 群论. 北京：北京大学出版社.

侯伯元, 侯伯宇. 1995. 物理学家用微分几何. 北京：科学出版社.

侯伯元, 云国宏, 杨战营. 2008. 路径积分与量子物理导引 —— 现代高等量子力学初步. 北京：科学出版社.

胡宁. 1964. 场的量子理论. 北京：科学出版社.

李政道. 2006. 粒子物理和场论. 上海：上海科学技术出版社

倪光炯, 陈苏卿. 2004. 高等量子力学. 上海：复旦大学出版社.

王正行. 2008. 简明量子场论. 北京：科学出版社.

汪容. 1998. 数学物理中的微分几何与拓扑学. 杭州：浙江大学出版社.

汪容. 2008. 量子规范理论. 北京：高等教育出版社.
杨泽森. 2007. 高等量子力学. 北京：北京大学出版社.
俞允强. 1997. 广义相对论引论 (第二版). 北京：北京大学出版社.
赵凯华, 罗蔚茵. 2008. 量子物理 (第二版). 北京：高等教育出版社.
朱洪元. 1960. 量子场论. 北京：科学出版社.

索　　引

《现代物理基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

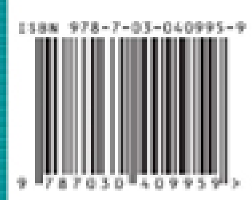
1. 现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2. 物理学家用微分几何 (第二版)	侯伯元，侯伯宇 著	2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4. 计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5. 相互作用的规范理论 (第二版)	戴元本 著	2005.07
6. 理论力学	张建树，等 编著	2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论 (上册 · 第二版)	梁灿彬，周彬 著	2006.01
8. 物理学中的群论 (第二版)	马中骐 著	2006.02
9. 辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10. 实验物理中的概率和统计 (第二版)	朱永生 著	2006.04
11. 声学理论与工程应用	朱海潮，等 编著	2006.05
12. 高等原子分子物理学 (第二版)	徐克尊 著	2006.08
13. 大气声学 (第二版)	杨训仁，陈宇 著	2007.06
14. 输运理论 (第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15. 量子统计力学 (第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17. 激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19. 狭义相对论 (第二版)	刘 辽，等 编著	2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21. 路径积分与量子物理导引	侯伯元，等 著	2008.09
22. 量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡，李俊昌 编著	2009.01
24. 实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论(中册 · 第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.03

26. 中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27. 工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论(下册 · 第二版)	梁灿彬，周彬 著	2009.08
29. 经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04
31. 高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构(第二版 · 上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03
33. 量子计算与量子信息原理	Giuliano Benenti 等 著	
——第一卷：基本概念	王文阁，李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体	B. M. 弗尔曼，И. M. 扎什京 编著	
——等离子体的产生、工艺、问题及前景	邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿，韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪，魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 1 卷：基础理论	姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第 2 卷：实验技术	姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海，杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	H. 克莱纳特 著	
	姜 颖 译	2012.06
44. 反常统计动力学导论	包景东 著	2012.06
45. 实验数据分析(上册)	朱永生 著	2012.06
46. 实验数据分析(下册)	朱永生 著	2012.06
47. 有机固体物理	解士杰，等 著	2012.09
48. 磁性物理	金汉民 著	2013.01
49. 自旋电子学	翟宏如，等 编著	2013.01

50. 同步辐射光源及其应用(上册)	麦振洪，等　著	2013.03
51. 同步辐射光源及其应用(下册)	麦振洪，等　著	2013.03
52. 高等量子力学	汪克林　著	2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学	王顺金　著	2013.03
54. 薄膜生长（第二版）	吴自勤，等　著	2013.03
55. 物理学中的数学物理方法	王怀玉　著	2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础	王顺金　著	2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学	刘　辽，黄超光　著	2013.10
58. 经典电动力学	张锡珍，张焕乔　著	2013.10
59. 内应力衍射分析	姜传海，杨传铮　编著	2013.11
60. 宇宙学基本原理	龚云贵　著	2013.11
61. B 介子物理学	肖振军　著	2013.11
62. 量子场论与重整化导论	**石康杰，杨文力，杨战营　编著**	**2014.06**

[O-5550.01]





责任编辑：刘凤娟
联系电话：010-64033515
E-mail：liufengjuan@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等物理

定　价：128.00 元